UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FRANCISCO AIRTON ALVES DE SOUSA

TEOREMA DE PAPPUS: UMA ABORDAGEM AO CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

FRANCISCO AIRTON ALVES DE SOUSA

TEOREMA DE PAPPUS: UMA ABORDAGEM AO CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S696t Sousa, Francisco Airton Alves de.

Teorema de Pappus: uma abordagem ao cálculo de áreas e volumes/ Francisco Airton Alves de Sousa. – 2018.

86 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves.

1. Teoremas de Pappus. 2. Superfícies de revolução. 3. Sólidos de revolução. I. Título.

CDD 519.2

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Teorema de Pappus: Uma Abordagem ao Cálculo de Áreas e Volumes

Francisco Airton Alves de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 30 de outubro de 2018.

Banca Examinadora

Francisco Pereira Chaves

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves - UFCA

Orientador

Francisco de Assis Benjamim Filho

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho- UFCA

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Junior - UFCA

Dedico este trabalho a minha filha Mabely Sophia Ferreira Alves, aos meus pais João Santino de Sousa e Antônia Carmina de Sousa e aos demais familiares e amigos pelo carinho, apoio e incentivo em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por dar-me saúde, força, ânimo e perseverança, para vencer os inúmeros obstáculos enfrentados durante toda esta longa caminhada.

Aos meus pais que sempre me apoiaram para seguir em frente e nunca desistir.

A família e amigos que, além de incentivar sempre me ajudaram.

Aos meus colegas de Mestrado pelo companheirismo durante todo o período em que estivemos a aprender juntos.

Aos professores do programa PROFMAT, campus UFCA, Juazeiro do Norte-CE, por terem dado suas valiosas contribuições durante o curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo apoio financeiro junto ao programa PROFMAT.

Ao professor orientador Dr. Francisco Pereira Chaves, pela dedicação na brilhante orientação deste trabalho.

Aos meus colegas de trabalho que sempre me apoiaram e incentivaram nessa jornada que estamos a vencer.

Por fim, a todos que contribuíram para este trabalho de modo direto e indireto.

"Aquilo que há de melhor na matemática deve ser assimilado como parte do pensamento diário e lembrado vezes e vezes seguidas, com interesse sempre renovado." (Bertrand Russell.)

RESUMO

A necessidade do homem quanto a sua subsistência resultou, desde a antiguidade, na busca pelo conhecimento matemático. A formalização do cálculo de áreas e volumes desafiou a humanidade desde os primeiros registros encontrados. Atualmente, esses conteúdos são rotineiramente cobrados em avaliações nacionais. Neste trabalho serão apresentados modelos para o cálculo de áreas e volumes usando os teoremas de Pappus. Estes teoremas simplificam o cálculo de áreas de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução. Faremos ainda algumas aplicações destes teoremas para calcular áreas de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução.

Palavras-chave: Teoremas de Pappus. Superfícies de revolução. Sólidos de revolução.

ABSTRACT

The need of man for his subsistence has, from antiquity, resulted in the search for mathematical knowledge. The formalization of the calculation of areas and volumes has challenged mankind since the first records found. Currently, these contents are routinely charged in national assessments. In this work will be presented models for the calculation of areas and volumes using the theorems of Pappus. These theorems simplify the calculation of areas of surfaces of revolution and volumes of solids of revolution. We will still make some applications of these theorems to calculate areas of surfaces of revolution and volumes of solids of revolution.

Keywords: Pappus theorems, Surfaces of revolution, Solids of revolution.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde muito tempo, o conhecimento matemático se desenvolve e grandes matemáticos de diversas gerações têm se dedicado constantemente a essa ciência. Dentre outros, a Geometria é um dos ramos da Matemática estudado desde os primórdios. De uma necessidade habitacional e de subsistência se fez necessário a aquisição de conhecimentos geométricos pela população durante toda a sua história. Segundo Eves [8], inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levaram a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes. A noção de distância foi um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples como retângulos, quadrados e triângulos. Outros conceitos geométricos simples como as noções de vertical, paralela e perpendicular, surgiram da necessidade de construção de muros e moradias (Eves [8]).

A Geometria é o ramo da Matemática que estuda o espaço e os objetos que o ocupam. A mesma mostra em forma de figuras uma diversidade de planificações que enaltece a percepção e diferenciação das formas quanto a suas características dimensionais, através dos conceitos da Geometria Espacial e é nessa área da Matemática que são explorados os conceitos de superfícies e sólidos. Descreveremos neste trabalho, através do método abordado, como tais conteúdos ganham sentido mais significativo, pois serão mostrados de maneira que leva ao leitor alto nível de compreensão, quebrando paradigmas de restringir a justificar resultados pré-submetidos.

Observações no dia a dia de objetos arredondados nos levou a indagar como poderiam ser calculadas suas respectivas áreas e seus respectivos volumes. Isso despertou nosso interesse por um estudo mais aprofundado sobre o tema.

Neste trabalho serão apresentados modelos de cálculos de áreas e volumes usando os Teoremas de Pappus com o objetivo de desenvolver técnicas que auxiliem o professor do Ensino Médio no conteúdo de Geometria Espacial como uma ferramenta a mais para o desempenho de seu trabalho docente, como também contribuir na formação de alunos dos cursos de graduação. Esses teoremas foram descobertos por Pappus de Alexandria por volta do ano 350 d.C.

Considerado um sucessor imediato de Euclides, Pappus de Alexandria deu grande contribuição para a Matemática. Segundo Paul Ver Eecke [7], ele nasceu na Grécia e consagrou-se como um dos últimos geômetras daquele povo. Viveu em Alexandria no final do terceiro século e princípios do quarto. Em parceria com Diofanto, representou bem a matemática grega no período conhecido como Idade de Prata da Universidade de Alexandria $(250-350)$. Sobre as obras de Pappus, o mesmo foi protagonista de um trabalho considerado o guia da Geometria, sua *Coleção Matemática*, em que uma visão histórica da Matemática é apresentada e as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e outras são discutidas. Relata Eecke, que a coleção é formada por uma combinação de oito livros, quase todos preservados, exceto o primeiro e parte do segundo. A coleção resgata e expande uma série de problemas clássicos como a generalização do Teorema de Pitágoras baseado na proposição dos elementos de Euclides e a capacidade matemática das abelhas ao construir as células de seus favos de mel. São também apresentados vários teoremas importantes como o teorema do centroide expressando áreas e volumes de objetos obtidos pela revolução de figuras planas, usando a noção de centro de gravidade.

Este trabalho está organizado da maneira a seguir. No Capítulo 1, será dado um enfoque introdutório sobre áreas, volumes e centros de massa. No Capítulo 2, apresentaremos uma demonstração dos Teoremas de Pappus para o cálculo de áreas de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução. No Capítulo 3, faremos uma abordagem dos Teoremas de Pappus através de ferramentas do Cálculo Integral. Finalmente, no Capítulo 4, faremos algumas aplicações dos teoremas desenvolvidos que mostram a praticidade e aplicabilidade de tais resultados.

Capítulo 1

ÁREAS E VOLUMES

Apresentaremos neste capítulo os conceitos introdutórios necessários para o desenvolvimento deste trabalho. As informações aqui descritas foram baseadas nas referências [1], [3], [4], [5], [6], [11], [12] e [13].

1.1 Áreas: Aspectos conceituais

A área de uma região no plano é determinada por um número positivo que de alguma forma indica seu tamanho. Para que um conceito de área tenha utilidade, postulamos que as seguintes propriedades sejam válidas:

1. Regiões congruentes têm áreas iguais;
2. Se uma região R é subdividida em um número finito de regiões menores sem pontos interiores em comum, então a área de R é a soma das áreas das regiões menores;
3. Se uma região R_1 está contida em uma região R_2, então a área de R_1 não é maior do que a área de R_2;
4. A área de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento é igual a 1 unidade quadrada.

1.2 Áreas de algumas regiões planas

A prática do cálculo de áreas é de fundamental importância pelas suas diversas aplicações em situações do cotidiano. É um conhecimento primordial e sempre presente na sociedade, pois é usado em um número gigantesco de situações. Citaremos nesta seção as áreas de algumas regiões planas, visto que usaremos tais regiões para revolucioná-las em torno de um eixo e formar um sólido e, a partir deste, encontrar seu volume. Dentre as figuras planas das quais calcularemos a área estão os triângulos, os quadriláteros e os círculos.

1.2.1 Retângulo

Podemos definir retângulo como um quadrilátero que possui quatro ângulos retos. Os lados opostos de um retângulo são paralelos e congruentes. Dois desses lados opostos são chamados de base e os outros dois de altura. A Figura 1.1 representa um retângulo de base b e altura h.

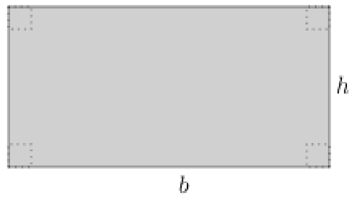

Figura 1.1: Retângulo

Teorema 1.2.1 *A razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes (respectivamente alturas congruentes) é igual à razão entre suas alturas (respectivamente bases).*

Demonstração: Sejam R_1 e R_2 dois retângulos de mesma base b, e alturas h_1 e h_2, conforme a Figura 1.2.

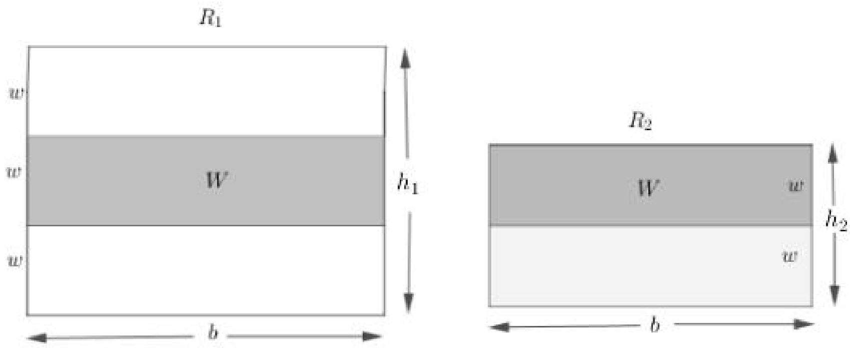

Figura 1.2: Retângulos de alturas comensuráveis

Suponhamos que as alturas h_1 e h_2 sejam comensuráveis, isto é, existe um segmento de comprimento w tal que, $h_1 = w \cdot p$ e $h_2 = w \cdot q$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Logo, a razão entre as alturas h_1 e h_2 é

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{w \cdot p}{w \cdot q} \\ \frac{h_1}{h_2} &= \frac{p}{q}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Seja W um retângulo de base b e altura w, como na Figura 1.2. Então $\text{Area}(R_1) = p \cdot \text{Area}(W)$ e $\text{Area}(R_2) = q \cdot \text{Area}(W)$. Assim, a razão entre as áreas dos retângulos é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} &= \frac{p \cdot \text{Area}(W)}{q \cdot \text{Area}(W)} \\ &= \frac{p}{q}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2), temos

$$\frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Suponhamos agora que as alturas h_1 e h_2 sejam incomensuráveis, como mostra a Figura 1.3.

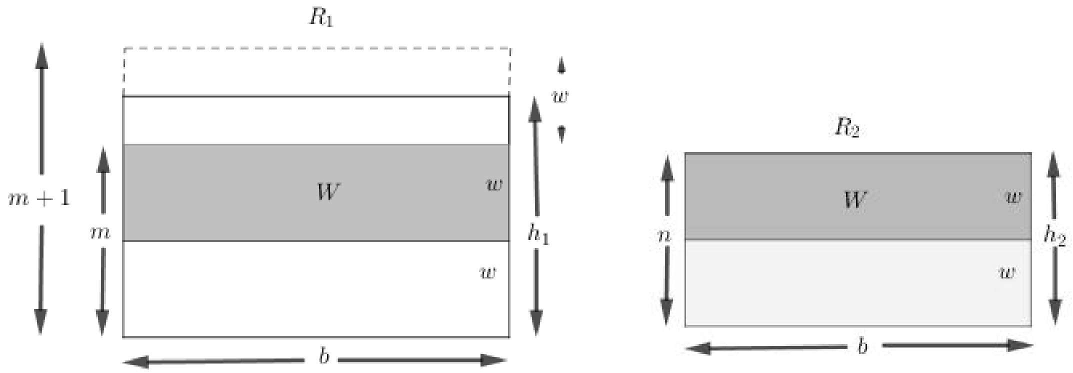

Figura 1.3: Retângulos de alturas incomensuráveis

Neste caso não existe submúltiplo comum às alturas h_1 e h_2. Assim podemos tomar um segmento de comprimento w tal que

$$h_2 = n \cdot w, \tag{1.3}$$

com $n \in \mathbb{N}$ e, como h_1 e h_2 são incomensuráveis, não existe um número inteiro m tal que $h_1 = m \cdot w$. Logo,

$$m \cdot w < h_1 < (m+1) \cdot w, \tag{1.4}$$

para algum número inteiro m. Assim, a partir de (1.3) e (1.4), temos

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot w}{n \cdot w} &< \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n \cdot w} \cdot w \\ \frac{m}{n} &< \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ainda considerando um retângulo W de base b e altura w, obtemos

$$m \cdot \text{Area}(W) < \text{Area}(R_1) < (m+1) \cdot \text{Area}(W) \tag{1.6}$$

e

$$\text{Area}(R_2) = n \cdot \text{Area}(W). \tag{1.7}$$

Dividindo (1.6) por (1.7), teremos

$$\frac{m}{n} < \frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} < \frac{m+1}{n}. \tag{1.8}$$

Afirmamos que $\dfrac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} = \dfrac{h_1}{h_2}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $\dfrac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} > \dfrac{h_1}{h_2}$. Dividindo, se necessário, o segmento de comprimento w em k inteiros segmentos congruentes, podemos admitir n arbitrariamente grande. Logo, existe um número inteiro n_0 tal que

$$n_0 > \frac{1}{\dfrac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} - \dfrac{h_1}{h_2}} \Rightarrow \frac{1}{n_0} < \frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} - \frac{h_1}{h_2}.$$

Também existe um $m_0 \in \mathbb{Z}$ que satisfaz

$$\frac{m_0}{n_0} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m_0+1}{n_0} \text{ e } \frac{m_0}{n_0} < \frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} < \frac{m_0+1}{n_0}. \tag{1.9}$$

Porém, se $\dfrac{m_0}{n_0} < \dfrac{h_1}{h_2}$, então

$$\frac{m_0+1}{n_0} = \frac{m_0}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{h_1}{h_2} + \frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} - \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{m_0+1}{n_0} < \frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)}.$$

O que contraria (1.9). Logo, $\dfrac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R_2)} = \dfrac{h_1}{h_2}$, concluindo assim a demonstração. ∎

Teorema 1.2.2 *A razão entre as áreas de dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas.*

Demonstração: Sejam R_1 e R_2 dois retângulos de bases b_1 e b_2 e alturas h_1 e h_2, respectivamente. Consideremos um outro retângulo R com base b_1 e altura h_2, conforme a Figura 1.4. Note que os retângulos R e R_1 possuem bases congruentes, assim como R e R_2 possuem alturas congruentes.

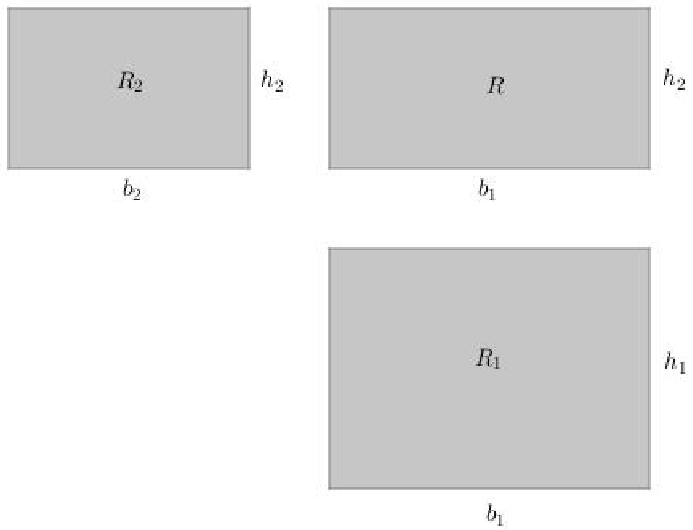

Figura 1.4: Retângulos R, R_1 *e* R_2

Pelo Teorema 1.2.1, temos que

$$\frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R)} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{Area}(R)}{\text{Area}(R_2)} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Multiplicando essas relações, temos

$$\frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R)} \cdot \frac{\text{Area}(R)}{\text{Area}(R_2)} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{b_1}{b_2}.$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(R)} = \frac{h_1 \cdot b_1}{h_2 \cdot b_2}.$$

■

Proposição 1.2.1 *A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura.*

Demonstração: Sejam R um retângulo de base b e altura h e Q um quadrado de lado 1 unidade. Pelo Teorema 1.2.2, a razão entre as áreas dessas figuras é igual ao produto das razões entre suas bases e a razão entre suas alturas, ou seja,

$$\frac{\text{Area}(R)}{\text{Area}(Q)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1}.$$

Desde que a área de um quadrado de lado 1 unidade de comprimento é igual a 1 unidade quadrada, concluímos que

$$\text{Area}(R) = b \cdot h.$$

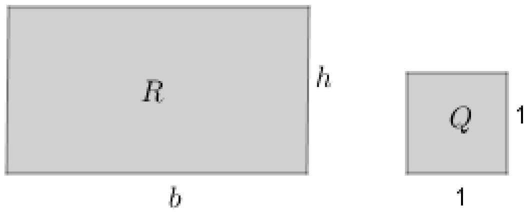

Figura 1.5: Razão entre retângulo e quadrado

■

Essa relação define a área do retângulo. O quadrado é um caso particular, onde a base é igual à altura. Assim, se Q é um quadrado de lado a, então

$$\begin{aligned} \text{Area}(Q) &= a \cdot a \\ &= a^2. \end{aligned}$$

1.2.2 Paralelogramo

O paralelogramo é um quadrilátero de lados opostos paralelos. Tomando um lado do paralelogramo como base, sua altura será um segmento perpendicular à base que liga a mesma ao lado oposto ou ao prolongamento desse lado oposto.

