



Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências e Tecnologia
Mestrado Profissional Em Matemática Em
Rede Nacional - PROFMAT

Sobre a Projeção de Mercator

Carlos de Lima Macedo

Juazeiro do Norte

2018

Carlos de Lima Macedo

Sobre a Projeção Mercator

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Cariri, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio França Cruz

Juazeiro do Norte

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

- M119t Macedo, Carlos de Lima.
Sobre a projeção de Mercator/ Carlos de Lima Macedo. – 2018.
37 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia
–Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.
- Orientação: Prof. Dr. Flávio França Cruz.
1. Projeção de Mercator. 2. Função exponencial complexa. 3. Curva Tractriz. I. Título.

CDD 510.7

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sobre a Projeção de Mercator

Carlos de Lima Macedo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 30 de outubro de 2018.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Flávio França Cruz - URCA

Orientador

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves- UFCA

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz -
URCA

*Dedico a minha esposa, pois é junto a
mim a formação de uma só carne.*

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus, que é aquele que sustenta o fôlego das minhas narinas dia após dia com sua misericórdia.

Agradeço ao meu orientador Flávio França Cruz, por, no lugar de olhar as dificuldades, ter me guiado com tanta paciência e dedicação.

Agradeço aos meus pais, Cícero Saraiva Macedo e Jane de Lima Macedo, e ao meu irmão Lucas, pela educação que me foi dada e pelo apoio e incentivo incondicional aos meus estudos.

Agradeço à minha esposa, Maria Renata Santos Pereira Macedo, e às minhas filhas Maria Ester e Ana Cecília pelo incentivo e pela paciência devido às ausências necessárias à dedicação a dissertação.

Agradeço a todos os colegas, familiares e amigos que contribuíram de alguma forma nesse período do mestrado.

“Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àqueles que tem coragem de ir a fundo nela.” (Gauss)

Resumo

Apresentamos duas importantes propriedades da projeção de Mercator: a conexão da projeção com a função exponencial complexa e a íntima relação que pode ser estabelecida entre a projeção e a curva tractrix. Estas propriedades nos permitem apresentar a função exponencial complexa e a curva tractrix utilizando a projeção de Mercator como motivação, fornecendo assim uma forma de apresentar estes conceitos matemáticos abstratos com o apelo extremamente prático dado pela cartografia. Este trabalho foi fortemente inspirado no artigo *Some properties related to Mercator projection*, de autoria de Wim Pijls, publicado no volume 108 da revista *The American Mathematical Monthly*.

Palavras-chave: Projeção de Mercator; Função exponencial complexa; Curva tractrix.

Abstract

We present two important properties of the Mercator projection: the connection with the complex exponential function and the intimate relationship that can be established between the projection and the tractrix curve. These properties allow us to present the complex exponential function and the tractrix curve using the projection of Mercator as a motivation, thus providing a way of presenting these abstract mathematical concepts with the practical extreme appeal of cartography. This work was strongly inspired by the article *Some properties related to Mercator projection*, by Wim Pijls, published in volume 108 of *The American Mathematical Monthly*.

Keywords: Mercator projection; Complex exponential function; Tractrix curve.

Sumário

1	Introdução	9
2	Gerardus Mercator e a Cartografia	11
2.1	Cartografia, a projeção de Mercator e sua herança	13
3	Conceitos Básicos	15
3.1	Coordenadas Polares	15
3.2	Coordenadas Esféricas	16
3.3	A função exponencial complexa	18
3.4	Curvas Planas	21
4	Projeção de Mercator	23
5	Projeção de Mercator e a exponencial complexa	29
5.1	Projeção estereográfica	29
5.2	Projeção de Mercator vs. projeção estereográfica	30
5.3	As projecões e a exponencial complexa	31
6	Projeção de Mercator e a curva tractrix	32
6.1	A curva tractrix	32
6.2	Relação com a projeção de Mercator.	33
7	Conclusão	35

1 Introdução

Neste trabalho, discutiremos dois tópicos matemáticos relacionados à cartografia. A cartografia trata do problema de mapear o globo num plano. A aplicação mais utilizada para este fim é a aplicação de Mercator, usualmente chamada de Projeção de Mercator. Apresentaremos uma conexão entre a Projeção de Mercator e a função exponencial complexa e explicitaremos uma relação entre esta projeção e a curva tratrix. Um dos objetivos é utilizar estas conexões para fornecer um meio de apresentar de forma mais atraente conceitos matemáticos abstratos, uma vez que a cartografia é a base para a construção de mapas.

Segundo o Atlas Geográfico Escolar do IBGE [1] a palavra cartografia tem origem na língua portuguesa, tendo sido registrada pela primeira vez em 1839 numa correspondência, indicando a ideia de um traçado de mapas e cartas. Hoje entendemos cartografia como a representação geométrica plana, simplificada e convencional de toda a superfície terrestre ou de parte desta, apresentada através de mapas, cartas ou plantas [1]. Por meio da cartografia, quaisquer pesquisas (ambientais, socioeconômicos, educacionais, etc.) podem ser representados espacialmente, retratando o território estudado, facilitando a compreensão, além de abrir campo para mais conclusões e correspondências com outros aspectos ou regiões.

Ao longo da história podemos perceber também que os mapas, como meios de representação, expõem os interesses e objetivos de quem os desenvolve, podendo se aproximar ou se afastar da realidade representada (propositalmente ou não). Além disso, enfrentam as limitações e distorções que inevitavelmente surgem quando da transposição da realidade para o plano.

Este trabalho foi inspirado no artigo *Some Properties Related to Mercator Projection* [7], onde foi apresentado, de modo elegante, os principais resultados aqui desta-

lhados. Os mesmos são raramente encontrados na literatura matemática, como afirma Wim Pijls em seu trabalho, a despeito da relação destes com mapas. Portanto temos a intenção de demonstrar e evidenciar esta aplicação, fornecendo um texto de fácil leitura, em língua portuguesa, que auxilie no ensino da função exponencial complexa e no conceito de curvas, especialmente a curva tractrix.

