Teorema de Tutte

Thiago Braga Marcilon

Universidade Federal do Cariri

14 de novembro de 2019

Introdução

Notações básicas

- $n(G)$ denota a ordem do grafo G, ou seja, o seu número de vértices;
- $V(G)$ e $E(G)$ denota o conjunto de vértices e arestas de G respectivamente;

Introdução

Notações básicas

- $n(G)$ denota a ordem do grafo G, ou seja, o seu número de vértices;
- $V(G)$ e $E(G)$ denota o conjunto de vértices e arestas de G respectivamente;
- Uma clique de um grafo G é um subgrafo de G onde há uma aresta entre quaisquer par de vértices;

Introdução

Notações básicas

- $n(G)$ denota a ordem do grafo G, ou seja, o seu número de vértices;
- $V(G)$ e $E(G)$ denota o conjunto de vértices e arestas de G respectivamente;
- Uma clique de um grafo G é um subgrafo de G onde há uma aresta entre quaisquer par de vértices;
- $o(G)$ denota o número de componentes conexas de G de ordem ímpar;

Introdução

Notações básicas

- $n(G)$ denota a ordem do grafo G, ou seja, o seu número de vértices;
- $V(G)$ e $E(G)$ denota o conjunto de vértices e arestas de G respectivamente;
- Uma clique de um grafo G é um subgrafo de G onde há uma aresta entre quaisquer par de vértices;
- $o(G)$ denota o número de componentes conexas de G de ordem ímpar;
- $G - S$, onde S é um subconjunto de vértices de G, denota o subgrafo de G induzido pelos vértices fora de S;

Introdução

Notações básicas

- $n(G)$ denota a ordem do grafo G, ou seja, o seu número de vértices;
- $V(G)$ e $E(G)$ denota o conjunto de vértices e arestas de G respectivamente;
- Uma clique de um grafo G é um subgrafo de G onde há uma aresta entre quaisquer par de vértices;
- $o(G)$ denota o número de componentes conexas de G de ordem ímpar;
- $G - S$, onde S é um subconjunto de vértices de G, denota o subgrafo de G induzido pelos vértices fora de S;
- $G + e$, onde e é uma não-aresta de G, denota o grafo G adicionado de e;

Introdução

Notações básicas

- $n(G)$ denota a ordem do grafo G, ou seja, o seu número de vértices;
- $V(G)$ e $E(G)$ denota o conjunto de vértices e arestas de G respectivamente;
- Uma clique de um grafo G é um subgrafo de G onde há uma aresta entre quaisquer par de vértices;
- $o(G)$ denota o número de componentes conexas de G de ordem ímpar;
- $G - S$, onde S é um subconjunto de vértices de G, denota o subgrafo de G induzido pelos vértices fora de S;
- $G + e$, onde e é uma não-aresta de G, denota o grafo G adicionado de e;
- A diferença simétrica de dois conjuntos M_1 e M_2, denotado por $M_1 \triangle M_2$, é o conjunto de elementos em exatamente um dos conjuntos, ou seja, $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$.

Introdução

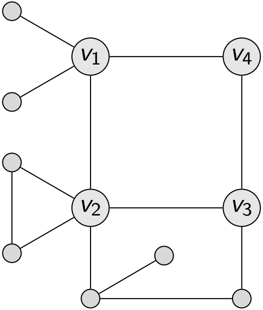


Figura 1: Grafo G.

Introdução

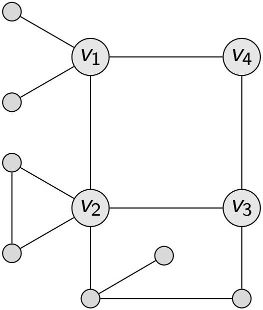


Figura 1: $n(G) = 11$.