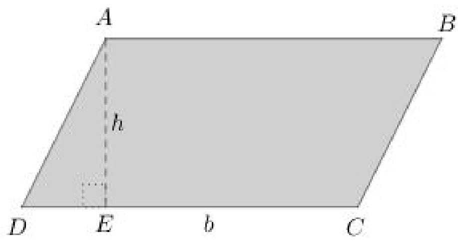

Figura 1.6: Paralelogramo

Veja na Figura 1.6 que tomando CD como base, o segmento AE é a altura do paralelogramo, sendo E um ponto pertencente à reta CD de tal forma que AE é perpendicular a CD.

Para o que segue, dois polígonos são *equivalentes* se podem ser decompostos em uma mesma quantidade de polígonos menores dois a dois congruentes.

Teorema 1.2.3 *Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes.*

Demonstração: Vamos considerar dois paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ com baseAB e alturas congruentes, onde supomos, sem perda de generalidade, que o comprimento de AB é maior do que ou igual ao comprimento de CD. Assim, podemos ter três situações.

Primeira situação. CD e $C'D'$ possuem um segmento em comum, como mostra a Figura 1.7. Nesta situação, as regiões X e Z são congruentes. Assim, a região $X \cup Y$ é equivalente à região $Y \cup Z$. A região $X \cup Y$ é o paralelogramo $ABCD$ e a região $Y \cup Z$ é o paralelogramo $ABC'D'$. Portanto esses paralelogramos são equivalentes.

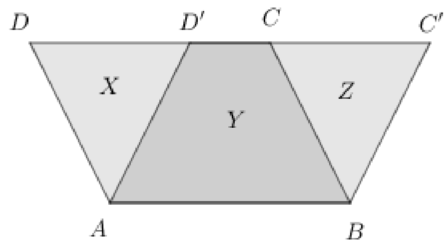

Figura 1.7: Paralelogramos com dois segmentos em comum

Segunda situação. Os segmentos CD e $C'D'$ se intersectam num único ponto, de acordo com a Figura 1.8. Nesta situação, as regiões X, Y e Z são congruentes. Assim, as regiões $X \cup Y$ e $Y \cup Z$ são equivalentes. Como a região $X \cup Y$ determina o paralelogramo $ABCD$, enquanto a região $Y \cup Z$ determina o paralelogramo $ABC'D'$, concluímos que $ABCD$ e $ABC'D'$ são equivalentes.

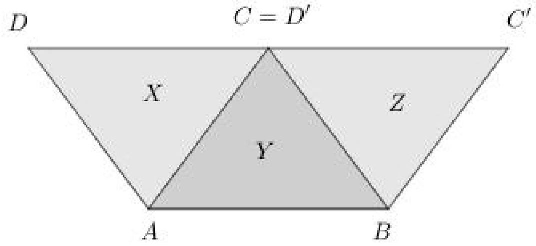

Figura 1.8: Paralelogramos com um segmento e um vértice em comum

Terceira situação. Ocorre quando os segmentos CD e $C'D'$ não se intersectam. A Figura 1.9 mostra essa situação. Então, existe um ponto P, pertencente ao segmento CD, tal que PD' é congruente a AB.

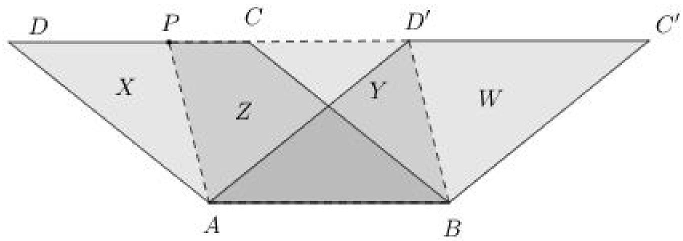

Figura 1.9: Paralelogramos com um segmento em comum

Os paralelogramos $ABCD$ e $ABD'P$ possuem o segmento PC em comum, assim as regiões $X = ADP$ e $Y = BCD'$ são congruentes e pela primeira situação dessa demonstração os paralelogramos $ABCD$ e $ABD'P$ são equivalentes. Temos também que os paralelogramos $ABD'P$ e $ABC'D'$ possuem um único ponto D' em comum. Logo, as regiões $Z = APD'$ e $W = BC'D'$ são congruentes e pela segunda situação, os paralelogramos $ABD'P$ e $ABC'D'$ são equivalentes. Sendo $ABCD$ equivalente a $ABD'P$ e $ABD'P$ equivalente a $ABC'D'$, concluímos que os paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ são equivalentes. ■

Proposição 1.2.2 *A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 1.2.3, todo paralelogramo é equivalente a um retângulo que possui base e altura, respectivamente, congruentes às do paralelogramo. Assim, a área de um paralelogramo P de base b e altura h é

$$\text{Area}(P) = b \cdot h.$$

■

1.2.3 Triângulo

Os triângulos são polígonos que possuem três lados. A distância de um vértice do triângulo à reta que contém o lado oposto é chamada de altura do triângulo em relação a este lado.

Teorema 1.2.4 *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à base do triângulo e altura igual à metade de sua altura.*

Demonstração: Sejam ABC um triângulo, D o ponto médio do lado AC e tracemos, a partir do ponto D, um segmento paralelo ao lado BC até o ponto E, passando por F em AB, de modo que DE seja congruente a BC, conforme a Figura 1.10

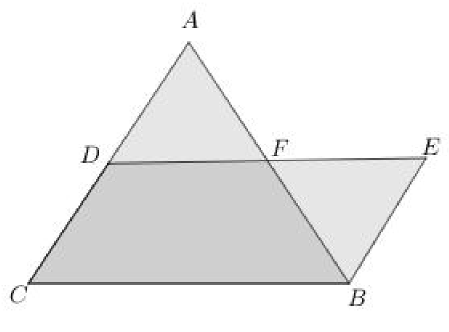

Figura 1.10: Triângulo e paralelogramo equivalentes

Assim, os triângulos ADF e BEF são congruentes e a altura do triângulo ABC é igual ao dobro da altura do paralelogramo $BCDE$, relativas ao lado BC. Logo, as regiões $ADF \cup BCDF$ e $BEF \cup BCDF$ são equivalentes. ■

Proposição 1.2.3 *Seja ABC o triângulo de lados $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ com alturas relativas a esses lados h_a, h_b e h_c respectivamente. A área do triângulo ABC é igual a*

$$\text{Area}(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Demonstração: Consideremos um triângulo ABC de base $b = AC$ e altura h_b. Marque um ponto E na reta paralela a AC de modo que BE seja congruente a AC, conforme a Figura 1.11.

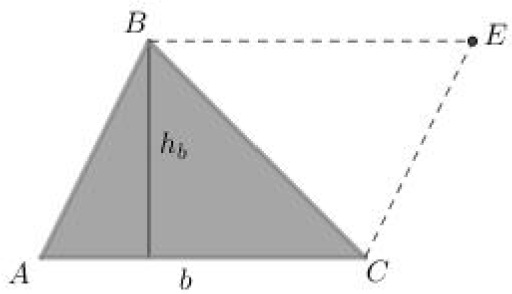

Figura 1.11: Triângulo de base b e altura h

O polígono $ABCD$ é um paralelogramo de área igual a $2 \cdot \text{Area}(ABC)$. Portanto,

$$\text{Area}(ABC) = \frac{b \cdot h_b}{2}. \tag{1.10}$$

Os casos em que a e c são bases podem ser obtidos de maneira análoga. ∎

Essa expressão se refere à área de um triângulo dadas a base e a altura. Vejamos agora o cálculo de áreas para algumas outras situações iniciando quando são dados os três lados.

Proposição 1.2.4 *(Fórmula de Herão) Seja ABC o triângulo de lados $a = BC, b = AC$ e $c = AB$, e semiperímetro p. A área do triângulo ABC é dada por*

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$

Demonstração: Consideramos um triângulo ABC de lados $a = BC, b = AC$ e $c = AB$. Seja h à altura relativa ao lado BC. Sem perda de generalidade, podemos supor que a altura do triângulo relativa ao lado BC interseta este lado, digamos no ponto H, conforme a Figura 1.12.

Note que os triângulos AHC e AHB são retângulos. Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos as seguintes relações

(i) $b^2 = h^2 + x^2$

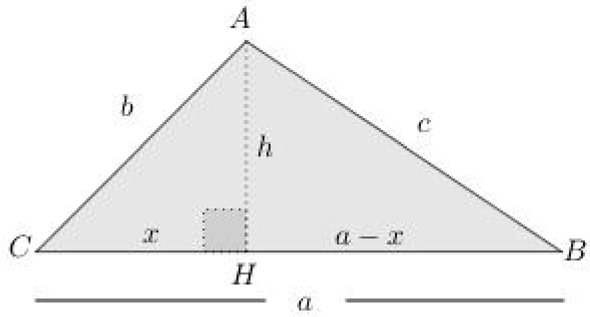

Figura 1.12: Triângulo de base a e altura h

(ii) $c^2 = h^2 + (a - x)^2$,

onde $x = HC$. Desenvolvendo a equação (ii), obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (a-x)^2 \\ &= h^2 + x^2 + a^2 - 2ax. \end{aligned}$$

Como $b^2 = h^2 + x^2$, temos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ax \\ 2ax &= a^2 + b^2 - c^2 \\ x &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}. \end{aligned}$$

Assim, usando (i), obtemos

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 \\ &= b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} 4a^2h^2 &= 4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 \\ &= (2ab)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 \\ &= (2ab + (a^2 + b^2 - c^2)) \cdot (2ab - (a^2 + b^2 - c^2)) \\ &= ((a+b)^2 - c^2) \cdot (c^2 - (a-b)^2) \\ &= (a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a-b+c) \cdot (-a+b+c). \end{aligned}$$

Sendo o perímetro do triângulo ABC igual à soma dos comprimentos de seus lados, temos o semiperímetro $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, logo $2p = a+b+c$, então

$$\begin{aligned}
a+b-c &= a+b+c-c-c \\
&= 2(p-c) \\
a-b+c &= a+b+c-b-b \\
&= 2(p-b) \\
-a+b+c &= a+b+c-a-a \\
&= 2(p-a).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
4a^2h^2 &= 2p \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-a) \\
\sqrt{a^2h^2} &= \sqrt{4p(p-c) \cdot (p-b) \cdot (p-a)} \\
h &= \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.
\end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo ABC de base a e altura h, é dada por

$$\begin{aligned}
\text{Area}(ABC) &= \frac{a \cdot h}{2} \\
&= \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.
\end{aligned}$$

∎

Outro modelo matemático bastante eficaz para cálculo da área de um triângulo ABC é usando um ângulo e seus lados adjacentes.

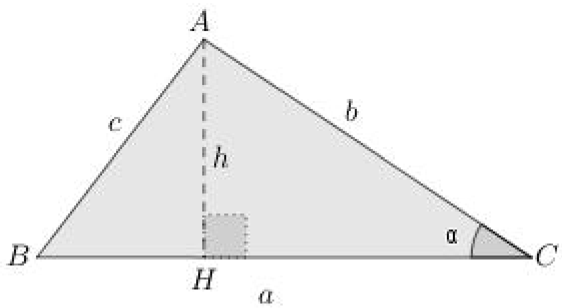

Figura 1.13: Região triangular

Da Figura 1.13, podemos escrever

$$\text{Area}(ABC) = \frac{a \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad sen\alpha = \frac{h}{b}$$

o que implica

$$h = b \cdot sen\alpha.$$

Dessas relações escrevemos a área do triângulo como

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\alpha. \tag{1.11}$$

1.2.4 Trapézio

O trapézio é um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos. Os lados opostos paralelos são chamados de bases do trapézio. A distância entre as retas que contêm as bases é chamada de altura do trapézio.

Proposição 1.2.5 *Se $ABCD$ é um trapézio de bases $AB = \mathcal{B}$ e $CD = b$ e altura h, então*

$$\text{Area}(ABCD) = \frac{(\mathcal{B} + b)\, h}{2}.$$

Demonstração: Suponha que $AB = \mathcal{B} > b = CD$, como mostra a Figura 1.14.

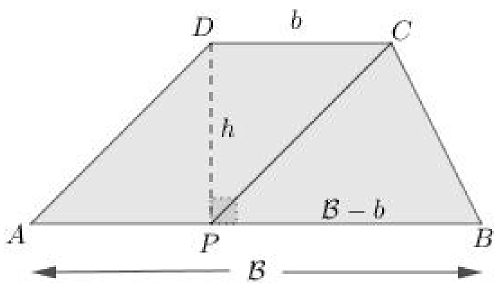

Figura 1.14: Trapézio de bases $\mathcal{B}$ e b e altura h

Seja P um ponto em AB tal que $AP = CD = b$, então AD é paralelo a CP e daí $APCD$ é um paralelogramo de base b e altura h. Temos também que $PB = \mathcal{B} - b$, então PBC é um triângulo de base $\mathcal{B} - b$ e altura h. Logo, a área do trapézio $ABCD$ é a soma das áreas do paralelogramo $APCD$ e do triângulo PBC. Portanto

$$\begin{aligned} \text{Area}(ABCD) &= \text{Area}(APCD) + \text{Area}(PBC) \\ &= bh + \frac{(\mathcal{B} - b)\, h}{2} \\ &= \frac{(\mathcal{B} + b) \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.2.6 *Seja um quadrilátero convexo $ABCD$ de diagonais AC e BD, então a área do quadrilátero e dada por*

$$\text{Area}(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot sen\alpha$$

onde α é o menor ângulo formado pelas diagonais do quadrilátero.

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, segundo a Figura 1.15.

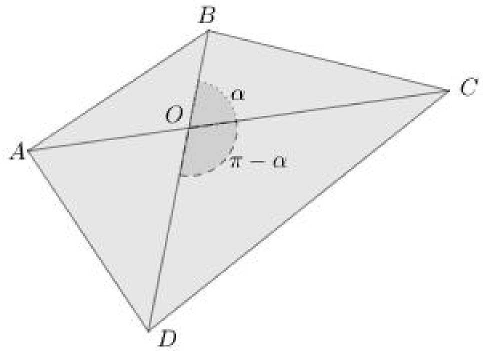

Figura 1.15: Quadrilátero ABCD

Sejam AC e BD suas diagonais. Chamamos de O o ponto de interseção das mesmas e $\angle BOC = \alpha$ o menor ângulo entre elas. Os ângulos $\angle AOD = \angle BOC = \alpha$ e $\angle AOB = \angle COD = \pi - \alpha$, pois são opostos pelo vértice. Temos ainda que $sen\alpha = sen(\pi - \alpha)$. Assim podemos obter a área do quadrilátero $ABDC$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\text{Area}(ABCD) &= \text{Area}(BOC) + \text{Area}(AOB) + \text{Area}(AOD) + \text{Area}(COD) \\
&= \frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot sen\alpha + \frac{1}{2} BO \cdot AO \cdot sen(\pi - \alpha) \\
&+ \frac{1}{2} AO \cdot DO \cdot sen\alpha + \frac{1}{2} DO \cdot CO \cdot sen(\pi - \alpha) \\
&= \frac{1}{2} BO \cdot sen\alpha \cdot (AO + CO) + DO \cdot sen(\pi - \alpha) \cdot (AO + CO) \\
&= \frac{1}{2} (AO + CO) \cdot (BO + DO) \cdot sen\alpha \\
&= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot sen\alpha.
\end{aligned}$$

■

1.2.5 Losango

O losango é um quadrilátero com quatro lados congruentes.

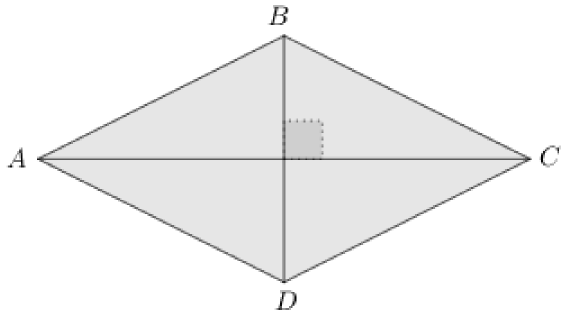

Figura 1.16: Losango

Proposição 1.2.7 *Se $ABCD$ é um losango de diagonais AC e BD, então*

$$\text{Area}(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Demonstração: Seja $ABCD$ um losango com diagonais AC e BD. Como o losango é um quadrilátero convexo cujos ângulos entre as diagonais medem $\frac{\pi}{2}$ (ver Figura 1.16), segue da Proposição 1.2.6 que

$$\begin{aligned} \text{Area}(ABCD) &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot sen\alpha \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot sen\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD. \end{aligned}$$

■

1.2.6 Círculo e circunferência

Sejam O um ponto em um plano e r um número positivo. O círculo de centro O e raio r é o conjunto $\mathcal{C}$ constituído por todos os pontos P do plano tais que $OP \leqslant r$. A circunferência de centro O e raio r é o conjunto C constituído por todos os pontos P do plano tais que $OP = r$. O comprimento da circunferência de raio r é dado por $2\pi r$, onde π é o comprimento da semicircunferência de raio 1. Para qualquer $a > 0$, existe um polígono regular inscrito em C tal que a diferença entre o seu perímetro e o comprimento de C é menor do que a.

Teorema 1.2.5 *A área do círculo de raio r é igual a πr^2.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ um círculo de centro O e raio r. Denotamos por per$(\mathcal{C})$ e Area$(\mathcal{C})$ o perímetro e a área de $\mathcal{C}$, respectivamente. Dado um polígono P, denotamos por per(P), Area(P) e $L(P)$, respectivamente, o perímetro, a área e o comprimento do maior lado de P. Dado um número positivo a qualquer, existem polígonos regulares P_1, P_2 e P_3 inscritos em $\mathcal{C}$) tais que

(i) $L(P_1) < a$

(ii) $\text{Area}(\mathcal{C}) - \text{Area}(P_2) < a \cdot r$

(iii) $\text{per}(\mathcal{C}) - \text{per}(P_3) < a$

Formemos agora o polígono P que tenha como vértices todos os vértices dos polígonos P_1, P_2 e P_3. Assim, P satisfaz as condições (i), (ii) e (iii).

A área de P é a soma das áreas de todos os triângulos com vértice em O e tendo como lado um dos lados do polígono P. Seja OAB um destes triângulos, como mostra a Figura 1.17.