2 Gerardus Mercator e a Cartografia

As informações descritas neste capítulo foram retiradas de um artigo publicado em 2003 pela revista de geografia da UFC, cujo autor, Prof. Ms. Jörn Seemann da Universidade Regional do Cariri (URCA), descreve com clareza a biografia de Gerardus Mercator, e sua contribuição para a cartografia [10]. Os fatos descritos a seguir nos fazem compreender o que vai além da projeção, neste contexto somos capazes de compreender os diferentes modos que a cartografia pode intervir na sociedade, não sendo apenas um instrumento de localização, mas também para estudos socioeconômicos e políticos, podendo tornar-se algo influenciador, capaz de mover uma sociedade, capaz de unir ou causar divergências, tudo depende do critério utilizado na construção do mapa.

Gerard de Cremer (latinizado Gerardus Mercator) nasceu em 5 de março de 1512 como sétimo filho de um sapateiro pobre em Rupelmonde na região de Flandres (hoje Bélgica) perto do porto de Antuérpia. Em virtude da situação financeira precária em 1526 (inclusive impostos exorbitantes para financiar a guerra entre os Habsburgos e a França) e sob a influência do seu tio Gisbert, Gerardus foi mandado para s'-Hertogenbosch para seguir carreira na igreja (como dois dos seus irmãos mais velhos) e ser educado pelos Irmãos da vida comum (*Fratis vitae comunis*), uma organização religiosa fundada na Holanda na segunda metade do século XIV que pregava uma forma não dogmática da fé, encorajando seus seguidores a buscar a salvação e espiritualidade através de atos piedosos e caridade.

Em 1530, Mercator matriculou-se na Universidade de Louvain para o curso de Humanidades e Filosofia e se formou em 1532, porém o mesmo não se identificou com o curso e desistiu de seguir carreira, logo para se encontrar fez várias viagens, o que provocou um interesse profundo pela Geografia que ele considerou como disciplina que

podia explicar melhor a estrutura do mundo que Deus criou [4].

Em 1534, Mercator voltou para Louvain para estudar Matemática que ele queria aplicar na cosmografia e se tornou aluno e assistente de Gemma Frisius (1508-1555), matemático, astrônomo e construtor de globos, mapas e instrumentos astronômicos, e Caspar van der Heyden (Caspar à Myrica), gravador e ourives. Junto com a aprendizagem dessas artes, Mercator chegou a dar aulas de Matemática na universidade de Louvain, a mesma em que se formou em Humanidades e Filosofia. Entre 1535 e 1536, ele construiu um globo terrestre para o imperador Carlos V, utilizando blocos de cobre em vez de madeira para a impressão.

O primeiro mapa de Mercator (1537) pode ser visto como resultado da sua fé religiosa e sua crença nos milagres e revelações [4], tendo como tema a representação da Palestina, que também mostrava a viagem descrita no quarto livro de Moisés. No decorrer da sua vida, ele produzia inúmeros mapas (e o primeiro atlas), globos e até manuais de caligrafia. Muitos mapas foram encomendados pelos Habsburgos que foram as autoridades políticas absolutas. Destacam-se como exemplos o mapa de Flandres de 1540 (no qual Mercator corrigiu a impressão de uma região independente) e o mapa das Ilhas Britânicas (1564). Mercator não foi apenas cartógrafo, mas também se encarregava, junto com seus filhos, da comercialização dos seus mapas e atlas, dos quais, especialmente nas suas edições luxuosas, vendia quase todos [11].

Entre as obras principais, destacam-se o mapa-múndi cordíforme (em forma de dois corações) de 1538, o mapa da Europa (1554, projeção cônica e conforme com base em Ptolomeu), sua famosa projeção do mapa-múndi intitulada *Nova et aucta orbis terrae discriptio ad usum navigatium emendate acomodata* (Nova aumentada descrição da Terra com correções para o uso de navegação, 1569), mapas da França, Holanda e Alemanha (1585), seus atlas (1585, 1589 e, postumamente, 1595) e os mapas da Itália,

dos Balcãs e da Grécia (1589). Dois derrames (1590 e 1592) abalaram sua saúde e conseqüentemente sua produtividade e, no dia 2 de dezembro de 1594, um pouco depois das 11 horas, Mercator morreu em Duisburg.

2.1 Cartografia, a projeção de Mercator e sua herança

Diferente das representações cartográficas anteriores, como os mapas de Ptolomeu ou as cartas portulana do fim da Idade Média, o mapa-múndi de Mercator, de 1569, não usava uma malha de coordenadas aleatória, mas se baseava na matematização do real na qual Mercator concebia a Terra como uma esfera e não como superfície, o que permitiu traçar o sistema de coordenadas, em que o nível de distorção esteja matematicamente e antecipadamente controlado. [9]

A projeção não foi elaborada para a simples representação do mundo, mas servia a finalidades práticas para a navegação. Tratando-se de uma projeção conforme (conservação dos ângulos entre os meridianos e paralelos no globo), a forma de qualquer pequena área, tanto no globo como no mapa, é a mesma, enquanto, dada a variação da escala no mapa, áreas extensas, sobretudo nas altas latitudes, são objeto de deformações consideráveis, por exemplo a Groenlândia e a América do Sul, pois aparentam ter a mesma área, mas, na verdade, a América do Sul é cerca de oito vezes maior do que a ilha no Atlântico do Norte.

Existem centenas de projeções cartográficas para a representação da superfície terrestre ou de uma parte dela, desde as projeções mais consagradas e usadas como a de Mercator ou de Lambert até as formas mais curiosas como corações, borboletas ou tatus. A utilização de uma determinada projeção depende das finalidades da representação, afinal de contas, não existem projeções ruins ou melhores, apenas há escolhas ruins [8].