Introdução

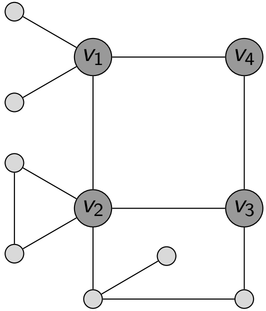


Figura 1: Conjunto de vértices $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Introdução

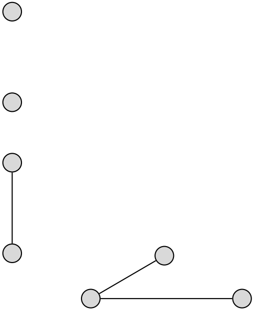


Figura 1: $G - S$ para $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Nesse caso, $o(G - S) = 3$.

Introdução

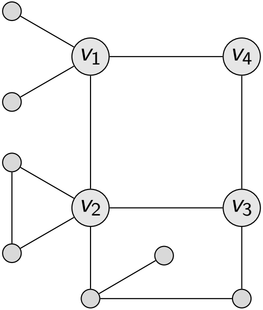


Figura 1: Grafo G.

Introdução

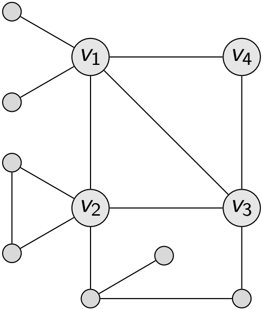


Figura 1: $G + e$, para $e = \{v_1, v_3\}$.

Pareamento em grafos

Pareamento

- Um *pareamento* em um grafo é um conjunto qualquer de arestas que não possuem extremidades em comum;
- Dizemos que um pareamento S de um grafo G é *perfeito* se todo vértice de G é extremidade de algum vértice em S.

Pareamento em grafos

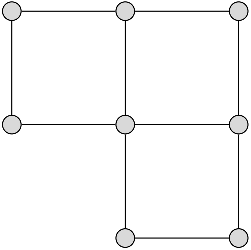


Figura 2: Grafo G.

Pareamento em grafos

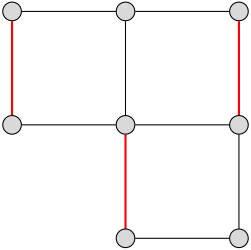


Figura 2: Um pareamento de G.

Pareamento em grafos

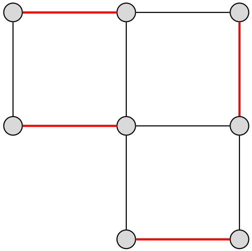


Figura 2: Um pareamento perfeito M_1 de G.

Pareamento em grafos

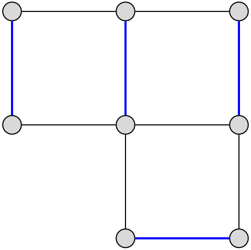


Figura 2: Outro pareamento perfeito M_2 de G.

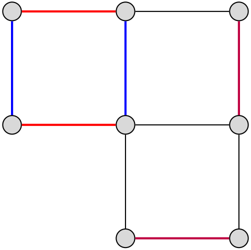


Figura 2: $M_1 \triangle M_2$.

Pareamento em grafos

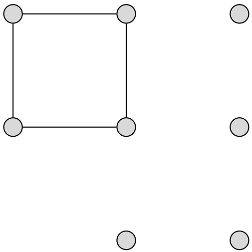


Figura 2: $M_1 \triangle M_2 =$ ciclos e vértices isolados.

Teorema (Teorema de Tutte)

Um grafo G tem um 1-fator se e somente se temos que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.*

Teorema de Tutte

Teorema (Teorema de Tutte)

Um grafo G tem um 1-*fator* se e somente se temos que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.*

Tecnicalidades

- Dizemos que G obedece a condição de Tutte se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$;

Teorema de Tutte

Teorema (Teorema de Tutte)

Um grafo G tem um 1-fator se e somente se temos que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.*

Tecnicalidades

- Dizemos que G obedece a condição de Tutte se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$;
- 1-fator de um grafo G é um subgrafo 1-regular gerador de G, ou seja, um subgrafo de G induzido pelas arestas de um pareamento perfeito;

Teorema de Tutte

Teorema (Teorema de Tutte)

Um grafo G tem um 1-fator se e somente se temos que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.*

Tecnicalidades

- Dizemos que G obedece a condição de Tutte se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$;
- 1-fator de um grafo G é um subgrafo 1-regular gerador de G, ou seja, um subgrafo de G induzido pelas arestas de um pareamento perfeito;
- Portanto, no lugar de 1-fator acima, poderíamos colocar de forma equivalente "pareamento perfeito".