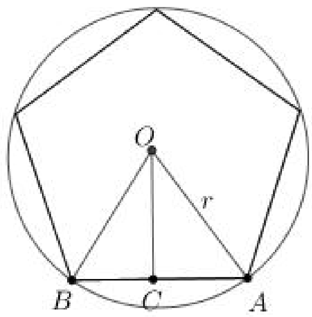

Figura 1.17: Círculo

Assim, a área do triângulo AOB é dada por

$$\text{Area}(AOB) = \frac{1}{2} AB \cdot OC,$$

onde $OA = OB = r$ e OC é a altura desse triângulo em relação à base AB. Observe que o triângulo AOC é retângulo com hipotenusa OA. Assim,

$$OA > OC > OA - AC,$$

donde segue que

$$\frac{1}{2} AB \cdot (OA - AC) < \frac{1}{2} AB \cdot OC = \text{Area}(AOB) < \frac{1}{2} AB \cdot OA.$$

Como $OA = r$ e $AC < L(P) < a$, concluímos que

$$OA - AC = r - AC > r - a.$$

Portanto

$$\frac{1}{2}AB \cdot (r-a) < \frac{1}{2}AB \cdot (OA - AC) < \text{Area}(AOB) < \frac{1}{2}r \cdot AB.$$

Uma vez que o triângulo ABC foi escolhido arbitrariamente dentre todos os tiângulos que forma o polígono P, obtemos uma desigualdade análoga a todos os outros triângulos em que dividimos P. Assim, somando as áreas de todos os triângulos que formam P, obtemos

$$\frac{1}{2}\text{per}(P)(r-a) < \text{Area}(P) < \frac{1}{2}\text{per}(P)r. \tag{1.12}$$

Da definição de P, temos que $\text{per}(\mathcal{C}) - a < \text{per}(P)$ e $\text{per}(P) < \text{per}(\mathcal{C})$. Utilizando essas duas informações em (1.12), obtemos

$$\frac{1}{2}(\text{per}(\mathcal{C}) - a)(r-a) < \frac{1}{2}\text{per}(P)(r-a) < \text{Area}(P) < \frac{1}{2}\text{per}(P)r < \frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C})r,$$

resultando em

$$\frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C}) - \frac{1}{2}(ar + a\,\text{per}(\mathcal{C}) - a^2) < \text{Area}(P) < \frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C})r. \tag{1.13}$$

Assim, a área de P difere de $\frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C})r$ em menos que $\frac{1}{2}(ar + a\,\text{per}(\mathcal{C}) - a^2)$. Logo,

$$\mid \text{Area}(P) - \frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C})r \mid < \frac{1}{2}(ar + a\,\text{per}(\mathcal{C}) - a^2).$$

De (ii), temos que $\text{Area}(\mathcal{C}) - \text{Area}(P) < a \cdot r$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \mid \text{Area}(\mathcal{C}) - \frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C})r \mid &\leqslant \mid \text{Area}(\mathcal{C}) - \text{Area}(P) \mid + \mid \text{Area}(P) - \frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C})r \mid \\ &< ar + \frac{1}{2}(ar + a\,\text{per}(\mathcal{C}) - a^2). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Como o valor de a é arbitrário, que pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, e o lado esquerdo de (1.14) não depende da escolha de a, concluímos que

$$\text{Area}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\text{per}(\mathcal{C})r.$$

Sendo o comprimento da circunferência igual a $2\pi r$, temos

$$\text{Area}(\mathcal{C}) = \pi r^2.$$

■

1.3 Volumes: Aspectos conceituais

O volume de um sólido é um número real positivo que representa intuitivamente a quantidade de espaço por ele ocupado. Para que um conceito de volume para sólidos seja útil, postulamos as seguintes propriedades:

1. Sólidos congruentes têm volumes iguais;
2. Se um sólido S é a união de um número finito de sólidos menores que não têm pontos interiores em comum, então o volume de S é a soma dos volumes dos sólidos menores;
3. Se um sólido S_1 está contido em um sólido S_2, então o volume de S_1 não é maior do que o volume de S_2;
4. O volume do cubo unitário, isto é, um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, é igual a 1 unidade cúbica.

1.4 Volumes de alguns sólidos

A prática do cálculo de volumes é de suma importância pela presença significante de sólidos no cotidiano que se faz necessário conhecer suas capacidades. É um conhecimento essencial para a sociedade, pois seu uso é rotineiro em situações-problema característica do dia a dia. Citaremos nesta seção os volumes de alguns sólidos geométricos, visto que usaremos para comparar a sólidos obtidos pela revolução de regiões em torno de um eixo. Dentre os sólidos geométricos dos quais calcularemos seus volumes estão alguns poliedros, o cilindro, o cone e a esfera.

1.5 Bloco retangular

Um bloco retangular é um sólido limitado por três pares de retângulos paralelos denominados *faces*, onde em cada par, os retângulos são iguais. Esses retângulos possuem lados chamados *arestas*, como mostra a Figura 1.18.

O cubo é um caso particular de bloco retangular onde as arestas possuem o mesmo comprimento. Se n é um número inteiro positivo, um cubo C cujas arestas medem n unidades de comprimento pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos, logo o volume de C é n^3.

Analogamente, se C é um cubo unitário, particionando cada aresta de C em um número inteiro q de intervalos de mesmo comprimento, obtemos q^3 cubos justapostos, cada um com arestas medindo $\frac{1}{q}$. Isso implica que, se dividirmos cada aresta de um cubo unitário em q partes, obtemos em seu interior n^3 cubos de volumes iguais a $\frac{1}{q^3}$.

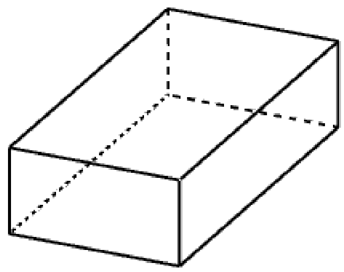

Figura 1.18: Bloco retangular

Suponhamos agora um cubo C, cujas arestas medem a, onde $a = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos. Decompondo cada uma das arestas de C em p partes iguais, temos que cada uma dessas arestas tem comprimento $\frac{1}{q}$. Desse modo, o cubo C ficará disposto em p^3 cubos justapostos, cada um dos quais têm arestas medindo $\frac{1}{q}$. O volume de cada cubo é $\frac{1}{q^3}$. Assim, o volume de C será

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(C) &= p^3 \cdot \frac{1}{q^3} \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^3. \end{aligned}$$

Portanto, se as arestas de um cubo C têm como medida um número racional a, então o volume de C será igual a a^3.

Suponhamos agora que o cubo C tenha como arestas um número b qualquer. Queremos mostrar que o volume de C é igual a b^3. Seja x um número tal que $x < b^3$. Então existe um número racional r tal que $x < r^3 < b^3$. Então o cubo C, cujas arestas têm medida b, contém um cubo D, cujas arestas tem medida o número racional r. Segue-se que $\mathrm{Vol}(D) < \mathrm{Vol}(C)$. E sendo r uma aresta de D temos que $\mathrm{Vol}(D) = r^3$, como mostrado anteriormente. Assim, concluímos que $r^3 < \mathrm{Vol}(C)$ e, consequentemente, $x < \mathrm{Vol}(C)$.

Analogamente, se y é um número tal que $y > b^3$, podemos mostrar que $y > \mathrm{Vol}(C)$. Concluímos assim que

$$\mathrm{Vol}(C) = b^3.$$

Agora vamos ao volume do bloco retangular a partir do volume do cubo. Seja B um bloco retangular com arestas medindo m, n e p, onde m, n e p são números racionais. Então podemos escrever $m = \frac{a}{q}$, $n = \frac{b}{q}$ e $p = \frac{c}{q}$, com a, b, c e q inteiros positivos. Assim, se dividirmos as arestas m, n e p em segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{q}$, o bloco retangular B fica dividido em abc cubos justapostos de arestas medindo $\frac{1}{q}$. Dessa forma, o volume de cada cubo é $\frac{1}{q^3}$ e o volume do bloco será

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B) &= abc \cdot \frac{1}{q^3} \\ &= \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q}.\end{aligned}$$

Suponha agora que B é um bloco retangular com arestas a, b e c quaisquer. Seja x um número real tal que $x < a \cdot b \cdot c$. Então existem números racionais r, s e t tais que $r < a$, $s < b$, $t < c$ e $x < rst$. Logo, o bloco retangular B contém um bloco retangular R, cujas arestas têm medidas r, s e t. De $r < a$, $s < b$, $t < c$, temos $rbc < abc, sac < abc$ e $tab < abc$, daí $rsta^2b^2c^2 < a^3b^3c^3$. Pelo que foi mostrado anteriormente, $\mathrm{Vol}(R) = rst$. Logo, concluímos que $\mathrm{Vol}(R) < \mathrm{Vol}(B)$. Sendo $x < rst$, teremos que $x < \mathrm{Vol}(B)$.

Analogamente, se y é um número real tal que $y > abc$, podemos mostrar que $y > \mathrm{Vol}(B)$. Concluímos assim que

$$\mathrm{Vol}(B) = a \cdot b \cdot c.$$

1.6 Definição geral de volume

Para entendermos o conceito de volume de uma forma mais geral, inicialmente iremos conceituar os sólidos formados por polígonos, os poliedros. Poliedro é a reunião de uma quantidade finita de polígonos planos chamados faces, onde cada lado de um desses polígonos, e apenas um, é lado de um outro polígono. Cada lado comum a duas faces é chamada de aresta e cada vértice de uma face é também vértice do poliedro. Neste sentido, o poliedro limita uma quantidade de espaço em seu interior. Um poliedro é chamado convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersetá-lo em no máximo dois pontos. Um poliedro convexo é regular se todas as faces forem iguais e em todos os vértices intersetarem o mesmo número de arestas.

Chamamos de poliedro retangular a todo sólido formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos. O volume de um poliedro retangular é a soma dos volumes dos blocos retangulares justapostos nele contidos.

Vamos agora generalizar a definição de volume para um sólido S. Seja P um poliedro retangular contido em S. Se $P = S$, definimos $\mathrm{Vol}(S) = \mathrm{Vol}(P)$. Se $P \subsetneq S$, então existe um poliedro retangular P', tal que $P \subset P' \subset S$ e $\mathrm{Vol}(P) < \mathrm{Vol}(P')$. Se $P' = S$, definimos $\mathrm{Vol}(S) = \mathrm{Vol}(P')$. Caso contrário, repetimos o processo anterior. Com isso almejamos que o volume de S seja um número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S.

Por outro lado, seja Q um poliedro retangular que contém S. Se $Q = S$, definimos $\mathrm{Vol}(S) = \mathrm{Vol}(Q)$. Se $Q \supsetneq S$ então existe um poliedro retangular Q', tal que $Q \supset Q' \supset S$

e $\text{Vol}(Q') > \text{Vol}(Q)$. Se $Q' = S$, definimos $\text{Vol}(S) = \text{Vol}(Q')$. Caso contrário, repetimos o processo anterior. Com isso almejamos que o volume de S seja um número real cujas aproximações por excesso são os volumes dos poliedros retangulares que contêm S.

Para completar nosso raciocínio, destacamos que o volume de um sólido S é o número $\text{Vol}(S)$ que goza da seguinte propriedade: Quaisquer que sejam os poliedros retangulares P contido em S e Q contendo S, tem-se

$$\text{Vol}(P) \leq \text{Vol}(S) \leq \text{Vol}(Q).$$

1.7 Princípio de Cavalieri

Suponhamos a existência de uma quantidade finita de paralelepípedos retangulares com as mesmas bases e alturas organizados de tal modo que formem dois sólidos com quantidades iguais desses paralelepípedos, como mostrado na Figura 1.19. Neste caso, vemos que os respectivos volumes são iguais.

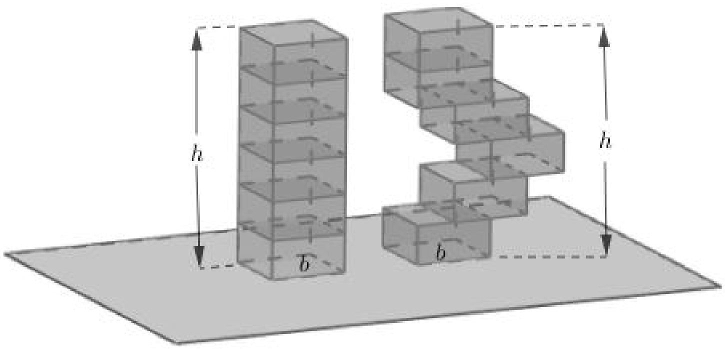

Figura 1.19: Blocos retangulares em pilhas

Adotaremos de maneira axiomática o Princípio de Cavalieri como: *Dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.*

Usaremos o Princípio de Cavalieri para obter o volume de alguns sólidos.

1.8 Cilindro

Seja R uma região em um plano α. Chamamos de cilindro de base R o conjunto C de todos os segmentos de reta paralelos entre si com uma das extremidades em R e a outra em α', onde α' é um plano paralelo a α. Qualquer um dos segmentos de reta é chamado geratriz do cilindro.

Note que as extremidades dos segmentos paralelos que formam o cilindro C e não pertencem à base R constituem uma outra região plana R' contida no plano α' e congruente a R. A distância h entre os planos α e α' é chamada altura do cilindro.

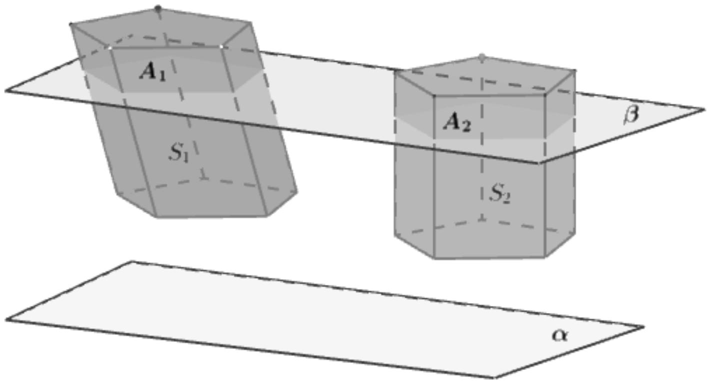

Figura 1.20: Sólidos S_1 e S_2

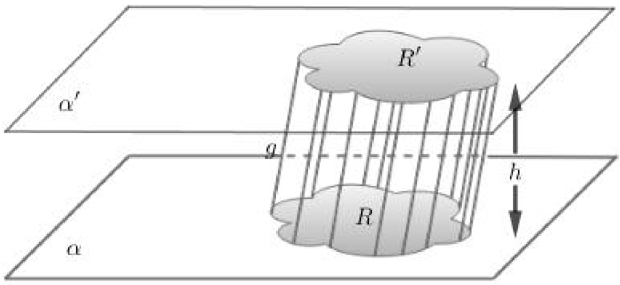

Figura 1.21: Cilindro

Teorema 1.8.1 *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração: Seja C um cilindro de base R e altura h, onde R é uma região no plano α. Sobre α construímos um retângulo com área A, onde $A = \text{Area}(R)$. Com segmentos de reta paralelos levantados do retângulo e perpendiculares a α medindo comprimentos iguais a h, construímos um bloco retangular B. Qualquer plano β paralelo ao plano α, a secção definida por $\beta \cap C$ é uma região congruente a R, enquanto $\beta \cap B$ é um retângulo com área A. Daí, tem-se que $\beta \cap C$ e $\beta \cap B$ possuem a mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cilindro C e do bloco retangular B são iguais. Portanto

$$\text{Vol}(C) = \text{Vol}(R) = A \cdot h.$$

Ficando assim provado o teorema para o volume de um cilindro. ∎

Veja que para um cilindro C em que a base é um círculo de raio r e altura h, usando (1.15), temos que

$$\text{Vol}(C) = \pi r^2 \cdot h. \tag{1.15}$$

Um cilindro reto C é equilátero quando a altura é igual ao diâmetro da base. Assim, a seção meridiana é um quadrado. Logo, seu volume é dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(C) &= \pi r^2 \cdot 2r\\ &= 2\pi r^3.\end{aligned}$$

Um cilindro C em que sua base é uma região poligonal é denominado prisma e suas faces laterais são retângulos.

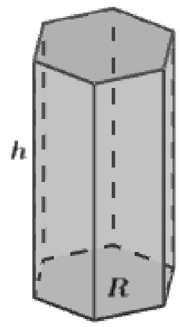

Figura 1.22: Prisma

1.9 Cone

Seja R uma região em um plano α e P um ponto não pertencente a α. Chamamos de cone com base R e vértice P ao sólido K obtido pela reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P aos pontos de R. A distância do ponto P ao plano α é chamada altura do cone.

Lema 1.9.1 *Seja K um cone de base R, vértice P e altura h. Seja R' a seção obtida pela interseção do cone com um plano α' paralelo ao plano que contém R. Então*

$$\frac{\mathrm{Area}(R')}{\mathrm{Area}(R)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2. \tag{1.16}$$

Demonstração: Sejam Area(R), Area(R'), h e h' as áreas da base, da seção obtida pela interseção do cone com um plano α', da altura do cone de base R e da altura do cone de base R'. De 1.15 temos que $\mathrm{Vol}(C) = \pi r^2 h$, então

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Area}(R')}{\mathrm{Area}(R)} &= \frac{\pi(R')^2}{\pi(R)^2}\\ &= \left(\frac{R'}{R}\right)^2.\end{aligned}$$

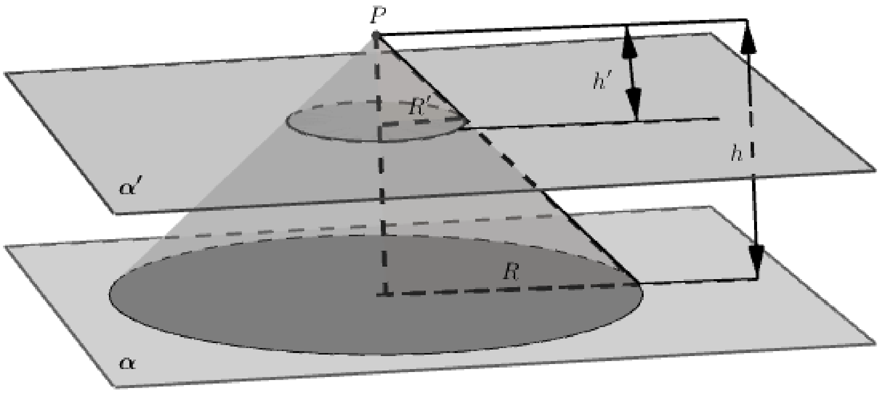

Figura 1.23: Razão entre áreas e alturas

Por semelhança de triângulos temos que

$$\frac{h'}{h} = \frac{R'}{R}$$

donde segue que

$$\frac{\text{Area}(R')}{\text{Area}(R)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

■

Teorema 1.9.1 *Dois cones de mesma altura e bases com áreas iguais têm volumes iguais.*

Demonstração: Sejam K_1 e K_2 dois cones com mesma altura h e bases R_1 e R_2 de mesma área contidas num plano α, com vértices P_1 e P_2, respectivamente, e situados em um mesmo lado do plano α. Dado um plano α' paralelo a α, situado entre os vértices dos cones e suas respectivas bases, sejam $R_1' = \alpha' \cap K_1$ e $R_2' = \alpha' \cap K_2$. Seja h' a altura comum aos dois cones de bases R_1' e R_2', e vértices P_1 e P_2, temos por 1.16 que

$$\frac{\text{Area}(R_1')}{\text{Area}(R_1)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{\text{Area}(R_2')}{\text{Area}(R_2)}.$$

Como $\text{Area}(R_1) = \text{Area}(R_2)$, concluímos que $\text{Area}(R_1') = \text{Area}(R_2')$. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, temos que

$$\text{Vol}(K_1) = \text{Vol}(K_2).$$

■

Vale salientar que um cone K em que sua base é uma região poligonal é denominado pirâmide e suas faces laterais são triangulares. Quando uma pirâmide possui base triangular é denominada tetraedro.