A Cartografia e os seus mapas não estão longe da Geografia, sobretudo da Geografia Humana, na qual "cada estudo geográfico é uma representação do mundo e de práticas humanas, no sentido de uma representação mental que adquire seu significado dentro de um quadro de uma ideologia e de uma problemática"[2]. Dentro desta visão mais metafórica e simbólica do mapa e da representação, os geógrafos não apenas precisam pensar o espaço, mas também se manifestar sobre este, fazendo as suas próprias representações e mapas (num sentido mais amplo possível), que sempre terão distorções e deformações. Cientes das deformações, os geógrafos conseguirão viver com as projeções do mundo, tanto as concretas como, por exemplo, o mapa de Mercator, quanto as abstratas (mentais) que, juntas, são visões globais contestadas [3]. Esta discussão ajuda a compreender melhor as suas próprias projeções e os seus impactos. Mercator, como qualquer outro cientista (ou ser humano), deve ser compreendido no contexto social, religioso, econômico e político da sua época. A representação da realidade nunca é objetiva, ou, como observa Edney [5], "todos os mapas servem a um propósito mais amplo; fazer mapas não é uma atividade neutra divorciada das relações de poder de qualquer sociedade humana, no passado ou no presente; não existe uma maneira única nem necessariamente melhor de representar tanto o mundo social quanto o físico".



Figura 1: Projeção de Mercator

3 Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos os conteúdos básicos da Matemática necessários para a compreensão deste trabalho. Inicialmente apresentaremos a definição de coordenadas esféricas e sua relação com as coordenadas cartesianas. Em seguida, apresentaremos a definição e as principais propriedades da função exponencial complexa.

3.1 Coordenadas Polares

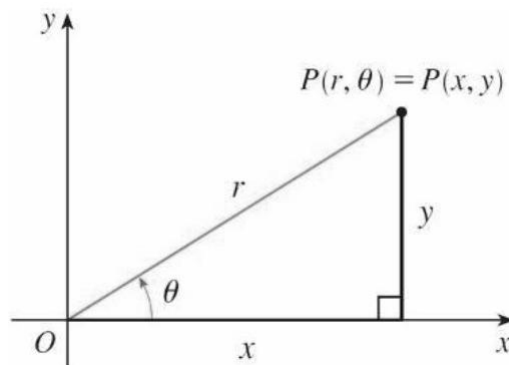


Figura 2: Coordenadas Polares

Será conveniente descrever o plano Cartesiano em coordenadas polares. Nesta seção, apresentamos este sistema de coordenadas e discutimos brevemente sua relação com as coordenadas Cartesianas. O plano cartesiano é o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Agora descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado sistema de coordenadas polares. Escolhemos um ponto no plano, chamado polo (ou origem), e o denotamos por O . Traçamos um segmento de reta a partir do ponto O chamado eixo polar. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo Ox positivo nas coordenadas cartesianas.

Sejam P um ponto no plano, $r > 0$ a distância de O até P e seja θ o ângulo entre o eixo polar e a reta \overleftrightarrow{OP} , como na Figura 2. Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) , chamados coordenadas polares P . Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ .

Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) , então, a partir da figura, temos

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \text{sen } \theta &= \frac{y}{r}.\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \text{sen } \theta.\end{aligned}$$

Em particular,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3.2 Coordenadas Esféricas

O ambiente geométrico discutido neste trabalho é o espaço Euclidiano tridimensional

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Na construção de mapas, identificamos o planeta terra com uma esfera do \mathbb{R}^3 . Uma esfera de raio $r > 0$ com centro na origem de \mathbb{R}^3 é o conjunto $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{S}^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}. \quad (1)$$

A esfera de raio $r = 1$ é denotada simplesmente por \mathbb{S}^2 . Note que $\mathbb{S}^2(r)$ é o conjunto solução da equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Para $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ denotamos $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Assim, $v \in \mathbb{S}_r^2$ se, e somente se, $\|v\| = r$.

Geometricamente, o sistema de coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 associa a cada $P \in \mathbb{R}^3$ uma terna (x, y, z) de números reais, onde x é a projeção de P sobre o eixo Ox , y é a projeção de P sobre o eixo Oy e z é a projeção sobre de P o eixo Oz (ver Figura 3). Nas coordenadas esféricas associamos a cada ponto $P \in \mathbb{R}^3$ uma terna (ρ, θ, ψ) tal que $0 \leq \rho, 0 \leq \theta < 2\pi$ e $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ definidos da seguinte forma (ver Figura 3): ρ é a distância de P à origem ($\rho = \|P\|$); θ é o ângulo, medido em radianos e no sentido anti-horário, entre a projeção sobre o plano Oxy do segmento \overline{OP} e eixo Ox ; ψ é o menor ângulo, medido em radianos, entre o segmento \overline{Op} e o eixo Oz . O ângulo θ é denominado *longitude* de P e ψ é denominado de latitude do ponto P .

Segue da definição das funções trigonométricas que as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas esféricas (ρ, θ, ψ) de um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ estão relacionadas pelas equações

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \operatorname{sen} \psi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ z &= \rho \cos \psi. \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto podemos definir o polo norte e o polo sul da seguinte forma, Polo Norte, em coordenadas cartesianas $N = (0, 0, 1)$ e em coordenadas esféricas: $N = (1, 0, 0)$, e o Polo Sul em coordenadas cartesianas $S = (0, 0, -1)$ e em coordenadas esféricas: $S = (1, 0, \pi)$

Uma propriedade fundamental das coordenadas esféricas é a seguinte: a equação

que define a esfera de raio $r > 0$ é bastante simples. De fato, temos $(\rho, \theta, \psi) \in \mathbb{S}^2(r)$ se, e somente se, $\rho = r$. Em particular, a esfera unitária \mathbb{S} é definida por

$$\rho = 1.$$

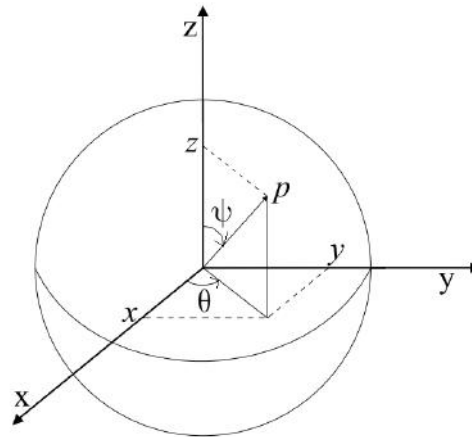


Figura 3: Coordenadas Esféricas

3.3 A função exponencial complexa

Os conteúdos aqui apresentados podem ser encontrados em [6]. Inicialmente vamos fixar algumas notações. O conjunto dos números complexos \mathbb{C} é o conjunto

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

munido com as operações de adição e multiplicação dadas por

$$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b) \quad \text{e} \quad (x + iy) \cdot (a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya).$$

Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ denotamos $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$. Chamamos $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$, respectivamente, de parte real e parte imaginária de z . As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:

- (a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ (associatividade da adição)
- (b) $z + w = w + z$ (comutatividade da adição)
- (c) $0 + z = z$ (elemento neutro)
- (d) $z + (-z) = 0$ (elemento oposto)
- (e) $z(wt) = (zw)t$ (associatividade da multiplicação)
- (f) $zw = wz$ (comutatividade da multiplicação)
- (g) $1 \cdot z = z$ (elemento unidade)
- (h) $z \cdot z^{-1} = 1$ se $z \neq 0$ (elemento inverso)
- (i) $z(w + t) = zw + zt$ (distributividade da multiplicação em relação à adição).