Teorema de Tutte

Ida

Se G possui um pareamento perfeito, então $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

Teorema de Tutte

Ida

Se G possui um pareamento perfeito, então $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

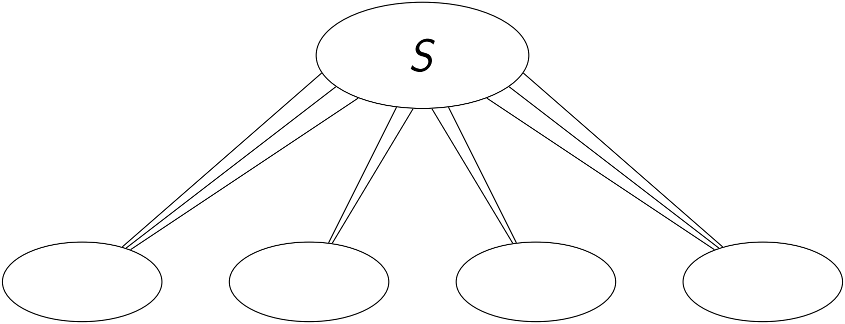


Figura 3: Grafo G.

Teorema de Tutte

Ida

Se G possui um pareamento perfeito, então $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

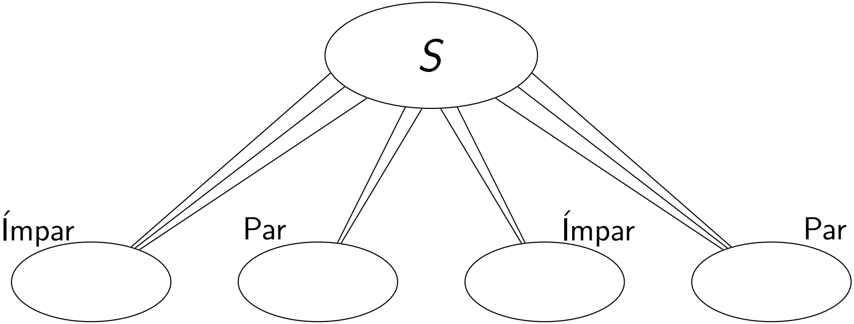


Figura 3: Grafo G.

Ida

Se G possui um pareamento perfeito, então $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

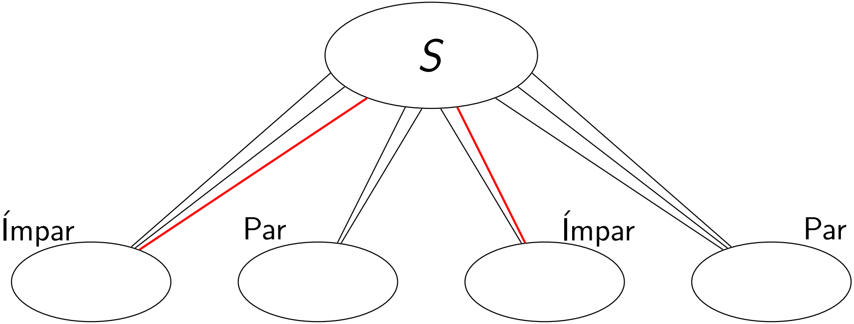


Figura 3: Grafo G.

Teorema de Tutte

Volta

Se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$ então G possui um pareamento perfeito.

Teorema de Tutte

Volta

Se $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$ então G possui um pareamento perfeito.

Prova por absurdo

Suponha que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$ e que G **não** possui um pareamento perfeito.