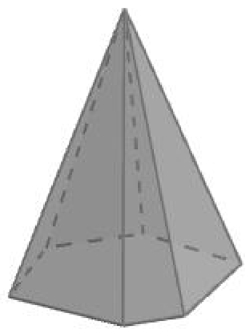

Figura 1.24: Pirâmide com base hexagonal

Teorema 1.9.2 *O volume de um cone é igual a um terço do produto da altura pela área da base.*

Demonstração: Considere um cone e uma pirâmide de base triangular, pelo Teorema 1.9.1 os volumes do cone e da pirâmide são iguais. A partir dessa informação, devemos mostrar que o volume do cone será um terço do produto da área da base da pirâmide por sua altura.

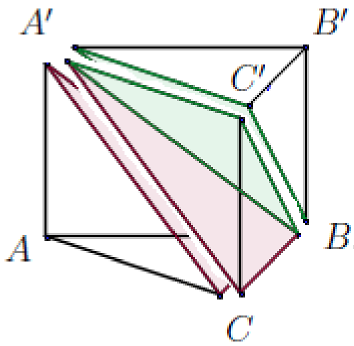

Figura 1.25: Tetraedro

Suponha uma pirâmide $ABCA'B'C'$ conforme a Figura 1.25, cuja base seja um triângulo ABC e o segmento AA' seja perpendicular ao plano ABC, assim terá comprimento igual à altura de um cone K. Levantando os segmentos BB' e CC' de igual comprimento de AA' perpendiculares ao plano da base da pirâmide obtemos um prisma de bases ABC e $A'B'C'$. De (1.15) temos que o volume do prisma obtido é o produto da área do triângulo ABC pela altura AA'. O próximo passo agora é dividir o prisma em três pirâmides com volumes iguais ao de $ABCA'$. Veja que as bases ABC e $A'B'C'$ são iguais, e como possuem mesma altura AA' e BB', as pirâmides $ABCA'$ e $A'B'C'B$ são iguais. Temos também que as bases $BB'C'$ e BCC' das pirâmides $BB'C'A'$ e $BCC'A'$ são congruentes e como as alturas das mesmas a partir de A' em relação as suas bases são iguais, temos que os volumes das pirâmides $BB'C'A'$ e $BCC'A'$ são iguais. Portanto, o volume do prisma $ABCDEF$ é composto de três pirâmides de mesmo volume. Logo, o volume do cone é um terço do produto da área da base pela altura do cone. Para um cone de altura h, cuja base seja um círculo de raio r, temos que seu volume é

$$\mathrm{Vol}(K) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

■

1.10 Esfera

Seja O um ponto e r um número positivo. A esfera E de centro O e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos P do espaço tais que $OP \leqslant r$.

Teorema 1.10.1 *O volume de uma esfera de raio r é igual a* $\frac{4}{3}\pi r^3$

Demonstração: Consideremos uma esfera de raio r e um cilindro equilátero de altura $2r$, conforme a Figura 1.26.

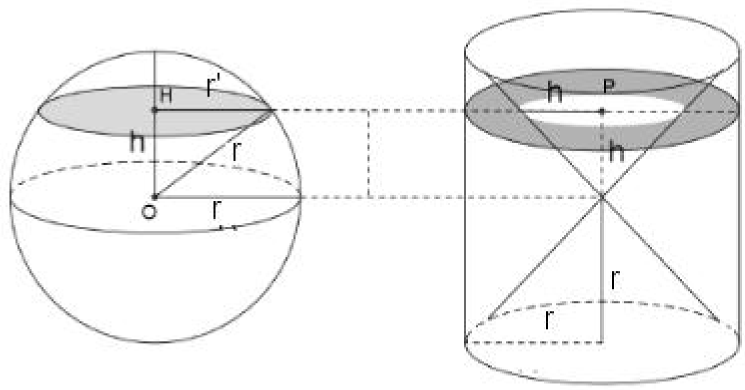

Figura 1.26: Esfera e cilindro equilátero

É possível obter, do cilindro, dois cones retos de raio e altura iguais a r e bases coincidindo com as bases do cilindro. Assim, do cilindro, ao retirar esses cones, obtemos o sólido que chamaremos de S. Posicionando sobre um mesmo plano o sólido e a esfera e traçando um outro plano paralelo a esse com distância h do centro da esfera, obtemos duas seções, uma no sólido e outra na esfera. Afirmamos que essas áreas são iguais.

No sólido S, o plano determina uma coroa circular K, de raio maior r, e raio menor h. Logo, a área de K é dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(K) &= \pi r^2 - \pi h^2 \\ &= \pi\left(r^2 - h^2\right). \end{aligned}$$

Já na esfera, o plano determina um círculo de raio r' (ver Figura 1.26). Usando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$(r')^2 = r^2 - h^2$$

Daí, a área do círculo $\mathcal{C}$ de raio r' é

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{C}) &= \pi(r')^2 \\ &= \pi\left(r^2 - h^2\right). \end{aligned}$$

Verificando assim que qualquer plano paralelo ao plano da base fornece figuras no sólido S e na esfera de mesma área e, como as alturas de ambos são iguais, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes da esfera e de S são iguais. Logo

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \text{Vol}(\mathcal{C}) - 2 \cdot \text{Vol}(K) \\ &= \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

■

1.11 Centro de gravidade

A massa de um corpo é a quantidade de matéria que o mesmo comporta. A quantidade de matéria pode ser distribuída uniformemente ou não em um corpo. Neste trabalho adotaremos sempre corpos com massa uniformemente distribuída. O centro de massa é o ponto onde, hipoteticamente, toda a massa de um corpo está concentrada, ou seja, o corpo se comporta como se toda a sua massa estivesse concentrada nele. Quando o corpo está sob a influência de um campo gravitacional uniforme, ou seja, aquele em que a força gravitacional é igualmente exercida em todos os pontos do objeto, centro de massa pode também ser chamado de centro de gravidade.

1.11.1 Centro de gravidade de duas partículas presas em um eixo de massa desprezível

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 presas nas extremidades de uma barra de massa desprezível de comprimento l. O centro de gravidade desse conjunto se encontra no segmento que une as partículas e depende das massas das partículas. Para melhor entendermos a localização do centro de gravidade de duas partículas vamos usar um conceito físico.

Suponhamos um plano α tal que a força de gravidade entre esse plano e as duas partículas de massas m_1 e m_2 têm um valor numérico g. Sendo as distâncias de α a m_1 e m_2 iguais a h_1 e h_2, respectivamente e a barra onde estão presas as partículas equilibrada em um ponto C sobre uma haste cuja altura até o plano é h.

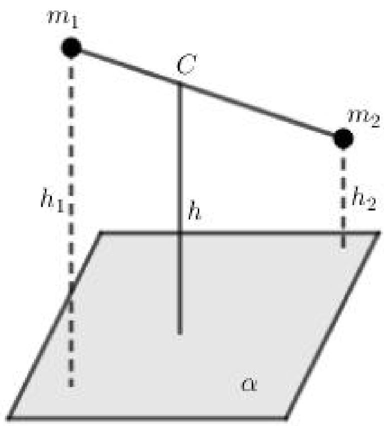

Figura 1.27: Duas partículas presas em um bastão e equilibradas sobre uma haste

A energia potencial de uma partícula de massa m situada a uma altura h de um plano que possui aceleração da gravidade g é definida pela expressão $m \cdot g \cdot h$. Nesse sentido teremos

$$\begin{aligned} m_1 \cdot h_1 \cdot g + m_2 \cdot h_2 \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot h \cdot g \\ (m_1 + m_2) \cdot h \cdot g &= (m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2) \cdot g \\ h &= \frac{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Note que a altura do ponto de equilíbrio C ao plano é a média ponderada das alturas das partículas. Assim podemos generalizar essa relação para determinar o centro de gravidade de um conjunto de partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas, respectivamente, nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ do plano cartesiano. Nessa perspectiva, as coordenadas do centro de gravidade no ponto definido é

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

e

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Baseando-se nesse conceito físico, Lima [11] escreve que se uma linha poligonal L é formada por segmentos consecutivos $l_1, l_2, \ldots, l_n$ de comprimentos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente e sendo (x_k, y_k) o ponto médio do segmento l_k, o centro de gravidade $G(\bar{x}, \bar{y})$ de L é o ponto, onde

$$\bar{x} = \frac{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \tag{1.18}$$

e

$$\bar{y} = \frac{a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \cdots + a_n \cdot y_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Para um segmento AB, definido pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o centro de gravidade $G(\bar{x}, \bar{y})$ é o ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Esse conceito também foi estudado por Arquimedes em um experimento chamado *Lei da Alavanca*, usando dois corpos com massas m_1 e m_2 e um bastão. Arquimedes tomou duas massas m_1 e m_2 presas no bastão de massa desprezível em lados opostos a um apoio e à distâncias d_1 e d_2 do apoio. O bastão ficará em equilíbrio se $m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2$.

Supondo que o bastão esteja sobre a parte positiva do eixo das abscissas e tenha comprimento x, com m_1 e m_2 posicionados em x_1 e x_2 e o centro de gravidade em $\bar{x}$. Assim as distâncias entre as massas o centro de gravidade são $d_1 = \bar{x} - x_1$ e $d_2 = x_2 - \bar{x}$, logo

$$\begin{aligned}
m_1 \cdot (\bar{x} - x_1) &= m_2 \cdot (x_2 - \bar{x}) \\
m_1 \cdot \bar{x} - m_1 \cdot x_1 &= m_2 \cdot x_2 - m_2 \cdot \bar{x} \\
m_1 \cdot \bar{x} + m_2 \cdot \bar{x} &= m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 \\
\bar{x} &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Note que essa expressão é equivalente a (1.17). Assim, para um sistema de n partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre o eixo x, a expressão para a abscissa do centro de gravidade x_g do sistema é equivalente a (1.18). De forma análoga ocorrerá com a ordenada do centro de gravidade $\bar{y}$.

1.11.2 Centro de gravidade de um polígono

É possível encontrarmos o centro de gravidade de algumas figuras planas de forma direta. Por exemplo, em um retângulo, o centro de gravidade é definido pela interseção de seus eixos de simetria. O centro de gravidade de um círculo é o seu centro.

Encontraremos agora o centro de gravidade de um quadrilátero qualquer a partir de dois triângulos. Para isso, vamos inicialmente determinar o centro de gravidade do triângulo. Seja um triângulo ABC, vamos traçar as medianas relativas aos lados AB e BC

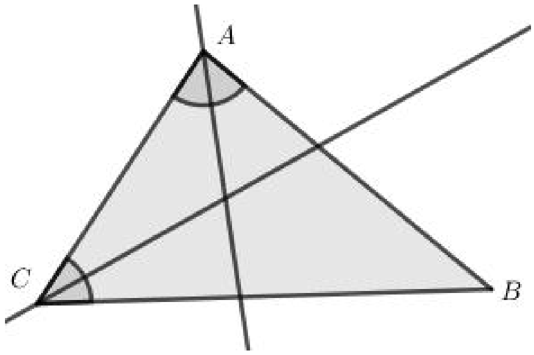

Figura 1.28: Triângulo e suas medianas

Se tomarmos segmentos paralelos ao lado BC com extremidades nos lados AB e AC teremos que a mediana relativa a esse lado divide todos esses segmentos em seus pontos médios e esses pontos médios são os respectivos centros de gravidade de cada um. Repetindo esse processo para os lados AC e BC, tomando as respectivas medianas a esses lados, concluímos que o centro de gravidade do triângulo se encontra nas medianas. Como tais medianas se intersectam em um único ponto, esse será o centro de gravidade.

A partir do centro de gravidade de um triângulo é possível determinar a posição do centro de gravidade de um polígono qualquer, basta dividirmos o polígono em triângulos. Para um quadrilátero $ABCD$ qualquer, dividimos em dois triângulos ABC e BCD. A intersecção das medianas do triângulo ABC em relação as suas bases determina o centro de gravidade G_1 desse triângulo, enquanto que as medianas do triângulo BCD determinam o centro de gravidade G_2 desse referido triângulo. Por esses dois centros de gravidade traçamos uma reta r. Tomamos o mesmo quadrilátero traçando a diagonal AD de modo a formarmos os triângulos ABD e ACD. As interseções das medianas dos triângulos ABD e ACD determinam respectivamente os centros de gravidade G_3 e G_4 desses respectivos triângulos. Por G_3 e G_4 traçamos uma outra reta s e a interseção das retas r e s determina o centro de gravidade do quadrilátero $ABCD$.

Um outro método de calcular o centro de gravidade de um polígono qualquer é dividir esse polígono em várias regiões conhecidas e usar os centros de gravidade dessas regiões e sua área. Segundo Lima [11], se um polígono P está dividido em polígonos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o centro de gravidade da figura P_k, o centro de gravidade da superfície de P é o ponto $G = (\bar{x}, \bar{y})$, tal que:

$$\bar{x} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \cdots + A_n \cdot x_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} \tag{1.20}$$

e

$$\bar{y} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \cdots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}.$$

Para um círculo $\mathcal{C}$ de centro O e raio r, o centro de gravidade de $\mathcal{C}$ é o ponto O.

1.12 Superfícies e sólidos de revolução

Consideremos um semiplano de origem em uma reta r e nesse semiplano uma curva $\mathcal{C}$. Rotacionando $\mathcal{C}$ em torno de r, obtemos uma superfície $\mathcal{S}$, chamada superfície de revolução. A curva $\mathcal{C}$ é chamada geratriz e a reta r é chamada eixo da superfície de revolução.

Podemos citar como exemplos de superfícies de revolução, as superfícies cilíndrica, cônica e esférica, bem como o paraboloide de revolução, o elipsoide de revolução e o hiperboloide de revolução de uma folha. Se uma circunferência é rotacionada em torno de um eixo coplanar que não a interseta, a superfície de revolução gerada é um toro. A Figura 1.29 mostra um toro de revolução obtido pela rotação de uma circunferência em torno do eixo y.

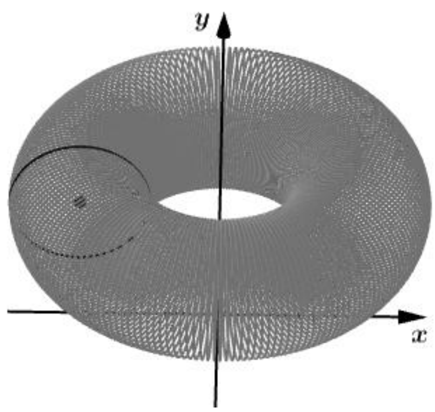

Figura 1.29: Toro de revolução

Consideremos agora no semiplano de origem na reta r, uma região R. Rotacionando a região R em torno de r, obtemos um sólido S, chamado sólido de revolução.

Exemplos de sólidos de revolução são o cilindro circular reto, o cone e a esfera. A Figura 1.30 mostra um cilindro obtido pela rotação de um retângulo em torno de uma reta r

Seja L o comprimento da curva $\mathcal{C}$. Inserindo $n+1$ pontos $P_0, P_2, ..., P_n$ em $\mathcal{C}$ de modo que os pontos P_0 e P_n coincidam com as extremidades de $\mathcal{C}$, obtemos uma linha poligonal de comprimento $L = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, onde $a_i = P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Se $\mathcal{C}$ é uma curva fechada, temos $P_0 = P_n$. Quando essa linha poligonal gira em torno de r, gera

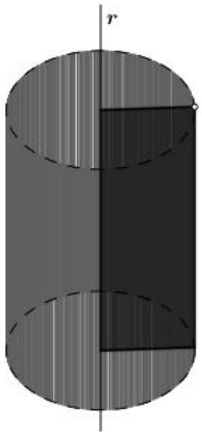

Figura 1.30: Cilindro de revolução

uma superfície que consiste em n partes, cada uma delas sendo a superfície lateral de um tronco de cone circular reto.

Capítulo 2

TEOREMAS DE PAPPUS

Este capítulo é destinado à discussão de modelos matemáticos para o cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos. Apresentaremos aqui a demonstração de dois importantes Teoremas de Pappus, um relativo ao cálculo de áreas de superfícies de revolução e o outro ao cálculo de volumes de sólidos de revolução. As mesmas foram baseadas nas demonstrações que aparecem em [12].

2.1 Área de superfícies de revolução

Sabemos como calcular áreas de polígonos e do círculo. Esse conhecimento pode ser utilizado para o cálculo de áreas de regiões que possam ser divididas em um número finito de regiões poligonais ou setores circulares. Quando a região não pode ser decomposta deste modo, o procedimento não se aplica para o cálculo de sua área. Tomamos uma curva $\mathcal{C}$ em um semiplano definido por uma reta r, o primeiro Teorema de Pappus trata do cálculo da área da superfície obtida pela revolução da curva $\mathcal{C}$ em torno de r.