O valor absoluto (ou módulo) de um número complexo $z = x + yi$ é definido por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Graficamente, o número real $|z|$ nos dá o comprimento do vetor correspondente a z no plano complexo (Figura 4).

Identificamos \mathbb{C} com o plano cartesiano \mathbb{R}^2 de forma natural, associando $z = x + iy$ ao ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Neste contexto, ao representarmos um número complexo z no plano com coordenadas polares obtemos a chamada *representação polar* de $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

onde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ é o ângulo formado no sentido anti-horário entre o segmento que liga à origem ao ponto z e o eixo real Ox (ver figura 4).

No intuito de motivar a definição de função exponencial em \mathbb{C} , lembremos do Cálculo que a expansão em série de Taylor de em torno do zero para e^t , t real, é

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

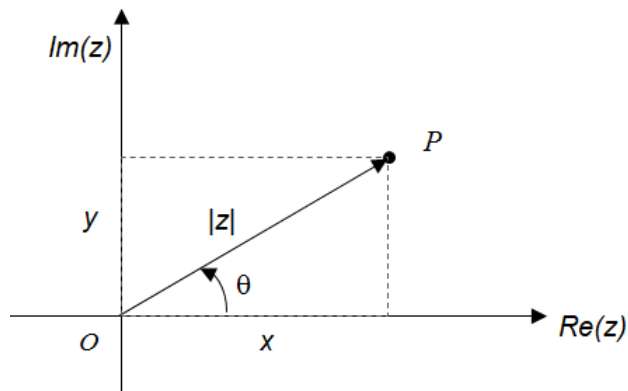


Figura 4: Representação Polar

Substituindo t por iy ($y \in \mathbb{R}$) nesta série, obtemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{-y^2}{2!} + \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{-y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!}\right) + i \left(y + \frac{iy^3}{3!} + \frac{-y^5}{5!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Essas expansões em série de Taylor de $\cos y$ e de $\sin y$, respectivamente. Portanto temos que, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Além disso, como $e^{s+t} = e^s e^t$ se $s, t \in \mathbb{R}$, temos na função exponencial complexa $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Motivados por estas considerações, damos a seguinte definição

Definição 1. A função exponencial complexa é a aplicação $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\exp z = \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

onde e^x é a função exponencial real.

Note que $|\exp(z)| = e^x \forall z = x + yi \in \mathbb{C}$. Assim

$$\exp z \neq 0 \tag{3}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Uma outra propriedade importante da função exponencial é que ela é periódica de período 2π , isto é,

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \forall z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Note ainda que a função exponencial complexa estende a função exponencial real. De fato,

$$\exp(x) = \exp(x + iy) = e^x(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x.$$

Note ainda que, como $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ e $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$, segue que

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad (5)$$

e

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (6)$$

3.4 Curvas Planas

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma aplicação diferenciável γ é dita uma *curva parametrizada diferenciável* se

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

O conjunto-imagem de γ , $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$, é dito, então, o *traço* de γ . Em coordenadas cartesianas, γ se expressa como

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in I,$$

onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções diferenciáveis de t , cujas derivadas indicaremos por x' e y' , respectivamente.

O vetor $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)), t \in I$, é dito o *vetor tangente* (ou vetor velocidade) de γ em t . Diz-se, então, que γ é regular, quando $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in I$. Nesse caso, define-se a *reta tangente* de γ em $t \in I$, como aquela que contém $\gamma(t)$ e é paralela ao vetor $\gamma'(t)$.

Chamaremos simplesmente de curva regular a toda curva parametrizada diferenciável e regular.

Definição 2. (Traço de uma curva parametrizada) Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. O conjunto imagem $Im(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$ é chamado traço de γ .

Definição 3. (Vetor tangente) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente de γ em $t \in I$ é definido por

$$\begin{aligned} (\gamma)' : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x'(t), y'(t)) \end{aligned}$$

A velocidade escalar de γ em $t \in I$ é a norma do vetor tangente $\gamma'(t)$ e tem-se

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Definição 4. (Vetor aceleração) O vetor aceleração de γ em $t \in I$ é a primeira derivada do vetor tangente de γ e tem-se

$$\begin{aligned} \gamma'' : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x''(t), y''(t)) \end{aligned}$$

Definição 5. (Curva Regular) Uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular, se $\|\gamma'(t)\| \neq 0, \forall t \in I$ onde as funções $x'(t)$ e $y'(t)$ são contínuas, isto é, $\gamma(t)$ é de classe C^1 .

Definição 6. (Reta Tangente) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular. A reta tangente a γ em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\gamma(t_0)$ na direção de $\gamma'(t_0)$, isto é,

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1. : A catenária definida por:

$$\begin{aligned} \gamma :]-2, 2[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (t, \cosh(t)) \end{aligned}$$

É uma curva parametrizada diferenciável, simples e regular.

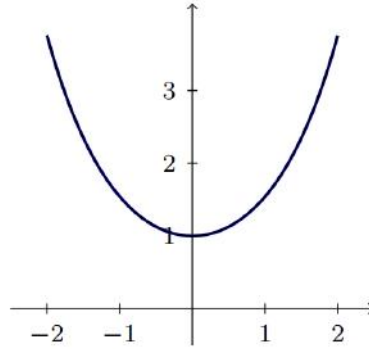


Figura 5: Catenária

4 Projeção de Mercator

A Projeção de Mercator mapeia uma esfera no plano. Precisamente, a projeção transforma a esfera unitária \mathbb{S}^2 , sem os polos, N e S definidos anteriormente, em um subconjunto U do plano cartesiano \mathbb{R}^2 dado por

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < y < \pi\}. \quad (7)$$

Em coordenadas esféricas, os pontos da esfera unitária tem coordenada ρ constante $\rho = 1$. Portanto podemos mapear a esfera (globo terrestre) utilizando apenas duas coordenadas esféricas (θ, ψ) que, neste caso, são a longitude e latitude, respectivamente. Note que, removendo os polos, teremos que $0 \leq \theta < 2\pi$ e $-\pi/2 < \psi < \pi/2$.