Teorema de Tutte

Alguns detalhes...

- $n(G)$ é par, pois, para $S = \varnothing$, temos que $o(G) \leq 0$;

Teorema de Tutte

Alguns detalhes...

- $n(G)$ é par, pois, para $S = \varnothing$, temos que $o(G) \leq 0$;
- Se G obedece a condição de Tutte, $G + e$ também obedece;

Teorema de Tutte

Alguns detalhes...

- $n(G)$ é par, pois, para $S = \varnothing$, temos que $o(G) \leq 0$;
- Se G obedece a condição de Tutte, $G + e$ também obedece;
- Se G possui um pareamento perfeito, então $G + e$ também possui.

Teorema de Tutte

Alguns detalhes...

- $n(G)$ é par, pois, para $S = \varnothing$, temos que $o(G) \leq 0$;
- Se G obedece a condição de Tutte, $G + e$ também obedece;
- Se G possui um pareamento perfeito, então $G + e$ também possui.

Logo...

- Se G não possui um pareamento perfeito, existe um supergrafo gerador G' de G tal que G' não também possui, mas $G' + e$ possui para toda não-aresta e de G'; e

Alguns detalhes...

- $n(G)$ é par, pois, para $S = \varnothing$, temos que $o(G) \leq 0$;
- Se G obedece a condição de Tutte, $G + e$ também obedece;
- Se G possui um pareamento perfeito, então $G + e$ também possui.

Logo...

- Se G não possui um pareamento perfeito, existe um supergrafo gerador G' de G tal que G' não também possui, mas $G' + e$ possui para toda não-aresta e de G'; e
- G' obedece a condição de Tutte;

Teorema de Tutte

Alguns detalhes...

- $n(G)$ é par, pois, para $S = \varnothing$, temos que $o(G) \leq 0$;
- Se G obedece a condição de Tutte, $G + e$ também obedece;
- Se G possui um pareamento perfeito, então $G + e$ também possui.

Logo...

- Se G não possui um pareamento perfeito, existe um supergrafo gerador G' de G tal que G' não também possui, mas $G' + e$ possui para toda não-aresta e de G'; e
- G' obedece a condição de Tutte;
- O absurdo será que G' de fato possui um pareamento perfeito.

Teorema de Tutte

Inicialmente, seja U o conjunto de vértices de G' com grau $n(G') - 1$. Note que U é uma clique. Dividimos a prova em 2 casos:

Teorema de Tutte

Inicialmente, seja U o conjunto de vértices de G' com grau $n(G') - 1$. Note que U é uma clique. Dividimos a prova em 2 casos:

1. Todos os componentes de $G' - U$ são cliques;
2. Nem todos os componentes de $G' - U$ são cliques.

Teorema de Tutte

1º caso – Todos os componentes de $G' - U$ são cliques

1. Pareamos as componentes pares de $G' - U$ dentro de qualquer forma;

Teorema de Tutte

1º caso – Todos os componentes de $G' - U$ são cliques

1. Pareamos as componentes pares de $G' - U$ dentro de qualquer forma;
2. As componentes ímpares de $G' - U$ também, porém o vértice que sobra pareamos com um vértice de U; e