Teorema 2.1.1 *A área da superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva em torno de uma reta é dada pelo produto entre o comprimento da curva rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa curva e o eixo de rotação.*

Demonstração: Seja $\mathcal{S}$ a superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva plana $\mathcal{C}$ de comprimento L em torno de uma reta r. Sejam G o centro de gravidade da curva e x a distância de G ao eixo de rotação, como mostrado na Figura 2.1.

Mostraremos aqui o caso em que a curva $\mathcal{C}$ é uma poligonal. Sejam $l_1, l_2, \ldots, l_n$ os lados dessa poligonal cujos comprimentos são $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, as distâncias dos pontos médios, que representam os centros de gravidade dos lados $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ao eixo de rotação. Então o comprimento da poligonal será dado por $L = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, como mostrado na Figura 2.2.

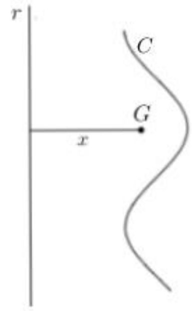

Figura 2.1: Rotação da curva $\mathcal{C}$ em torno da reta r

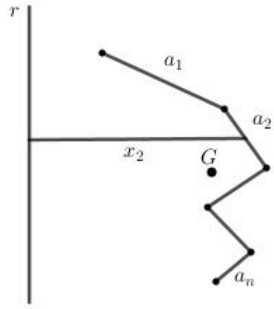

Figura 2.2: Rotação da poligonal em torno da reta r

Inicialmente, vamos encontrar a área da superfície $\mathcal{S}_k$ gerada pela rotação de um segmento $l_k = AB$ em torno de r. Tal superfície pode ser um cone, um tronco de cone, um cilindro circular reto ou uma coroa circular. A Figura 2.3 mostra o caso em que a superfície é um tronco de cone.

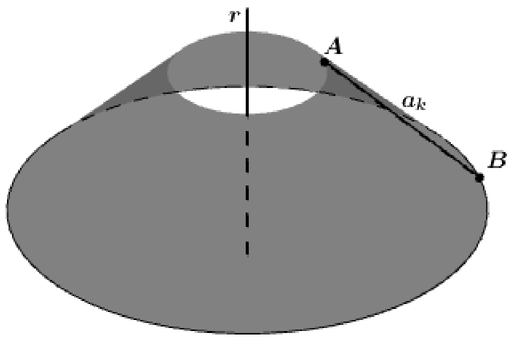

Figura 2.3: Tronco de cone

Em qualquer um dos casos, a área de $\mathcal{S}_k$ é dada por

$$\text{Area}(\mathcal{S}_k) = \pi\,(d_A + d_B)\,a_k,$$

onde d_A e d_B são, respectivamente, as distâncias dos pontos A e B ao eixo de rotação.

Sendo x_k a distância do ponto médio do segmento AB ao eixo de rotação r, temos que

$x_k = \dfrac{d_A + d_B}{2}$. Logo, a área de $\mathcal{S}_k$ ganha a forma

$$\begin{aligned}\text{Area}(\mathcal{S}_k) &= 2\pi\left(\frac{d_A+d_B}{2}\right)a_k \\ &= 2\pi x_k a_k.\end{aligned}$$

A área da superfície de revolução gerada pela poligonal é a soma das áreas das superfícies geradas pelas rotações dos segmentos l_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Assim

$$\begin{aligned}\text{Area}(\mathcal{S}) &= 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + \cdots + 2\pi x_n a_n \\ &= 2\pi\left(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n\right). \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Sendo x a distância do centro de gravidade da linha poligonal ao eixo de rotação r, temos, por (1.18) que

$$\begin{aligned}x &= \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ &= \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{L},\end{aligned}$$

donde segue que

$$xL = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n. \qquad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2), concluímos que

$$\text{Area}(\mathcal{S}) = 2\pi x L.$$

Assim, fica demonstrado o Teorema de Pappus para rotação de uma linha poligonal em torno de um eixo de rotação. ■

O passo final consiste em definir o comprimento de uma curva $\mathcal{C}$ pelo limite do comprimento de poligonais cujos vértices estão sobre a curva e tais que a distância entre dois vértices consecutivos se torna suficientemente pequena. Assim, a área da superfície gerada pela rotação de $\mathcal{C}$ em torno de um eixo é o número real cujas aproximações são as áreas das superfícies geradas pelas poligonais com vértices sobre a curva $\mathcal{C}$. Para essa demonstração se faz necessário conhecimentos de Cálculo e será feita no Capítulo 3.

2.2 Volume de sólidos de revolução

Nesta seção, iremos apresentar um modelo para o cálculo de volumes de sólidos de revolução. Tomando uma região R em um semiplano definido por uma reta r, o segundo Teorema de Pappus trata do cálculo do volume do sólido obtido pela revolução da região

R em torno de r.

Teorema 2.2.1 *O volume do sólido de revolução gerado pela rotação de uma região em torno de uma reta é dado pelo produto entre a área da região rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa região e o eixo de rotação.*

Demonstração: Seja S o sólido de revolução gerado pela rotação de uma região plana R de área A em torno de uma reta r. Sejam G o centro de gravidade da região R e x a distância de G ao eixo de revolução, conforme a Figura 2.4.

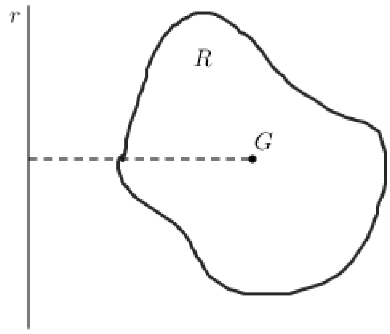

Figura 2.4: Rotação da região R em torno da reta r

Apresentaremos o caso em que a região R é um polígono retangular com lados paralelos ao eixo de revolução. Neste caso, existem retângulos justapostos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (ver Figura 2.5), tais que

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n.$$

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ as áreas de $R_1, R_2, \ldots, R_n$, respectivamente. Então $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ é a área da região R.

Inicialmente, vamos encontrar o volume do sólido S_k gerado pela rotação do retângulo $R_k = ABCD$ em torno de r, conforme a Figura 2.6. Sejam d_1 e d_2 as distâncias de r aos lados AD e BC, respectivamente, e $h = \overline{AD} = \overline{BC}$.

Assim, o volume de S_k é dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S_k) &= \pi d_2^2 h - \pi d_1^2 h \\
&= \pi \left(d_2^2 - d_1^2\right) h \\
&= 2\pi \cdot \frac{(d_2 + d_1)}{2} \cdot (d_2 - d_1)\, h \\
&= 2\pi x_k A_k,
\end{aligned}$$

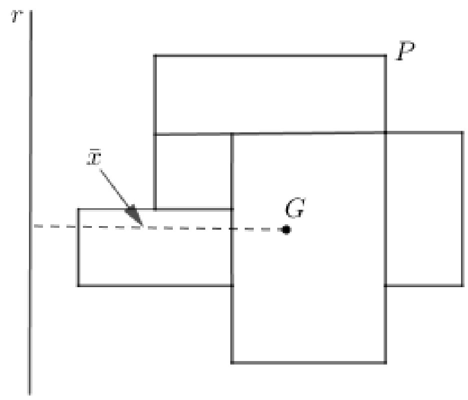

Figura 2.5: Rotação do polígono retangular em torno da reta r

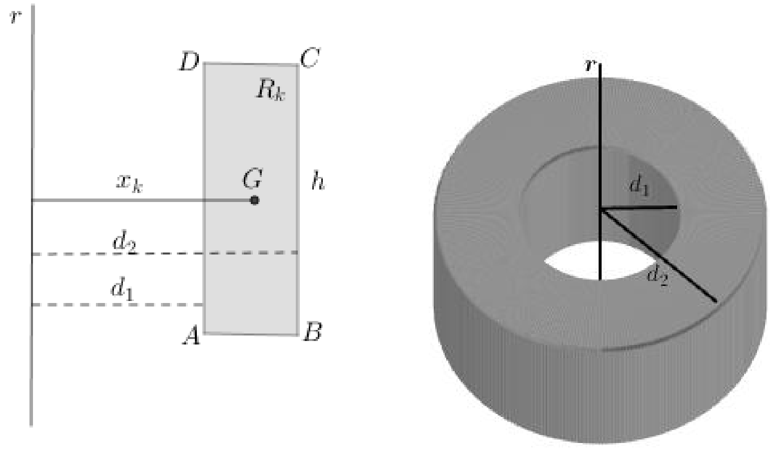

Figura 2.6: Sólido obtido pela rotação do retângulo

onde $x_k = \dfrac{d_2 + d_1}{2}$ é a distância do centro de gravidade de R_k ao eixo de revolução e $A_k = (d_2 - d_1) \cdot h$, a área de R_k.

O volume do sólido S é a soma dos volumes gerados pela rotação dos retângulos R_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, ou seja

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= 2\pi x_1 A_1 + 2\pi x_2 A_2 + \cdots + 2\pi x_n A_n \\ &= 2\pi \left(x_1 A_1 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sendo x a distância do centro de gravidade do polígono retangular a r, temos por (1.20)

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} \\ &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n}{A}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$xA = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4), concluímos que

$$\mathrm{Vol}(S) = 2\pi x A.$$

Desse modo, fica demonstrado o Teorema de Pappus para rotação de um polígono retangular em torno de um eixo de rotação. ■

O passo final consiste em definir a área de uma região R como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em R. Assim, o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno de um eixo é o número real cujas aproximações por falta são os volumes dos sólidos gerados pelos polígonos retangulares contidos em R. Apresentamos essa situação no Capítulo 3, usando ferramentas de Cálculo.

Capítulo 3

O CÁLCULO E OS TEOREMAS DE PAPPUS

Neste capítulo apresentaremos proposições referentes ao cálculo de áreas entre curvas, comprimentos de arcos de curvas, áreas de superfícies de revolução, volumes de sólidos de revolução e centro de gravidade de curvas e regiões planas. As demonstrações das proposições aqui apresentadas podem ser encontradas em [10].

3.1 Áreas entre curvas

Seja R a região limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pela curva $y = f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, como na Figura 3.1.

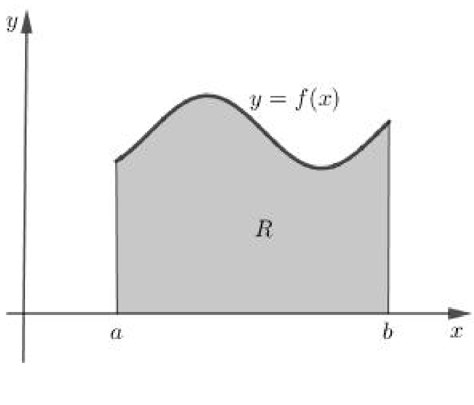

Figura 3.1: Região limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pela curva $y = f(x)$

Proposição 3.1.1 *A área da região R limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pela curva $y = f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo*

$x \in [a, b]$, é dada por

$$\text{Area}(R) = \int_a^b f(x)dx.$$

De forma mais geral, podemos tomar uma região R limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, de acordo com a Figura 3.2.

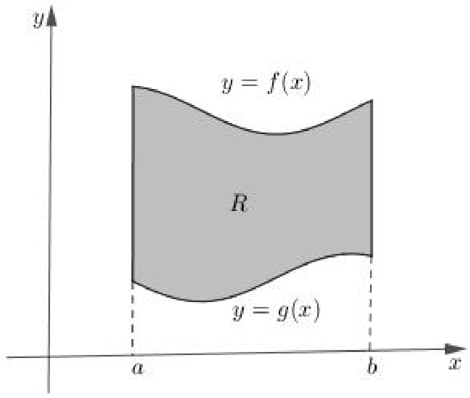

Figura 3.2: Região limitada pelas retas $x = a, x = b$, e pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Proposição 3.1.2 *A área da região R limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, é dada por*

$$\text{Area}(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

3.2 Comprimento de arco

A representação gráfica de uma equação $y = f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ é uma curva. A porção dessa curva do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, como mostrada na Figura 3.3, é chamada *arco* da curva.

Proposição 3.2.1 *Seja f uma função contínua com derivada f' contínua no intervalo $[a, b]$. Então o comprimento L do arco da curva de equação $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é dado por*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

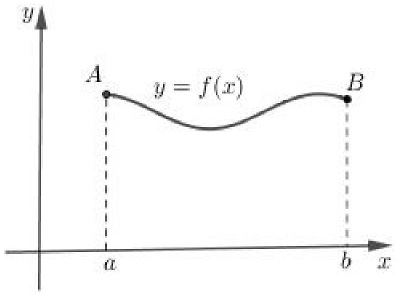

Figura 3.3: Arco de uma curva

3.3 Áreas de superfícies de revolução

Seja $\mathcal{S}$ a superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo x, do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, conforme a Figura 3.4.

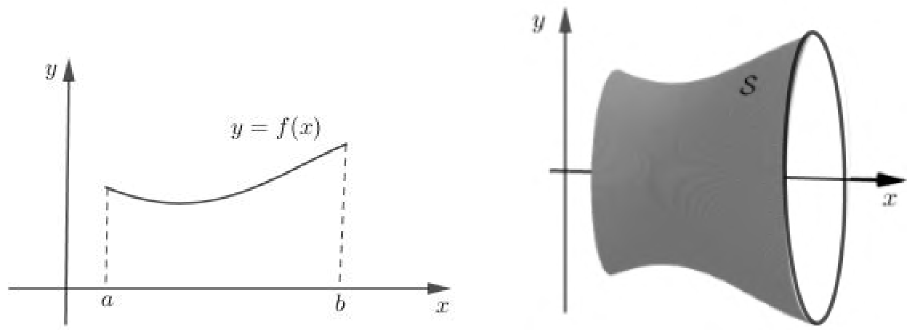

Figura 3.4: Rotação do arco da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x

Proposição 3.3.1 *Seja $\mathcal{S}$ a superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo x, do arco da curva $y = f(x)$, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, onde f é uma função com derivada f' contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então a área de $\mathcal{S}$ é dada por*

$$\text{Area}(\mathcal{S}) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Podemos considerar também superfícies de revolução $\mathcal{S}$ obtidas em torno do eixo y, do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, conforme a Figura 3.5.

Proposição 3.3.2 *Seja $\mathcal{S}$ a superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo y, do arco da curva $y = f(x)$, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, onde f é uma*

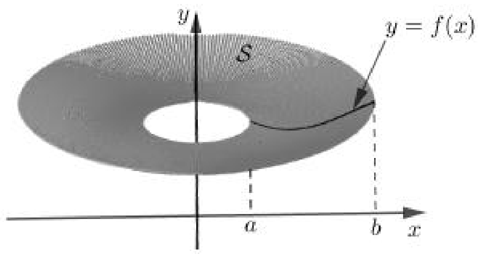

Figura 3.5: Rotação do arco da curva $y = f(x)$ em torno do eixo y

função com derivada f' contínua no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então a área de $\mathcal{S}$ é dada por

$$\text{Area}(\mathcal{S}) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

3.4 Volumes de sólidos de revolução

Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região plana R limitada pela curva $y = f(x)$ e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, conforme a Figura 3.6.

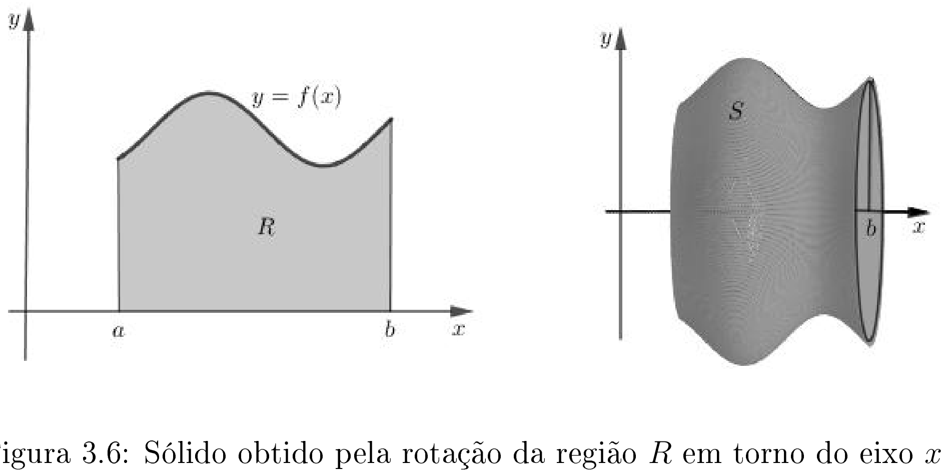

Figura 3.6: Sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo x

Proposição 3.4.1 *Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região R limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f(x)$, onde f é uma função com derivada f' contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então o volume de S é dado por*

$$\text{Vol}(S) \;=\; \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Vejamos agora o caso em que o volume de S é obtido pela rotação de R, limitada por duas funções contínuas em torno do eixo x.

Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região plana R limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, conforme a Figura 3.7.

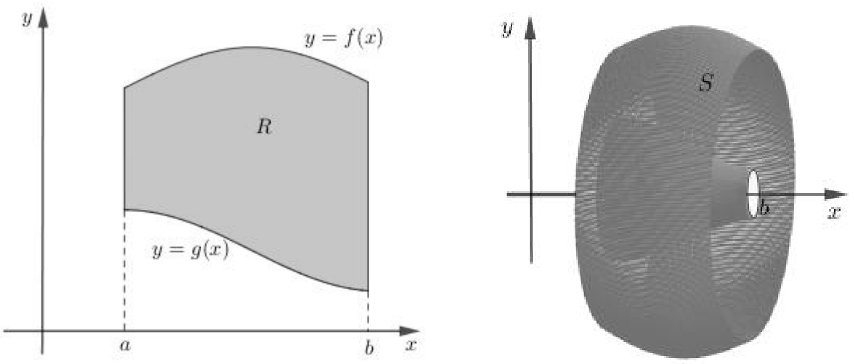

Figura 3.7: Outro sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo x

Proposição 3.4.2 *Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região R limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções com derivadas f' e g' contínuas no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então o volume de S é dado por*

$$\mathrm{Vol}(S) = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx.$$

De maneira análoga ocorre para o caso em que a região é rotacionada em torno de uma reta paralela ao eixo x.

Agora obteremos uma expressão que representa o volume de um sólido S obtido através da rotação de uma região R em torno do eixo y. Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região R limitada pela curva $y = f(x)$ e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$, conforme a Figura 3.8.