A seguir, descrevemos geometricamente como a Projeção de Mercator é construída. A projeção associa um ponto $Q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, onde N e S denotam os polos norte e sul, ao ponto $Q \in U$ da seguinte forma:

1° Passo: Considere um cilindro tangente em torno da esfera de tal forma que o equador se torne o círculo tangente.

2° Passo: Projete cada ponto P da esfera em um ponto Q' do cilindro, de modo que a reta que contém os pontos P e Q' passe pela origem.

3° Passo: Mova Q' para baixo ao longo de uma linha descendente para um ponto Q , a distancia percorrida pelo ponto será definida posteriormente. Veja a Figura 6.

4° Passo: O passo final é desenrolar o cilindro em um plano.

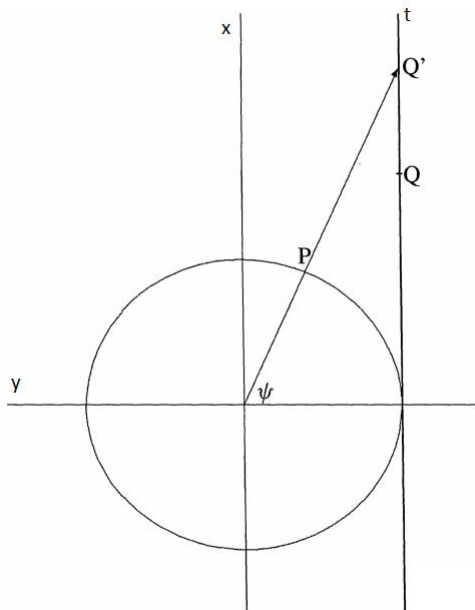


Figura 6: Projeção de Mercator - Perfil

Uma vez que desenrolamos o cilindro em um plano, passamos suas coordenadas espaciais para coordenadas cartesianas, porém iremos tomar o eixo Oy corresponde ao equador (eixo horizontal) e o eixo Ox corresponde a uma linha vertical na superfície do cilindro, logo a reta t , na Figura 6, é uma linha paralela ao eixo Ox no plano cartesiano. Embora, em geral, o eixo Ox seja definido como uma linha horizontal, fizemos essa escolha incomum, pois resultará em fórmulas mais elegantes.

Note que a projeção leva um ponto da esfera \mathbb{S}^2 a um ponto do subconjunto U do plano, ou seja, a Projeção de Mercator é uma aplicação

$$P_M : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow U$$

cujas funções coordenadas são denotadas por

$$P_M(\theta, \psi) = (x(\theta, \psi), y(\theta, \psi)).$$

Observamos ainda que se ψ denota a latitude do ponto P , se tomarmos o círculo C_ψ da esfera definido pela latitude ψ (ou seja, C_ψ é a interseção da esfera com o plano que é paralelo ao plano Oxy e passa pelo ponto P). Então o raio de C_ψ é igual a $\cos \psi$. O círculo C_ψ é aplicado pelo 2º passo da Projeção de Mercator P_M no círculo paralelo C_x de altura $x = x(\psi)$ no cilindro: $P_M(C_\psi) = C_x$. (veja a Figura 7). O círculo C_x no cilindro tem o mesmo raio ($= 1$) do equador da esfera \mathbb{S}^2 . Portanto, a razão entre o raio dessas circunferências é dado por

$$\frac{\text{Raio da circunferência } C_x}{\text{Raio da circunferência } C_\psi} = \frac{1}{\cos \psi}. \quad (8)$$

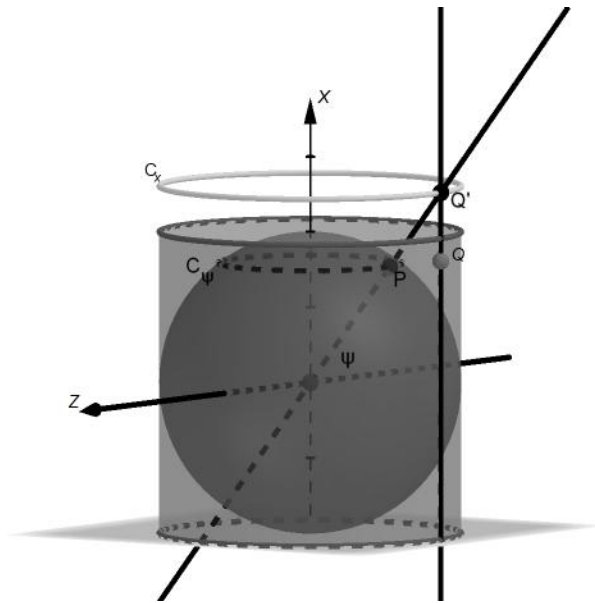


Figura 7: Projeção de Mercator

Observe que para qualquer arco em C_ψ , o comprimento do segmento imagem no cilindro e comprimento do arco original no globo possuem a mesma proporção (8).