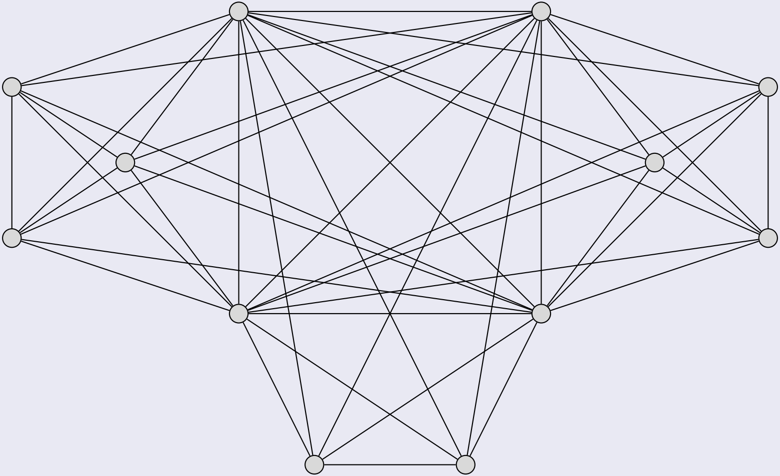
Teorema de Tutte

1º caso – Todos os componentes de $G' - U$ são cliques

1. Pareamos as componentes pares de $G' - U$ dentro de qualquer forma;
2. As componentes ímpares de $G' - U$ também, porém o vértice que sobra pareamos com um vértice de U; e
3. Como sobram um número par de vértices em U ainda não pareados, pareamos os vértices restantes de qualquer forma, já que formam uma clique.