Proposição 3.4.3 *Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região R limitada pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ e pela curva $y = f(x)$, onde f é uma função com derivada f' contínua no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então o volume de S é dado por*

$$\mathrm{Vol}(S) \quad = \quad 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

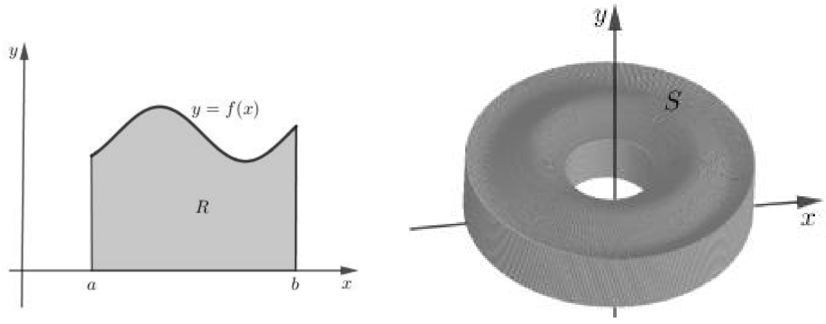

Figura 3.8: Sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo y

Vejamos agora o caso em que o volume de S é obtido pela rotação de R limitada por duas funções contínuas em torno do eixo y.

Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região R limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$, conforme a Figura 3.9.

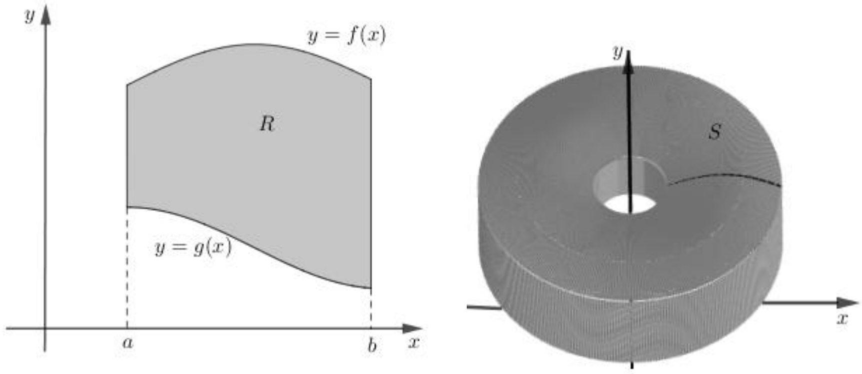

Figura 3.9: Outro sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo y

Proposição 3.4.4 *Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região R limitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções com derivadas f' e g' contínuas no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então o volume de S é dado por*

$$\mathrm{Vol(S)} = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

De maneira análoga, ocorre para o caso em que a região é rotacionada em torno de uma reta paralela ao eixo y.

3.5 Centro de gravidade do arco de uma curva

Queremos calcular agora o centro de gravidade de um arco representado pelo gráfico de uma função. A Figura 3.10 mostra um ponto G como o centro de gravidade da curva

$y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

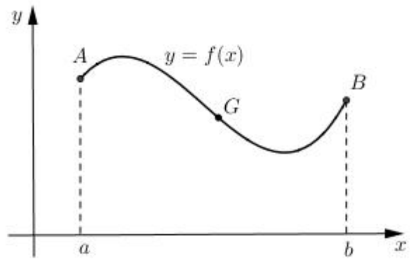

Figura 3.10: Centro de gravidade de uma curva

A proposição a seguir traz as relações para determinar o centro de gravidade do arco de uma curva, a partir do comprimento do arco obtido na Proposição 3.2.1.

Proposição 3.5.1 *Seja f uma função com derivada f' contínua em $[a, b]$. Então o centro de gravidade do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, tal que*

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx,$$

onde L é o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

3.6 Centro de gravidade de uma região plana

Seja R a região limitada pelas retas $x = a, x = b$, $y = 0$, e pela curva $y = f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [a, b]$, como apresenta a Figura 3.11

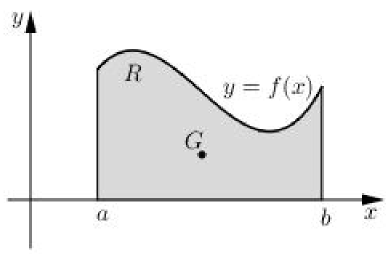

Figura 3.11: Centro de gravidade de uma região R

A proposição a seguir traz as relações para determinar o centro de gravidade de uma região R, a partir da área da região obtida na Proposição 3.1.1.

Proposição 3.6.1 *Seja R a região limitada pelas retas $x = a, x = b$, $y = 0$ e pela curva $y = f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [a, b]$. Então o centro de gravidade da região R é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, tal que*

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx,$$

onde A é a área da região R.

De forma mais geral, se R é uma região limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, como mostrado na Figura 3.12.

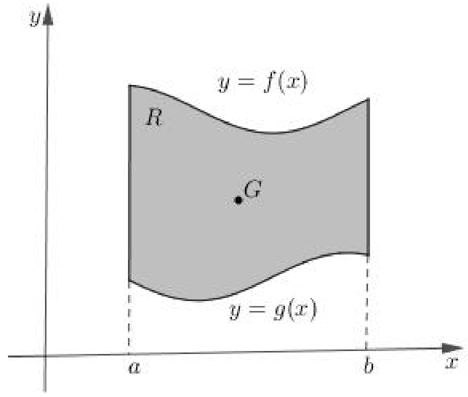

Figura 3.12: Centro de gravidade de uma região R entre curvas

A proposição a seguir nos trás as relações para determinarmos o centro de gravidade de uma região R, a partir da área da região obtida na Proposição 3.1.2.

Proposição 3.6.2 *Seja R a região limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geqslant g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Então o centro de gravidade da região R é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, tal que*

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[(f(x))^2 - (g(x))^2]dx,$$

onde A é a área da região R.

3.7 Teorema de Pappus para áreas de superfícies de revolução

Nesta seção utilizaremos os resultados obtidos nas seções 3.3 e 3.5, onde trata-se da definição de áreas de superfície de revolução e centro de gravidade do arco de uma curva.

São conhecimentos do Cálculo que utilizaremos para demonstrar o Teorema de Pappus que determina a área de superfície de revolução no caso geral.

Teorema 3.7.1 *Se uma curva é rotacionada em torno de uma reta que não a intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o comprimento da curva rotacionada e o comprimento da circunferência de raio igual à distância do centro de gravidade da curva ao eixo de rotação.*

Demonstração: Inicialmente iremos mostrar o caso em que $\mathcal{S}$ é a superfície obtida pela rotação, em torno do eixo x, do arco da curva $y = f(x)$, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, onde f é uma função com derivada f' contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sejam $G(\bar{x}, \bar{y})$ e L, o centro de gravidade e o comprimento do arco da curva, respectivamente. Então a distância de G ao eixo de rotação é $d = \bar{y}$. De acordo com a Proposição 3.3.1, a área de $\mathcal{S}$ é dada por

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{S}) &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \\ &= (2\pi L) \cdot \frac{1}{L} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Segundo a Proposição 3.5.1,

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx. \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), concluímos que

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{S}) &= 2\pi\bar{y}L \\ &= 2\pi dL. \end{aligned}$$

Agora mostraremos para o caso em que $\mathcal{S}$ é a superfície obtida pela rotação, em torno do eixo y, do arco da curva $y = f(x)$, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$, onde f é uma função com derivada f' contínua no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sejam $G(\bar{x}, \bar{y})$ e L, o centro de gravidade e o comprimento do arco da curva, respectivamente. Então a distância de G ao eixo de rotação é $d = \bar{x}$. De acordo com a Proposição 3.3.2, a área de $\mathcal{S}$ é dada por

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{S}) &= 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \\ &= (2\pi L) \cdot \frac{1}{L} \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Segundo a Proposição 3.5.1,

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx. \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4), concluímos que

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{S}) &= 2\pi\bar{x}L \\ &= 2\pi dL. \end{aligned}$$

■

De forma análoga ocorre para os casos em que a curva é rotacionada em torno de uma reta paralela a um dos eixos coordenados.

3.8 Teorema de Pappus para volumes de sólidos de revolução

Nesta seção utilizaremos os resultados obtidos nas seções (3.4) e (3.6), onde trata-se da definição de volume de sólidos de revolução e centro de gravidade de uma região plana. São conhecimentos do Cálculo que utilizaremos para demonstrar o Teorema de Pappus que determina volume de sólidos de revolução no caso geral.

Teorema 3.8.1 *Seja R uma região plana que é rotacionada em torno de uma reta r que não a intersecta. Então o volume gerado é dado pelo produto entre a área da região rotacionada e o comprimento da circunferência de raio igual à distância do centro de gravidade da região ao eixo de rotação.*

Demonstração: Inicialmente iremos mostrar o caso em que S é o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região R limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções com derivadas f' e g' contínuas no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sejam $G(\bar{x}, \bar{y})$ e A, o centro de gravidade e a área da região R, respectivamente. Então, a distância de G ao eixo de rotação é $d = \bar{y}$. De acordo com a Proposição 1.2.7, o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx \\ &= (2\pi A)\cdot\frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx \\ &= (2\pi \text{A})\cdot\frac{1}{\text{A}}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)^2 - g(x)^2]dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Segundo a Proposição 3.6.2,

$$\bar{y} = \frac{1}{\mathrm{A}} \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)^2 - g(x)^2]dx. \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= 2\pi\bar{y}L \\ &= 2\pi dL. \end{aligned}$$

Agora mostraremos para o caso em que S é o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região R, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções com derivadas f' e g' contínuas no intervalo $[a, b]$ e $x \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sejam $G(\bar{x}, \bar{y})$ e A, o centro de gravidade e a área da região R, respectivamente. Então a distância de G ao eixo de rotação é $d = \bar{x}$. De acordo com a Proposição 3.4.4, o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \\ &= (2\pi A) \cdot \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Segundo a Proposição 3.6.2,

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= 2\pi\bar{x}A \\ &= 2\pi dA. \end{aligned}$$

■

De forma análoga ocorre para os casos em que a região é rotacionada em torno de uma reta paralela a um dos eixos coordenados.

Capítulo 4

APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações relacionados aos Teoremas de Pappus. O objetivo agora é mostrar como esses teoremas podem ser muito úteis em situações em que se pretende determinar centros de gravidade, áreas de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução.

Aplicação 1 Determine a área da superfície gerada pela rotação do segmento AB, mostrado na Figura 4.1 em torno do eixo y.

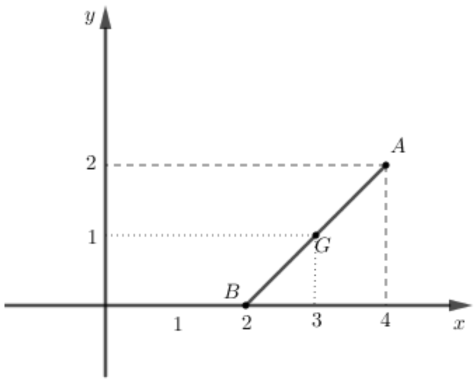

Figura 4.1: Segmento AB

Solução: Sejam $\mathcal{S}$ a superfície obtida pela rotação de AB em torno do eixo y e $G(\bar{x}, \bar{y})$, o centro de gravidade do segmento AB. Rotacionando AB em torno do eixo y, temos que $\bar{x}$ representa a distância do centro de gravidade de AB ao eixo y. Pelo teorema de Pitágoras, o comprimento AB mede $2\sqrt{2}$. Tendo $\bar{x} = 3$, teremos que a área da superfície de revolução de AB em torno de y é dada por

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{S}) &= 2\pi\bar{x}l \\ &= 2\pi \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 12\pi\sqrt{2}\, u.a. \end{aligned}$$

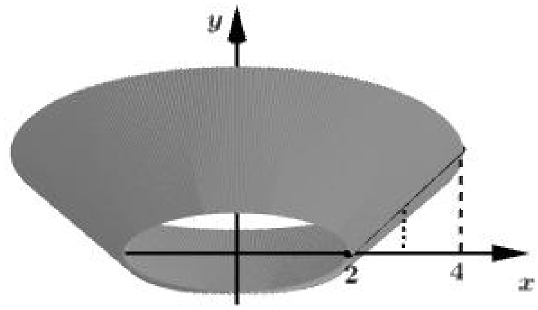

Figura 4.2: Superfície obtida pela rotação do segmento AB em torno do eixo y

$\diamond$

Aplicação 2 Encontre o volume do sólido gerado pela revolução de um trapézio $ABCD$ em torno do segmento CD.

Solução: Seja o trapézio $ABCD$ e uma reta de rotação r coincidente com o segmento CD. Ao rotacionar em torno de r, o trapézio formará um sólido S. Esse sólido é um tronco de cone, conforme a Figura 4.3.

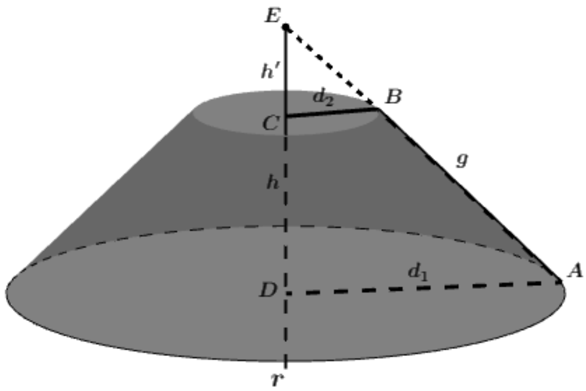

Figura 4.3: Sólido obtido pela rotação do trapézio $ABCD$ em torno de uma reta r

Suponhamos que nesse tronco raios d_1 e d_2 e geratriz g. Tomemos um ponto E sobre r e obtemos da semelhança dos triângulos ECB e EDA

$$\frac{h'}{d_2} = \frac{h+h'}{d_1} \Rightarrow h' = \frac{rh}{d_1 - d_2}. \tag{4.1}$$

O volume do tronco do cone é a diferença entre o volume do cone de raio d_1 e o volume do cone de raio d_2. Logo, o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \frac{1}{3}\left(\pi {d_1}^2 \left(h+h'\right)\right) - \frac{1}{3}\left(\pi {d_2}^2 h'\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(h'\left({d_1}^2 - {d_2}^2\right) + {d_1}^2 h\right), \end{aligned}$$

substituindo h' pelo resultado obtido em (4.1), teremos

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S) &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{rh}{R-r}\left(R^2-r^2\right)+R^2h\right)\\ &= \frac{\pi}{3}\left(rh\left(R+r\right)+R^2h\right)\\ &= \frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)\ u.v.\end{aligned}$$

Esse resultado pode ser obtido conhecendo apenas a área do trapézio e a distância do centro de gravidade do mesmo até a reta r. A área do trapézio $ABCD$ é dada pela expressão $\mathrm{Area}(ABCD) = \dfrac{(d_1+d_2)\,h}{2}$ e, para encontrarmos o centro de gravidade vamos dividir o trapézio em duas figuras, um retângulo R de lados h e d_2, e um triângulo retângulo T de catetos (d_1-d_2) e h. Dessa forma, a área do retângulo é $\mathrm{Area}(R) = d_2 \cdot h$ e do triângulo é $\mathrm{Area}(T) = \dfrac{(d_1-d_2)h}{2}$. As distâncias entre os centros de gravidade de R e T à reta r são $\dfrac{d_2}{2}$ e $\dfrac{d_1+2d_2}{3}$, respectivamente. Por (1.20), a distância do centro de gravidade do trapézio à reta r é

$$\begin{aligned}x &= \frac{d_2h\cdot\dfrac{d_2}{2}+\dfrac{(d_1-d_2)h}{2}\cdot\dfrac{(d_1+2d_2)}{3}}{d_2h+\dfrac{(d_1-d_2)h}{2}}\\ &= \frac{{d_1}^2+d_1d_2+{d_2}^2}{3\left(d_1+d_2\right)}.\end{aligned}$$

E o volume do tronco de cone toma a forma

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S) &= 2\pi\cdot\frac{{d_1}^2+d_1d_2+{d_2}^2}{3\left(d_1+d_2\right)}\cdot\frac{\left(d_1+d_2\right)h}{2}\\ &= 2\pi x A\, u.v.\end{aligned}$$

$\diamond$

Aplicação 3 (Unioeste) Na figura $ABCDE$ abaixo, tem-se: $AB = 1$ unidade, $BC = 6$ unidades, $AE = 3$ unidades e $DE = 2$ unidades. Sabendo-se, ainda, que o segmento AB é paralelo ao segmento DE e perpendicular aos segmentos BC e AE.

(a) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de $ABCDE$ em torno de BC.

(b) O volume do sólido gerado pela rotação do polígono $ABCDE$ em torno do segmento BC é igual ao volume do sólido gerado pela rotação do polígono $ABCDE$ em torno do segmento AB?

Solução: (a) Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação de $ABCDE$ em torno de BC. Posicionamos a figura sobre um plano cartesiano com BC no eixo x e rotacionamos

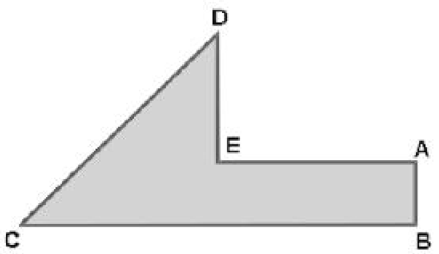

Figura 4.4: Região $ABCDE$

em torno desse eixo. A distância do centro de gravidade da região ao eixo é equivalente à coordenada $\bar{y}$ do centro de gravidade da figura composta por um triângulo retângulo PCD e um retângulo $ABPE$ onde P é a interseção de DE com BC.