Observe que no triângulo $OQ'x(\psi)$, mesmo que o ângulo ψ seja alterado, o raio do cilindro será 1 e o raio da circunferência C_ψ será $\cos \psi$, mantendo a proporção. A ideia básica por trás da Projeção de Mercator é mapear P em um ponto Q do cilindro, de modo que a relação em (8) seja verdadeira localmente ao longo do eixo Ox (o eixo norte-sul). Temos este objetivo para que a função seja conforme, ou seja mantenha os ângulos. Portanto para isso é necessário que, na latitude ψ , tenhamos

$$\frac{x(\psi + \Delta\psi) - x(\psi)}{\Delta\psi} = \frac{1}{\cos \psi}$$

e portanto, por definição de derivada, devemos ter

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{1}{\cos \psi}. \quad (9)$$

A construção acima permite concluir que o mapeamento é conforme no sentido usual de preservar os ângulos. Em particular, a perpendicularidade das linhas de latitude e longitude é claramente preservada e, sob a condição (9), os comprimentos norte-sul e leste-oeste (infinitesimais) são alterados pelo mesmo fator em cada ponto. Uma vez que o equador corresponde ao eixo Oy , temos a condição inicial $x(0) = 0$ para a equação diferencial (9). Tomando esta condição inicial em conta e as identidades

trigonométricas, obtemos

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{d\psi}{\cos \psi} \\
 &= \frac{d\psi}{\operatorname{sen} \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right)} \\
 &= \frac{d\psi}{\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen} \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right)} \\
 &= \frac{d\psi}{2 \cos \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \\
 &= \frac{d\psi}{2 \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \\
 &= \frac{\sec^2 \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} d\psi \\
 &= \frac{d}{d\psi} \left(\ln \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

Integrando a igualdade acima e utilizando que $x(0) = 0$, recebemos

$$x = \ln \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right). \quad (10)$$

Portanto, (10) é uma solução de (9). Como foi descrito anteriormente na projeção de Mercator os ângulos não são alterados, temos que um ponto com longitude θ na esfera também tem coordenada $y = \theta$ no eixo Oy . Assim, as funções coordenadas da projeção de Mercator são dadas por

$$x = x(\theta, \psi) = \ln \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (11)$$

$$y = y(\theta, \psi) = \theta \quad (12)$$

ou seja,

$$P_M(\theta, \psi) = \left(\ln \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right), \theta \right).$$

Será útil utilizar a seguinte expressão alternativa (11):

$$x = \operatorname{senh}^{-1}(\tan \psi). \quad (13)$$

Para verificar a equivalência, observamos que

$$\begin{aligned}
 \tan\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{cos}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{cos}\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cos}\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cos}\left(\frac{\psi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} + \operatorname{cos}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{cos}\frac{\psi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} + \operatorname{cos}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{cos}\frac{\psi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} + \operatorname{cos}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{cos}\frac{\psi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} \cdot \frac{\operatorname{cos}\frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{cos}\frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\psi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}\operatorname{cos}\frac{\psi}{2} + \operatorname{cos}^2\frac{\psi}{2}}{\operatorname{cos}^2\frac{\psi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\psi}{2}} \\
 &= \frac{(\operatorname{sen}^2\frac{\psi}{2} + \operatorname{cos}^2\frac{\psi}{2}) + 2\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}\operatorname{cos}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{cos}2\left(\frac{\psi}{2}\right)} \\
 &= \frac{1 + \operatorname{sen}2\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\operatorname{cos}\psi} = \frac{1 + \operatorname{sen}\psi}{\operatorname{cos}\psi} = \frac{1}{\operatorname{cos}\psi} + \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{cos}\psi} \\
 &= \sec\psi + \tan\psi.
 \end{aligned}$$

E segue que

$$\begin{aligned}
 x &= \ln(\sec\psi + \tan\psi) = \ln\left(\sqrt{\sec^2\psi} + \tan\psi\right) \\
 &= \ln\left(\sqrt{\tan^2\psi + 1} + \tan\psi\right) = \operatorname{senh}^{-1}(\tan\psi).
 \end{aligned}$$

A expressão acima, é chamada de função Gudermanniana, representada por

$$x = gd^{-1}(\psi),$$

onde gd denota a chamada função Gudermanniana, chamada assim em homenagem a Christoph Gudermann (1798 - 1852).

5 Projção de Mercator e a exponencial complexa

Nesta seção, mostraremos que a função complexa está relacionada à projeção de Mercator. A fim de estabelecer essa relação, discutimos outro método de mapeamento da esfera.

5.1 Projção estereográfica

A projeção estereográfica é uma aplicação que transforma a esfera sem o polo norte N , em um no plano equatorial. Para dar uma definição matematicamente precisa, considere um plano V que corta o globo, de modo que a linha do equador é a interseção do plano com o globo (novamente tomamos a esfera de raio 1), desse modo o pólo norte, passa a ser o centro da projeção. Neste caso usaremos as coordenadas polares (r, θ) em V , então, um ponto $P = (\lambda, \psi)$ na esfera é mapeado em um ponto $R = (r, \theta)$ do plano como mostra a figura 8. Para explicitar a relação entre P e R considere o triângulo ONP descrito na figura 8. ONP é isósceles pois o segmento $ON = OP = 1$, desse modo o ângulo $NOP = \pi - 2\gamma$, e como $\psi + NOP = \pi/2$, temos

$$\gamma = \psi/2 + \pi/4$$

Observe também que $r = ON \cdot \tan \gamma = \tan \gamma$. Portanto a correspondência entre P e R é dada por

$$\begin{aligned} r &= \tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ \theta &= \lambda. \end{aligned} \tag{14}$$

Em particular, se denotarmos por $P_E : \mathbb{S}^2 \setminus N \rightarrow V \equiv \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica então

$$P_E(\lambda, \psi) = \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \lambda \right)$$

em coordenadas polares.