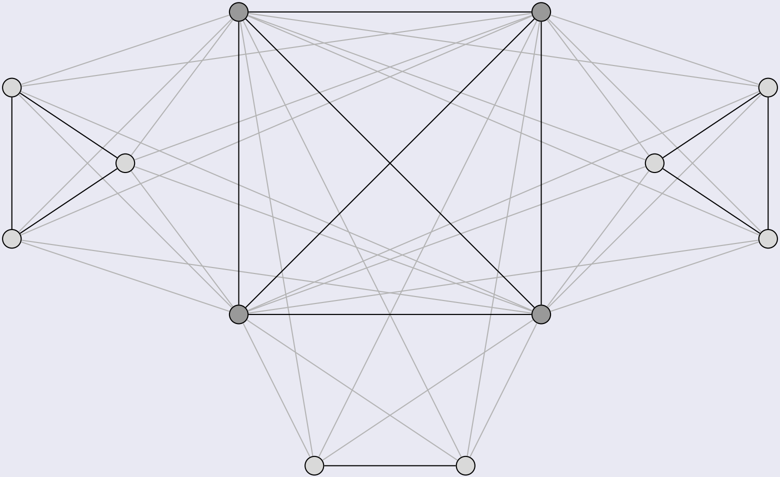
Teorema de Tutte

Exemplo



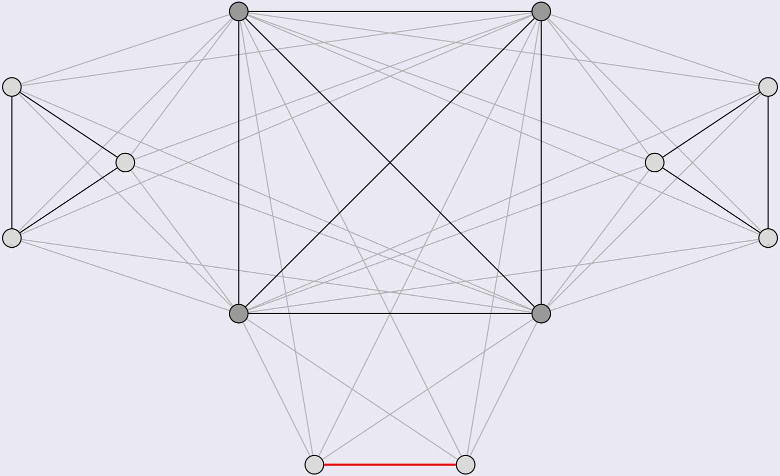
Teorema de Tutte

Exemplo



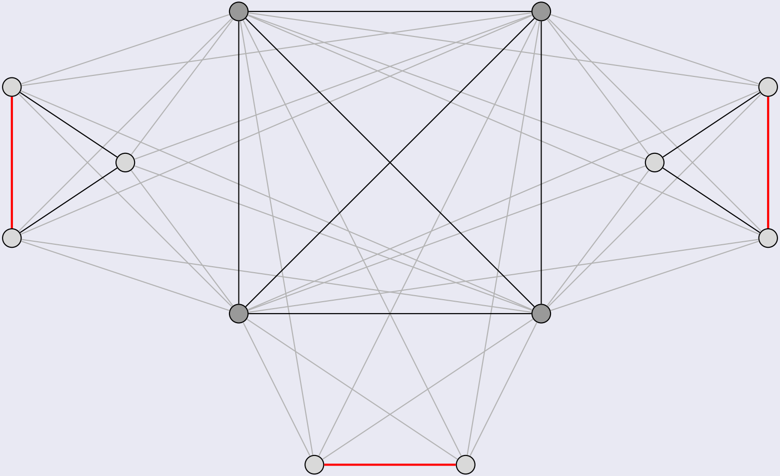
Teorema de Tutte

Exemplo



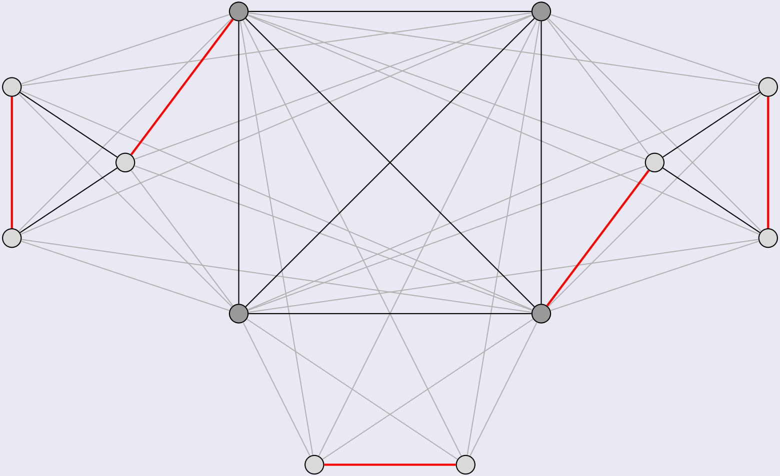
Teorema de Tutte

Exemplo



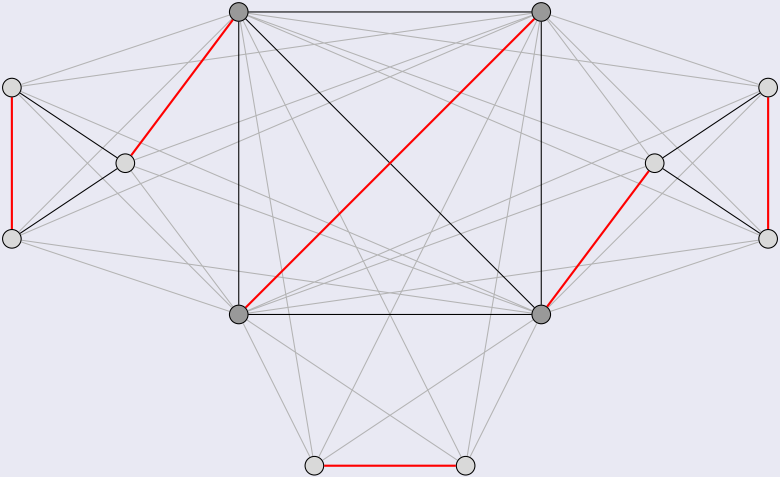
Teorema de Tutte

Exemplo



Teorema de Tutte

Exemplo



2º caso – Nem todos os componentes de $G' - U$ são cliques

1. Existe uma componente R de $G' - U$ que não é clique. Seja x e z vértices a distância 2 entre si em R e y um vértice adjacente aos dois em R;

Teorema de Tutte

2º caso – Nem todos os componentes de $G' - U$ são cliques

1. Existe uma componente R de $G' - U$ que não é clique. Seja x e z vértices a distância 2 entre si em R e y um vértice adjacente aos dois em R;
2. Como $y \notin U$, seja w um vértice não adjacente à y.