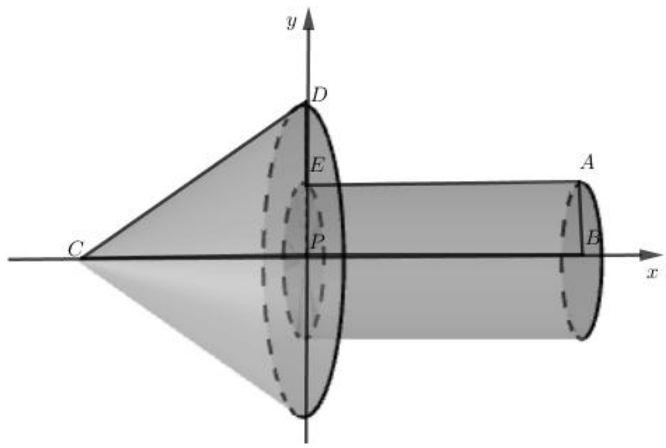

Figura 4.5: Sólido obtido pela rotação da região $ABCDE$ em torno de BC

- Para o retângulo, a distância do centro de gravidade ao eixo de rotação é $y_1 = 0,5$;
- Para o triângulo, a distância do centro de gravidade ao eixo de rotação está a $\dfrac{1}{3}$ da base. Logo $y_2 = 1$;
- As áreas do retângulo e do triângulo são $\text{Area}(ABPE) = 3 \cdot 1 = 3$ e $\text{Area}(PCD) = \dfrac{9}{2}$ $\Rightarrow \text{Area}(ABCDE) = \dfrac{15}{2}$;
- A distância d, do centro de gravidade da região composta pelo retângulo e o triângulo ao eixo de rotação é

$$\begin{aligned} d &= \frac{y_1 \text{Area}(ABPE) + y_2 \text{Area}(PCD)}{\text{Area}(ABPE) + \text{Area}(PCD)} \\ &= \frac{0,5 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{9}{2}}{3 + \frac{9}{2}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o volume de S é

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= 2\pi \cdot d \cdot A \\ &= 2\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} \\ &= 12\pi \, u.v. \end{aligned}$$

(b) Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação de $ABCDE$ em torno de AB. No plano cartesiano, o eixo y será o eixo de rotação da figura.

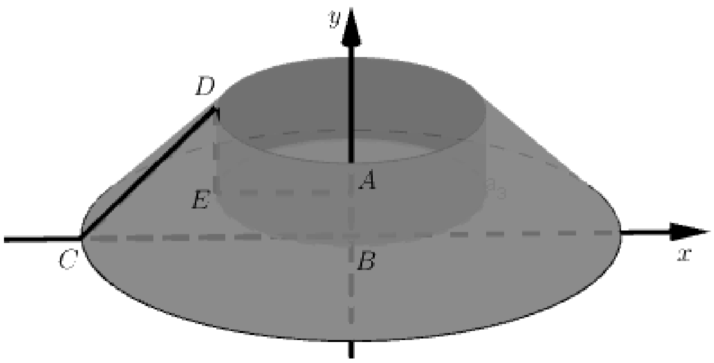

Figura 4.6: Sólido obtido pela rotação da região $ABCDE$ em torno de AB

- Para o triângulo PCD, a distância de centro de gravidade ao eixo de rotação é $x_1 = 3 + 1 = 4$ e sua área é dada por $\mathrm{Area}(PCD) = \frac{9}{2}$.
- Para o retângulo, a distância de centro de gravidade ao eixo de rotação é $x_2 = \frac{3}{2}$ e a área é dada por $\mathrm{Area}(ABPE) = 3$ o que implica que $\mathrm{Area}(ABCDE) = \frac{15}{2}$,

onde x_1 e x_2 são as distâncias do baricentro das figuras até o eixo de rotação. Seja d, a distância do centro de gravidade de $ABCDE$ ao eixo de rotação, temos que

$$\begin{aligned} d &= \frac{4 \cdot \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cdot 3}{\frac{9}{2} + 3} = \frac{\frac{36+9}{2}}{\frac{15}{2}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

E o volume do sólido S é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= 2\pi \cdot d \cdot A \\ &= 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{15}{2} \\ &= 45\pi \, u.v. \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido obtido pela rotação de $ABCD$ em torno de AB é maior do que o volume do sólido obtido pela rotação de $ABCD$ em torno de BC. $\diamond$

Aplicação 4 Girando-se o triângulo retângulo ABC, mostrado na Figura 4.7 em torno de um eixo paralelo à hipotenusa BC, contendo o vértice A. Sendo AD a altura relativa à hipotenusa com $BD = n$ e $DC = m$. O volume do sólido obtido, em função de m e n, será:

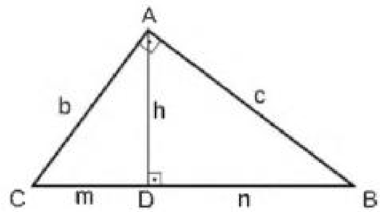

Figura 4.7: Triângulo ABC

Adote $\pi = 3$.

(a) $V = mn(m - n)$.

(b) $V = 3mn(m + n)$.

(c) $V = 2mn(m + n)$.

(d) $V = 2mn(m^2 + n^2)$.

(e) $V = 3(m^2 + n^2)(m - n)$.

Solução: Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação de $ABCDE$ em torno de um eixo paralelo a BC passando por A. Nesse problema mostramos uma solução sem fazer o uso do teorema de Pappus e outra solução fazendo o uso. Veja que ao girar a figura em torno de um eixo paralelo a BC passando por A obtemos o sólido abaixo.

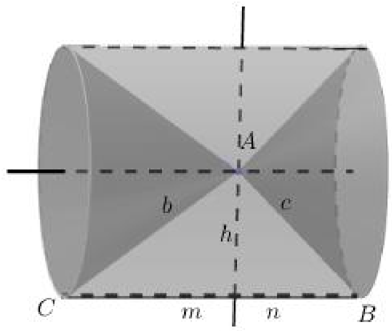

Figura 4.8: Sólido obtido pela rotação do triângulo ABC

Veja que o sólido formado é obtido de um cilindro de base h e altura $m+n$ pela retirada de dois cones com bases de raio h e alturas m e n. Assim, seu volume é:

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(S) &= 3 \cdot h^2 \cdot (m+n) - \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot h^2 \cdot m + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot h^2 \cdot n\right) \\
&= 3 \cdot h^2 (m+n) - h^2 (m+n).
\end{aligned}$$

Das relações métricas no triângulo retângulo, $h^2 = mn$. Assim

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(S) &= 3 \cdot mn (m+n) - mn (m+n) \\
&= 2mn(m+n).
\end{aligned}$$

Para usar o teorema de Pappus, precisamos da área do triângulo e da distância do centro de gravidade do mesmo até a reta de rotação. O Baricentro do triângulo encontra-se a $\frac{1}{3}$ da altura, isto é, a distância da reta de rotação ao baricentro é $\frac{2h}{3}$. A área do triângulo ABC mostrado na figura é $\text{Area}(ABC) = \frac{(m+n) \cdot h}{2}$. Logo, o volume do sólido S é

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(S) &= 2 \cdot 3 \cdot \frac{(m+n) \cdot h}{2} \cdot \frac{2h}{3} \\
&= 2 \cdot h^2 (m+n) \\
&= 2mn(m+n)\, u.v.
\end{aligned}$$

Alternativa c $\diamond$

Aplicação 5 (PROFMAT-MA13-AVF-2014) Sejam x, y e z os volumes gerados por um triângulo ABC, retângulo em A, girando sucessivamente em torno de seus lados BC, CA e AB. Prove que $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.

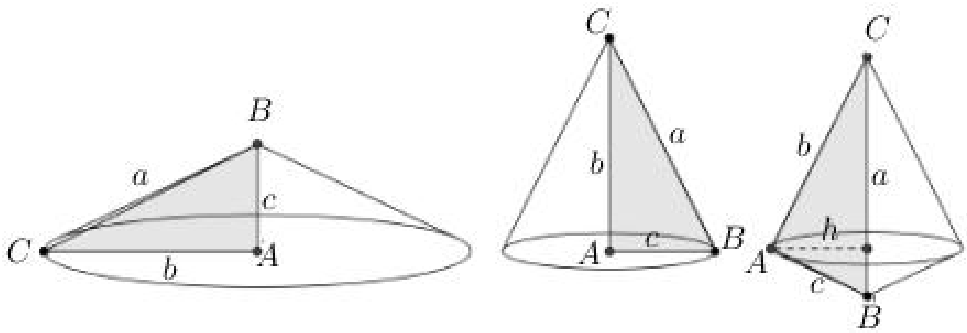

Figura 4.9: Rotações do triângulo ABC em torno de seus lados

Solução: Sejam x, y e z os volumes gerados pela rotação do triângulo ABC em torno dos lados BC, AB e AC, respectivamente, conforme a Figura 4.9. Usamos o teorema de Pappus para determinar os volumes e mostrar que $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$. Posicionemos o triângulo ABC, retângulo em A, no plano cartesiano com o vértice A na origem e os vértices B e C sobre os eixos x e y, nessa ordem. Dessa forma, como os vértices A, B e C tem coordenadas $A(0,0)$, $(b,0)$ e $(0,c)$. O centro de gravidade do triângulo é

$$\bar{x} = \frac{b+0+0}{3} = \frac{b}{3} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{0+c+0}{3} = \frac{c}{3} \quad \Rightarrow \quad G = \left(\frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Nessa situação, b e c determinam os comprimentos dos lados AB e AC, respectivamente e por convenção chamamos de a o comprimento do lado BC. Assim, os volumes são:

- x, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do triângulo ABC em torno do lado BC.

A distância d, do centro de gravidade ao segmento BC, é $\dfrac{1}{3}$ da altura do triângulo ABC com base BC. Das relações métricas do triângulo retângulo, $h = \dfrac{bc}{a}$, logo $d = \dfrac{bc}{3a}$ e o volume do sólido de revolução do triângulo ABC em torno do lado BC é

$$x = \frac{\pi(bc)^2}{3a}\, u.v. \tag{4.2}$$

- y, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do triângulo ABC em torno do lado AB.

A distância d, do centro de gravidade ao segmento AB, é $\dfrac{b}{3}$ e o volume do sólido de revolução do triângulo ABC em torno do lado AB é

$$\begin{aligned} y &= 2\pi \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{bc}{2} \\ &= \frac{\pi b^2 c}{3}\, u.v. \end{aligned} \tag{4.3}$$

- z, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do triângulo ABC em torno do lado AC.

A distância d, do centro de gravidade ao segmento AC, é $\dfrac{c}{3}$ e o volume do sólido de revolução do triângulo ABC em torno do lado AC é

$$\begin{aligned} z &= 2\pi \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{bc}{2} \\ &= \frac{\pi b c^2}{3}\, u.v. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Queremos mostrar que $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$. Das relações 4.2, 4.3 e 4.4, temos que

$$\frac{1}{x^2} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$$
$$\frac{1}{y^2} = \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2}$$
$$\frac{1}{z^2} = \frac{9}{\pi^2 b^2 c^4}.$$

Do teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2$, assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= \frac{9b^2 + 9c^2}{\pi^2 b^4 c^4} \\ &= \frac{9c^2}{\pi^2 b^4 c^4} + \frac{9b^2}{\pi^2 b^4 c^4} \\ &= \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2} + \frac{9}{\pi^2 b^2 c^4} \\ &= \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

$\diamond$

Aplicação 6 Qual a altura AD de um trapézio retângulo $ABCD$ de bases $AB = 6$ e $CD = 10$ em que ao rotacionar em torno de CD e em torno de AD, conforme a Figura 4.10, obtenha volumes iguais.

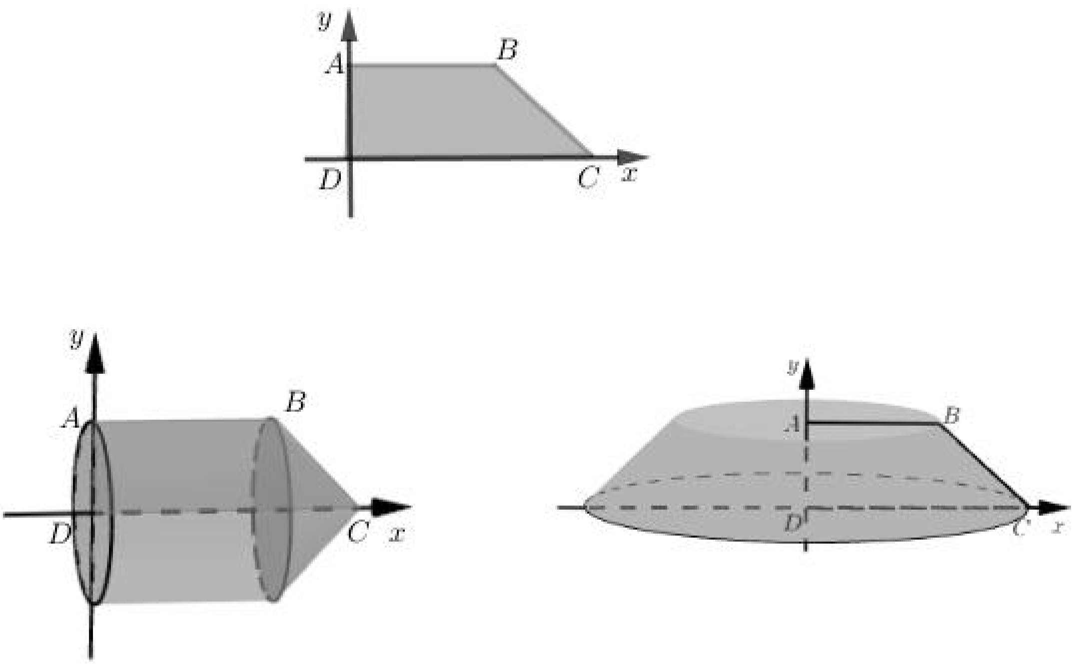

Figura 4.10: Sólidos obtidos pela rotação de $ABCD$ em torno dos segmentos CD e AD

Solução: Sejam S_1 e S_2 os sólidos de revolução obtidos pela rotação do trapézio $ABCD$ em torno dos lados CD e AD, respectivamente. O trapézio $ABCD$ pode ser seccionado por uma reta que passa pelo vértice B e é perpendicular a CD, intersetando esse segmento no ponto P. Assim o trapézio será decomposto em um retângulo $ABPD$, cuja área é $A_R = 6AD$ e um triângulo BCP com área $A_T = \dfrac{4AD}{2} = 2AD$. Com isso, a área do trapézio é

$$\begin{aligned}\text{Area}(ABCD) &= A_R + A_T\\ &= 6AD + 2AD\\ &= 8AD\, u.a.\end{aligned}$$

Podemos posicionar sobre o plano cartesiano com CD e AD sobre os eixos x e y, respectivamente. O centro de gravidade do retângulo $ABPC$ é o ponto de intersecção dos eixos de simetria, logo $\bar{x_1} = 3$ e $\bar{y_1} = \dfrac{AD}{2}$ e as coordenadas do centro de gravidade do triângulo BCP são $\bar{x_2} = \dfrac{22}{3}$ e $\bar{y_2} = \dfrac{AD}{3}$. Logo, as coordenadas do centro de gravidade do trapézio $ABCD$ são

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{6AD\cdot 3 + 2AD\cdot \frac{22}{3}}{8AD}\\ &= \frac{\frac{98AD}{3}}{8AD}\\ &= \frac{49}{12}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{6AD\cdot \frac{AD}{2} + 2AD\cdot \frac{AD}{3}}{8AD}\\ &= \frac{11(AD)^2}{24AD}\\ &= \frac{11AD}{24}.\end{aligned}$$

Rotacionando o trapézio em torno do segmento CD, teremos que a distância d do seu centro de gravidade ao eixo de rotação é $d = \bar{y} = \dfrac{11AD}{24}$. Assim, pelo teorema de Pappus, seu volume é

$$\begin{aligned}\text{Vol}(S_1) &= 2\pi\cdot\frac{11AD}{24}\cdot 8AD\\ &= \frac{22\pi(AD)^2}{3}\, u.v.\end{aligned}$$

E rotacionando em torno do segmento AD temos que a distância d do centro de gravidade ao eixo de rotação é $d = \bar{x} = \dfrac{49}{12}$, logo pelo teorema de Pappus, seu volume é

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S_2) &= 2\pi \cdot \frac{49}{12} \cdot 8AD \\ &= \frac{196\pi AD}{3}\, u.v. \end{aligned}$$

Para que $\mathrm{Vol}(S_1) = \mathrm{Vol}(S_2)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{22\pi(AD)^2}{3} &= \frac{196\pi AD}{3} \\ 22AD &= 196 \\ AD &= \frac{98}{11}\, u.c. \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\diamond$

Aplicação 7 Seja E a esfera obtida pela rotação de um semicírculo de raio r em torno de seu diâmetro. Mostre que

(a) A área da superfície da esfera é igual a $4\pi r^2$.

(b) O volume da esfera é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Solução: Seja E a esfera obtida pela rotação de um semicírculo de raio r em torno de seu diâmetro e t a reta que contém seu diâmetro. Para calcularmos a área da superfície e o volume da esfera usando como ferramentas os Teoremas de Pappus, precisamos inicialmente de um outro resultado. Na Figura 4.11 são mostrados uma reta t e um segmento AB de comprimento a.

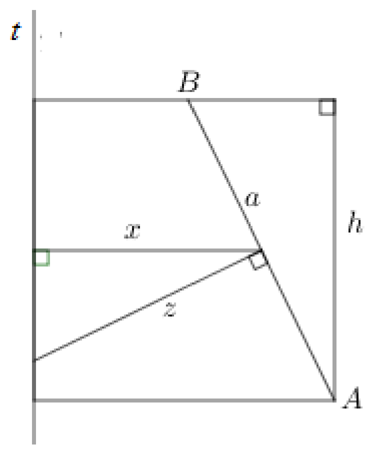

Figura 4.11: Quadrilátero e triângulos semelhantes

Seja x a distância do centro de gravidade do segmento AB até a reta t, h o comprimento da projeção de AB sobre t e z o comprimento da mediatriz de AB compreendida entre AB

e t. Chamaremos o segmento z de apótema de AB. Assim, por semelhança de triângulos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{h}{a} &= \frac{\bar{x}}{z} \\ ax &= zh. \end{aligned} \tag{4.6}$$

(a) Note que se dividirmos a semicircunferência em n segmentos $l_1, l_2, \ldots, l_n$ de comprimento a obtemos uma linha poligonal regular l_k e a projeção de cada segmento a sobre a reta t mede h_k, conforme a Figura 4.12. Assim, ao obter uma linha poligonal regular, todos os lados possuem apótema z. Com essas informações, é possível encontrar a distância d do centro de gravidade da linha poligonal ao eixo de rotação t.