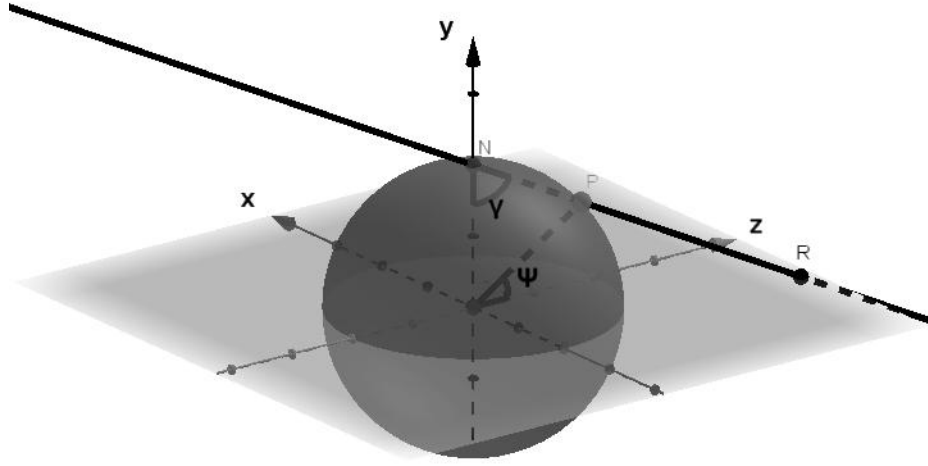


Figura 8: Projecção estereográfica

5.2 Projecção de Mercator vs. projecção estereográfica

Considere um ponto $P = (\lambda, \psi)$ na esfera. A projecção estereográfica mapeia a esfera (exceto o polo norte) no plano bidimensional V , o polo sul corresponde à origem 0 em V , como mencionado no capítulo 4, a projecção de Mercator mapeia a esfera (exceto o polo norte e o polo sul) em um subconjunto U definido por (7). Segue-se que existe um mapeamento 1-1 entre o conjunto U e o conjunto $V \setminus \{O\}$ (o plano Oxy bidimensional com a origem removida). Denotaremos esse mapeamento por F , ou seja, F é a relação existente entre as projecções de Mercator e a estereográfica. Veja a figura ??, que exhibe as relações entre um ponto $P = (\lambda, \psi)$ na esfera, sua imagem $Q = (x, y)$ sob a projecção de Mercator, e sua imagem $R = (r, \theta)$ sob projecção estereográfica. As funções coordenadas de são obtidas a partir das relações entre Q e R , a saber:

$$\begin{aligned} r &= e^x \\ \theta &= y. \end{aligned} \tag{15}$$

Para deduzir a expressão acima aplicamos a função exponencial real à igualdade (10) e aplicamos (14). A segunda igualdade é obtida diretamente de (12) e (14).

Podemos descrever F como uma função composta em termos da inversa da projeção estereográfica P_E^{-1} restrita ao conjunto U e da projeção de Mercator P_M :

$$F = P_M \circ P_E^{-1} : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

5.3 As projeções e a exponencial complexa

Utilizando a identificação natural entre o plano cartesiano \mathbb{R}^2 e o conjunto dos números complexos \mathbb{C} podemos descrever o conjunto U como

$$U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y < \pi\}.$$

Analogamente, identificando V com \mathbb{C} a imagem do mapeamento F corresponde ao subconjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Como uma função complexa, F transforma um valor $z = x + iy$ em U em um valor w em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em coordenadas polares, temos

$$F(z) = w = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

Portanto a seguinte relação segue imediatamente da definição de função exponencial complexa

$$F(z) = \exp z. \tag{16}$$

Observação: Este resultado não é surpreendente do ponto de vista da análise complexa. Uma vez que tanto a projeção estereográfica quanto a de Mercator são conformes, o mesmo acontece com F . Como F preserva a orientação. Assim, F é uma função mapa holomorfa, conforme no sentido da variável complexa a partir da faixa $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y < \pi\}$ para $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Note que $z \rightarrow \exp z$ é a aplicação conforme padrão.

6 Projeção de Mercator e a curva tractrix

Neste capítulo apresentamos uma relação entre a projeção de Mercator e a curva tractrix. Inicialmente, apresentamos uma parametrização da curva tractrix. Em seguida, discutimos a relação desta com a projeção de Mercator.

6.1 A curva tractrix

A curva tractrix pode ser introduzida a partir da interpretação de um fenômeno físico. Vamos seguir esta interpretação para introduzi-la. Suponha que um objeto está localizado na origem do plano e que esteja conectado por uma corda de comprimento 1 a uma pessoa localizada no ponto $(1, 0)$. Quando a pessoa caminha para cima (no primeiro quadrante) ao longo da reta $x = 1$, veja a figura 9, o objeto move-se e sua trajetória é chamada de *tractrix*. No intuito de obter uma parametrização para tractrix vamos denotar por ψ o ângulo formado pela reta tangente à curva e o eixo Ox . Vamos obter uma parametrização em termos de ψ :

$$\alpha(\psi) = (x(\psi), y(\psi)).$$

A inclinação da tangente à curva é dada por dy/dx e também como por $\tan \psi$. Assim

$$\frac{dy}{dx} = \tan \psi.$$

Por outro lado, como o movimento do objeto na direção horizontal depende do deslocamento da pessoa que realizado unicamente na vertical, podemos expressar $x = x(\psi)$ em termos de $y = y(\psi)$, obtendo $x = x(y(\psi))$. Aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\psi}. \quad (17)$$

Utilizando então que $x = 1 - \cos \psi$ obtemos a equação

$$\frac{dy}{d\psi} = \tan \psi \cdot \sin \psi = \frac{1}{\cos \psi} - \cos \psi, \quad (18)$$

A condição inicial para a equação acima é $y(0) = 0$. Podemos resolver a equação acima de maneira similar à realizada para obtenção de (10), obtendo a seguinte representação paramétrica da tractrix

$$\begin{aligned} x &= 1 - \cos \psi \\ y &= \ln \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \sin \psi. \end{aligned} \quad (19)$$

A partir da seção 3.4, podemos afirmar que a curva tractrix é uma curva parametrizada diferenciável e simples. Temos também que ela não é regular pois a derivando obtemos

$$\left(\sin \psi, \frac{\sec^2 \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} - \cos \psi \right)$$

Observe que para $\psi = \frac{\pi}{2}$ $x'(\psi) = 0$ e $y'(\psi) = 0$, portanto a curva não é regular