2º caso – Nem todos os componentes de $G' - U$ são cliques

1. Existe uma componente R de $G' - U$ que não é clique. Seja x e z vértices a distância 2 entre si em R e y um vértice adjacente aos dois em R;
2. Como $y \notin U$, seja w um vértice não adjacente à y.
3. Seja M_1 e M_2 pareamentos perfeitos dos grafos $G' + xz$ e $G' + yw$ respectivamente;

Teorema de Tutte

2º caso – Nem todos os componentes de $G' - U$ são cliques

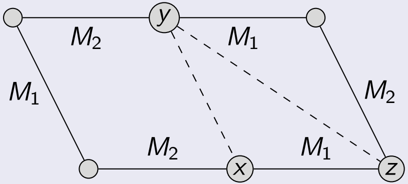
1. Existe uma componente R de $G' - U$ que não é clique. Seja x e z vértices a distância 2 entre si em R e y um vértice adjacente aos dois em R;
2. Como $y \notin U$, seja w um vértice não adjacente à y.
3. Seja M_1 e M_2 pareamentos perfeitos dos grafos $G' + xz$ e $G' + yw$ respectivamente;
4. Seja F o subgrafo induzido por $M_1 \triangle M_2$, o qual é formado apenas por ciclos e vértices isolados.

Teorema de Tutte

2º caso – Nem todos os componentes de $G' - U$ são cliques

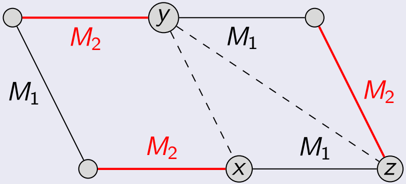
1. Existe uma componente R de $G' - U$ que não é clique. Seja x e z vértices a distância 2 entre si em R e y um vértice adjacente aos dois em R;
2. Como $y \notin U$, seja w um vértice não adjacente à y.
3. Seja M_1 e M_2 pareamentos perfeitos dos grafos $G' + xz$ e $G' + yw$ respectivamente;
4. Seja F o subgrafo induzido por $M_1 \triangle M_2$, o qual é formado apenas por ciclos e vértices isolados.
5. Seja C o ciclo que contém xz.

Se C não contém a aresta yw



Teorema de Tutte

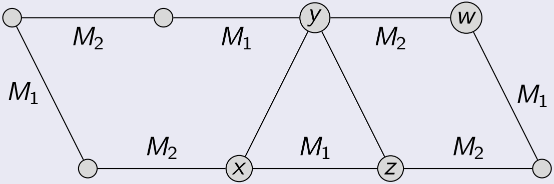
Se C não contém a aresta yw



$(M_1 \setminus E(C)) \cup (M_2 \cap E(C))$ é um pareamento de G', pois não usa nem xz e nem yw.

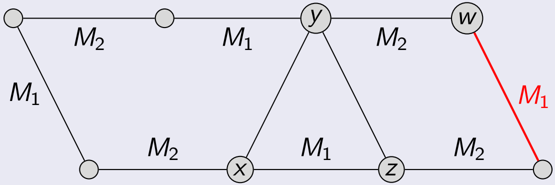
Teorema de Tutte

Se C contém a aresta yw



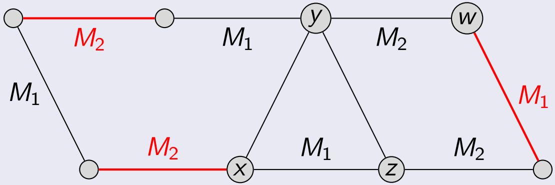
Teorema de Tutte

Se C contém a aresta yw



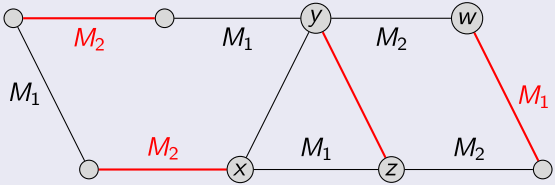
Teorema de Tutte

Se C contém a aresta yw



Teorema de Tutte

Se C contém a aresta yw



$M_2 \setminus E(C)$ juntamente com as arestas acima formam um pareamento de G', pois não usa nem xz e nem yw.

Perguntas?