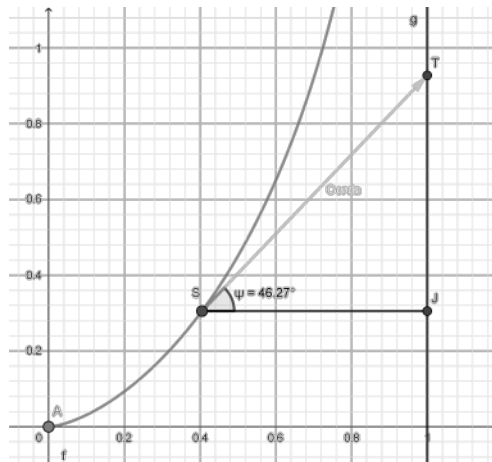


Figura 9: A curva tractrix

6.2 Relação com a projeção de Mercator.

Inicialmente, vamos denotar o que cuja trajetória descreve a tractrix por S . De acordo com a situação construída na seção anterior, podemos descrever o posição da

pessoa arrastando o por $T(\psi) = (1, T(\psi))$, veja novamente a figura 9. Como a corda tem comprimento 1, adicionamos o vetor unitário $(\cos \psi, \sin \psi)$ às coordenadas de S produz as coordenadas de T . Assim, as coordenadas de T são

$$x = 1 \tag{20}$$

$$y = \ln \left(\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \tag{21}$$

Comparando a equação acima com (10) vemos que o ponto T na figura 9 é o mesmo ponto que Q na figura 6. Assim, T é também a imagem sob a projeção de Mercator de um ponto P com coordenadas $(\cos \psi, \sin \psi)$ no círculo unitário. Concluimos que, para um ponto no globo com latitude ψ , sua posição vertical em um mapa de Mercator é idêntica a posição da pessoa em movimento no momento em que o ângulo entre a corda esticada e a horizontal é igual a ψ .

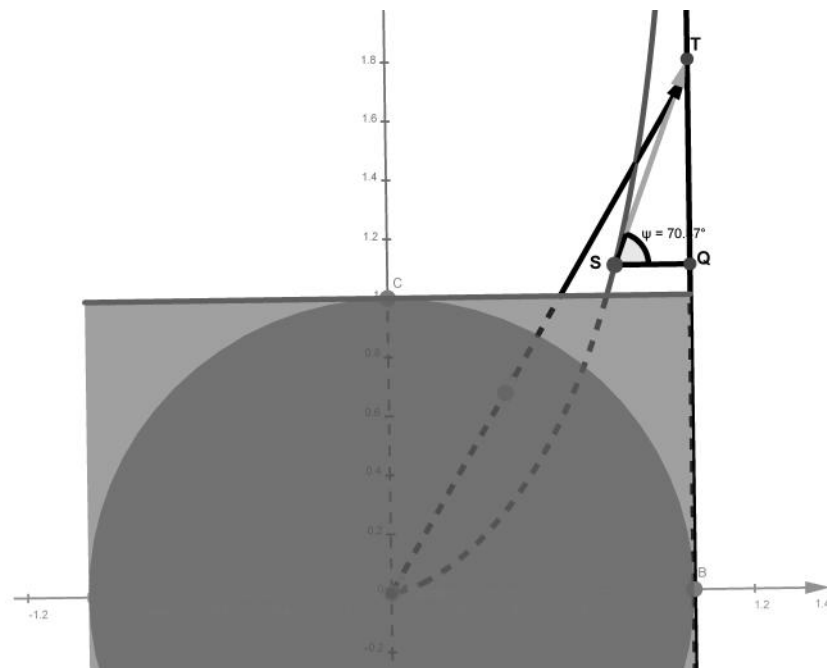


Figura 10: O Tractrix e Projeção de Mercator

7 Conclusão

A projeção de Mercator está intrinsecamente relacionada a cartografia. Dado o interesse natural pela aplicação prática da ciência cartográfica relacionar a projeção de Mercator a outros conceitos matemáticos constitui uma forma de agregar interesse a estes conceitos. Neste trabalho, fornecemos uma descrição detalhada da relação entre a projeção de Mercator e a curva tractrix. Buscamos assim dar uma contribuição para o ensino dos conceitos de função exponencial complexa e apresentar um aspecto interessante da curva tractrix.

Podemos concluir a necessidade de mais trabalhos sobre a curva Tractrix, pois a mesma foi um tema discutido por diversos matemáticos, como Leibniz, Newton, dentre outros. A mesma possui diversas propriedades e variadas aplicações, como o cálculo da trajetória de um avião relacionada a força do vento, o formato da catenária, forma da curva formada por um fio suspenso entre dois pontos, etc. Historicamente o problema da Tractrix (latim - trahere arrastar) proposto a Leibniz em 1670, pelo arquiteto francês Claude Perrault, que usando seu relógio de bolso, arrastou a corrente para assegurar que o seu fim movia-se ao longo de uma linha reta, também trabalhado por Isaac Newton (1676) e Christiaan Huygens (1692).

Referências

- [1] IBGE; **Atlas geográfico escolar.**, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [2] BAILLY, ANTOINE S.; **La géographie humaine. Introduction.** In: Bailly, Antoine S. Les concepts de la géographie humaine. 3a edição. Paris: Masson, 1995, p.17-21
- [3] COSGROVE, DENIS.;Contested Global Visions: One-World, Whole-Earth, and theApollo Space Photographs. **Annals of the Association of American Geographers**, v.84, n.2, p.270-294, 1994.
- [4] O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F. **Gerardus Mercator.** St. Andrews, 2002.Disponível em http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Mercator_Gerardus.html, acesso em 25.08.2002
- [5] EDNEY, MATTHEW H.; Cartography without progress: reinterpreting the nature and historical development of mapmaking. **Cartographica**, v.30., n.2-3, p.54-68, 1993.
- [6] FERNANDEZ, CECÍLIA S. "**Estudo de algumas funções complexas de uma variável complexa: aspectos algébricos e geométricos.**" (2011).
- [7] PIJLS, WIM; **Some Properties Related to Mercator Projection**, The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 6 (Jun. - Jul., 2001), pp. 537-543, Published by: Mathematical Association of America; Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/2695708> .
- publicado pela revista, Mercator - Revista de Geografia da UFC, Cariri, 2003

- [8] ROBINSON, ARTHUR H.; **Elements of Cartography**, 2^a ed. Londres: John Wiley e Son, 1963
- [9] SANTOS, DOUGLAS. **A reinvenção do espaço. Diálogos em torno da construção do significado de uma categoria**. São Paulo: Editora UNESP, 2002.
- [10] SEEMANN, JÖRN. **MERCATOR E OS GEÓGRAFOS: em busca de uma "projeção" do mundo**. Mercator, v. 2, n. 3, 2003.
- [11] WINTLE, MICHAEL. **Renaissance Maps and the Construction of the Idea of Europe**. Journal of Historical, Geography, v.25, n.2, p.137-165, 1999