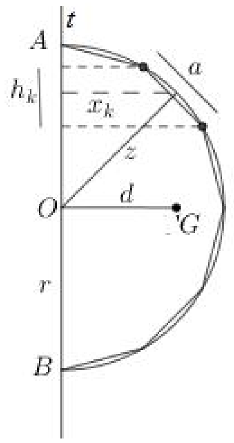

Figura 4.12: Semicircunferência e linha poligonal

Seja x_k a distância dos centros de gravidade de cada segmento l_k de comprimento a até a reta t, usando a Seção 1.11 e substituindo em (4.6), temos que

$$\begin{aligned} d &= \frac{ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n}{a + a + \ldots + a} \\ &= \frac{zh_1 + zh_2 + \ldots + zh_n}{na} \\ &= \frac{2rz}{na}. \end{aligned}$$

Se aumentarmos o número de lados da linha poligonal, na tende para o comprimento da semicircunferência πr e o apótema z para r. Daí, a distância do centro de gravidade da semicircunferência ao seu diâmetro é

$$\begin{aligned} d &= \frac{2r^2}{\pi r} \\ &= \frac{2r}{\pi}. \end{aligned}$$

Pelo primeiro teorema de Pappus, a área da superfície de E é dada por

$$\text{Area}(E) = 2\pi d L$$

onde $L = \pi r$ é o comprimento da semicircunferência de raio r. Portanto

$$\begin{aligned}\text{Area}(E) &= 2\pi\frac{2r}{\pi}\pi r \\ &= 4\pi r^2\, u.a.\end{aligned}$$

(b) Note que ao dividirmos a circunferência em n segmentos de comprimento a obtemos n triângulos isósceles $T_1, T_2, \ldots, T_k$ com bases e alturas iguais a a e z, respectivamente, conforme na Figura 4.13.

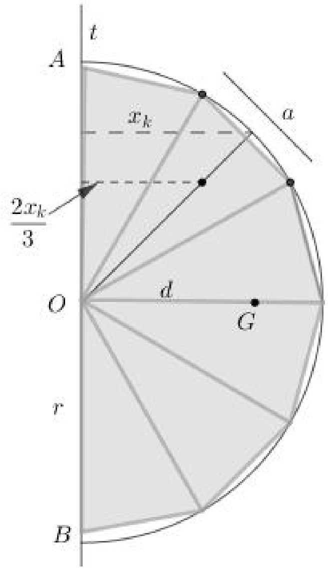

Figura 4.13: Semicírculo e triângulos isósceles

Assim a área de cada triângulo é $\frac{az}{2}$ e a distância de seus centros de gravidade à reta t que contém o diâmetro é $\frac{2}{3}x_k$, com x_k descrito no item (a). Logo, usando a Seção 1.11 e substituindo em (4.6), temos que a distância do centro de gravidade do polígono à reta t é

$$d = \frac{A_1 \cdot \frac{2}{3}x_1 + A_2 \cdot \frac{2}{3}x_2 + \cdots + A_n \cdot \frac{2}{3}x_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n},$$

com $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A = \frac{az}{2}$. Logo

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{az}{2}x_1 + \frac{az}{2}x_2 + \cdots + \frac{az}{2}x_n\right)}{nA} \\
&= \frac{\frac{z}{3}\left(ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n\right)}{nA} \\
&= \frac{\frac{z}{3}\left(zh_1 + zh_2 + \cdots + zh_n\right)}{nA} \\
&= \frac{\frac{z^2}{3}\left(h_1 + h_2 + \cdots + h_n\right)}{nA} \\
&= \frac{z^2 2r}{3nA}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Note que quando o número n de lados do polígono aumenta, sua área nA tende a $\frac{\pi r^2}{2}$ (área do semicírculo) e o apótema z tende a r. Assim, de (4.7), temos

$$\begin{aligned}
d &= \frac{r^2}{3} \cdot \frac{2r}{\frac{\pi r^2}{2}} \\
&= \frac{4r}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Pelo segundo teorema de Pappus, o volume da esfera é dado por

$$\text{Vol}(E) = 2\pi \text{Area}(E) L$$

onde $\text{Area}(E) = \frac{\pi r^2}{2}$ é a área do semicírculo de raio r. Portanto

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(E) &= 2\pi \frac{4r}{3\pi}\frac{\pi r^2}{2} \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3 \, u.v.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Aplicação 8 Caracterize um triângulo limitado pela reta $y = -ax + b$, $a > 0$ e $b > 0$, e pelos eixos coordenados e que, ao rotacionar em torno do eixo x e do eixo y gera sólidos de mesmo volume.

Solução: Seja R a região limitada pela reta $r : y = -ax + b$ e pelos eixos coordenados, como mostra a Figura 4.14.

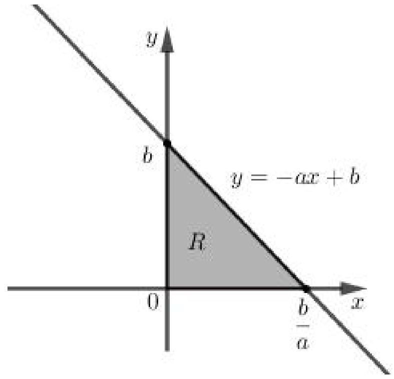

Figura 4.14: Região R limitada pelas retas $x = 0, y = 0$ e $y = -ax + b$

A área de R é

$$\begin{aligned}
\text{Area}(R) &= \int_0^{\frac{b}{a}} (-ax + b)\, dx \\
&= \left[-\frac{ax^2}{2} + bx\right]_0^{\frac{b}{a}} \\
&= \frac{b^2}{2a}\, u.a.
\end{aligned}$$

O centro de gravidade $G(\bar{x}, \bar{y})$ de R é tal que

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{\frac{b^2}{2a}} \int_0^{\frac{b}{a}} x\,(-ax + b)\, dx \\
&= \frac{b^2}{2a} \int_0^{\frac{b}{a}} \left(-ax^2 + bx\right) dx \\
&= \frac{b^2}{2a} \left[\frac{-2ax^3 + 3bx^2}{6}\right]_0^{\frac{b}{a}} \\
&= \frac{b}{3a}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{\frac{b^2}{2a}} \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{1}{2}\,(-ax + b)^2\, dx \\
&= \frac{2a}{b^2} \int_0^{\frac{b}{a}} \left(\frac{a^2x^2}{2} - abx + \frac{b^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{2a}{b^2} \left[\frac{a^2x^3}{6} - \frac{abx^2}{2} + \frac{b^2x}{2}\right]_0^{\frac{b}{a}} \\
&= \frac{b}{3}.
\end{aligned}$$

Ao rotacionar em torno do eixo x, conforme a Figura 4.15, temos que a distância d do centro de gravidade ao eixo de rotação é $d = \bar{y} = \dfrac{b}{3}$.

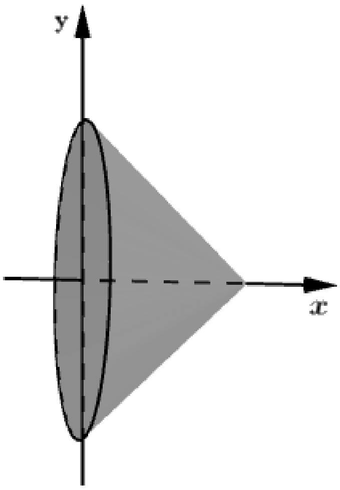

Figura 4.15: Sólido obtido pela rotação da região R em torno da reta $y = 0$

Assim, o volume do sólido de revolução S_1 obtido pela rotação da região R, em torno do eixo x é

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S_1) &= 2\pi \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{b^2}{2a} \\ &= \frac{\pi b^3}{3a}\, u.v. \end{aligned}$$

Ao rotacionar R em torno do eixo y, conforme a Figura 4.16, temos que a distância d do centro de gravidade de R ao eixo de rotação é $d = \bar{x} = \dfrac{a}{3}$.

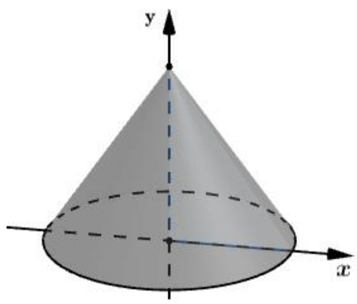

Figura 4.16: Sólido obtido pela rotação da região R em torno da reta $x = 0$

Assim, o volume do sólido de revolução S_2 obtido pela rotação do da região R em torno do eixo y é

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S_2) &= 2\pi \cdot \frac{b}{3a} \cdot \frac{b^2}{2a} \\ &= \frac{\pi b^3}{3a^2}\, u.v. \end{aligned}$$

Para que $\mathrm{Vol}(S_1) = \mathrm{Vol}(S_2)$, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{\pi b^3}{3a} &= \frac{\pi b^3}{3a^2} \\ a^2 &= a. \end{aligned}$$

Isso implica que $a = 0$ ou $a = 1$. Como $a > 0$, então $a = 1$. Daí, $\frac{b}{a} = b$. Portanto, o triângulo é retângulo e isósceles. ⋄

Aplicação 9 Toro de revolução é o lugar geométrico tridimensional formado pela rotação de uma superfície circular plana de raio r, em torno de um eixo contido no plano dessa superfície e que não a interseta.

(a) Escreva uma integral para o volume de um toro de revolução ao rotacionar o círculo $(y-R)^2 + x^2 = r^2$ em torno do eixo x. Em seguida escreva a relação de Pappus para o volume do sólido de revolução obtido pela rotação desse círculo também em torno do eixo x.

(b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do disco $(y-2)^2 + x^2 \leqslant 1$ em torno do eixo x.

Solução: (a) Seja T o toro de revolução obtido pela rotação de $(y-R)^2 + x^2 = r^2$ em torno do eixo x. Segundo a Proposição 3.4.2, o volume do sólido obtido pela rotação de uma região em torno do eixo x é $\mathrm{Vol}(S) = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx$.

Note que

$$\begin{aligned} (y-R)^2 + x^2 &= r^2 \\ (y-R)^2 &= r^2 - x^2 \\ y - R &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} \\ y &= R \pm \sqrt{r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Assim, organizando a função para y, vemos que a metade superior do círculo é dada por $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e a metade inferior é dada por $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$. Logo, o volume do toro é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(T) &= \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx \\ &= 2\pi \int_0^r \left[\left(R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2\right) - \left(R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2\right)\right] dx \\ &= 2\pi \int_0^r \left(4R\sqrt{r^2 - x^2}\right) dx \\ &= 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Agora expomos a relação de Pappus para o volume do sólido de revolução do toro T ao rotacionar o círculo $(y-R)^2+x^2=r^2$ em torno do eixo x. A distância do centro de gravidade ao eixo de rotação e a área do círculo $(y-R)^2+x^2=r^2$ são, respectivamente, R e πr^2. Logo, o volume do toro T é dado por

$$\begin{aligned}\text{Vol}(T) &= 2\pi R\pi r^2\\ &= 2R(r\pi)^2\, u.v.\end{aligned}$$

(b) O sólido S nos remete um toro de revolução obtido pela rotação do círculo $(y-2)^2+x^2\leq 1$ em torno do eixo x e que possui centro no ponto $C=(0,2)$, e raio 1. Do item (a), temos que o volume almejado é $\text{Vol}(S)=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$, com $R=2$ e $r=1$. Logo

$$\begin{aligned}\text{Vol}(S) &= 8\pi R\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\ &= 8\pi\cdot 2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\ &= 16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\end{aligned}$$

Fazendo substituição trigonométrica teremos: $x=sen(u)$, então $dx=cos(u)du$. Sendo $sen(u)=0$, então $u=0$ e para $sen(u)=1$, então $u=\dfrac{\pi}{2}$. Logo

$$\begin{aligned}\text{Vol}(S) &= 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sen^2(u)}\cdot cos(u)du\\ &= 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos^2(u)}\cdot cos(u)du\\ &= 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2(u)du.\end{aligned}$$

Note que $cos^2(u)=\dfrac{cos(2u)}{2}+\dfrac{1}{2}$. Assim

$$\begin{aligned}\text{Vol}(S) &= 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2(u)du\\ &= 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{cos(2u)}{2}+\frac{1}{2}\right)du\\ &= 16\pi\left[\frac{sen(2u)}{4}+\frac{u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 16\pi\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)-0\right]\\ &= 4\pi^2\, u.v.\end{aligned}$$

$\diamond$

Usamos agora o teorema de Pappus para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação do círculo de expressão $(y-2)^2 + x^2 \leq 1$ e que possui centro no ponto $C = (0, 2)$, e raio 1. Assim, a área do círculo e a distância do centro de gravidade ao eixo de rotação são, respectivamente, π e 2. Logo, o volume do sólido é

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= 2\pi \cdot 2\pi \\ &= 4\pi^2\, u.v. \end{aligned}$$

Aplicação 10 Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região R limitada pelas funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$, mostrada na Figura 4.17, em torno da reta $y = x + 2$.

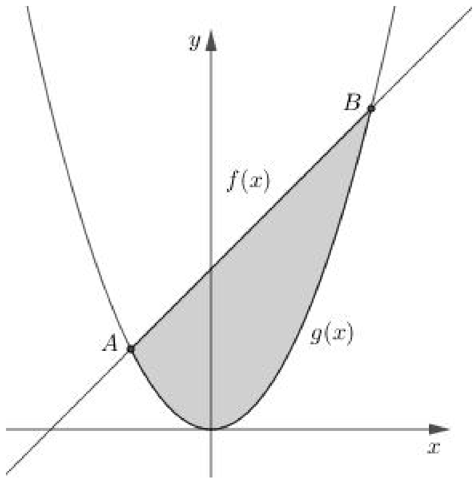

Figura 4.17: Região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Solução: Seja S o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno da reta $y = x + 2$, da região limitada pelas curvas $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$. Devemos encontrar o intervalo em relação ao eixo x que gera o volume ao rotacionar a região em torno da reta $y = x + 2$. Esse intervalo é definido pelos pontos de intersecção das funções $f(x)$ e $g(x)$. Logo

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 2.$$

A área da região entre as curvas definidas pelas funções $f(x)$ e $g(x)$ é

$$\begin{aligned} \text{Area(R)} &= \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{2} \left[(x+2) - x^2\right] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{9}{2}\, u.a. \end{aligned}$$

Nosso próximo passo agora é encontrar o centro de gravidade da região. Então

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx\\ &= \frac{2}{9}\int_{-1}^{2} x[(x+2)-x^2]dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)^2-g(x)^2]dx\\ &= \frac{2}{9}\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}[(x-2)^2-x^2]dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{4}+4x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2}\\ &= \frac{19}{15}.\end{aligned}$$

Conhecidos o centro de gravidade da região, podemos encontrar a distância desse pondo à reta de rotação

$$\begin{aligned}d &= \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}-\frac{19}{15}+2}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{37\sqrt{2}}{60}.\end{aligned}$$

Conhecendo a distância do centro de gravidade da região à reta de rotação, podemos usar o teorema de Pappus e encontrar o volume de S. Logo

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S) &= 2\pi\cdot\frac{37\sqrt{2}}{60}\cdot\frac{9}{2}\\ &= \frac{111\sqrt{2}}{20}\,u.v.\end{aligned}$$

◇

Aplicação 11 Alguns dos pioneiros do Cálculo, como Kepler e Newton, foram inspirados pelo problema de encontrar os volumes de barris de vinho. (De fato, Kepler publicou um livro em 1715, *Stereometria doliorum*, dedicado aos métodos para encontrar os volumes de barris.) Eles frequentemente aproximavam a forma dos lados por parábolas.

(a) Seja B o barril com altura h e raio máximo R é obtido pela rotação ao redor do eixo x da parábola $y = R - cx^2$, com $\dfrac{-h}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{h}{2}$, onde c é uma constante positiva. Mostre que o raio de cada extremidade do barril é $R - d$, onde $d = \dfrac{ch^2}{4}$.

(b) Mostre que o volume de B é

$$\mathrm{Vol}(B) = \frac{1}{3}\pi h \left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right),$$

onde r é o raio da base do barril.

Solução: (a) O barril é obtido rotacionando a parábola $y = R - cx^2$ no intervalo $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ em torno do eixo x. Por simetria em relação ao eixo y, os raios das bases do barril são iguais, e valem

$$\begin{aligned} r &= R - cx^2 \\ &= R - c\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= R - \frac{ch^2}{4} \\ &= R - d \end{aligned}$$

onde $d = \dfrac{ch^2}{4}$.

(b) O volume de B é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(B) &= \pi \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} [f(x)]^2\, dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} [f(x)]^2\, dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} \left[R - cx^2\right]^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} \left[R^2 - 2Rcx^2 + c^2x^4\right] dx \\ &= 2\pi \left[R^2x - \frac{2Rcx^3}{3} + \frac{c^2x^5}{5}\right]_0^{\frac{h}{2}} \\ &= 2\pi \left(R^2\frac{h}{2} - \frac{2Rc\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} + \frac{c^2\left(\frac{h}{2}\right)^5}{5}\right) \\ &= 2\pi \left(\frac{R^2h}{2} - \frac{Rch^3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{c^2h^5}{32} \cdot \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

donde segue que

$$
\begin{aligned}
&= \pi h\left(R^2 - \frac{2Rd}{3} + \frac{d^2}{5}\right)\\
&= \frac{\pi h}{3}\left(3R^2 - 2Rd + \frac{3d^2}{5}\right)\\
&= \frac{\pi h}{3}\left(2R^2 + R^2 - 2Rd + d^2 - d^2 + \frac{3d^2}{5}\right)\\
&= \frac{\pi h}{3}\left(2R^2 + r^2 - \frac{2d^2}{5}\right)
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar. ⋄

Aplicação 12 Suponha que a região A do plano, situada no semiplano $y \geqslant 0$, possa ser dividida em duas partes A_1 e A_2 às quais se aplica, em relação ao eixo x, o teorema de Pappus. Suponha, ainda, que a área de A seja igual à soma das áreas de A_1 e A_2 e $V = V_1 + V_2$ em que V_1, V_2 e V são os volumes respectivos dos sólidos obtidos, pela rotação em torno do eixo x, de A_1, A_2 e A.

(a) Mostre que, em relação ao eixo x, o teorema de Pappus aplica-se, também, a A.

(b) Fazendo o uso do teorema de Pappus, determine o centro de gravidade da região R dada por $1 \leqslant x_2 + y_2 \leqslant 4, x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

Solução: (a) Sendo A à região limitada pelo eixo x, dividimos pelo eixo y essa região em duas outras regiões A_1 e A_2. Sejam y_1, y_2 e y as ordenadas dos centros de gravidade de A_1, A_2 e A, respectivamente. Essas ordenadas correspondem as distâncias de tais centros de gravidade ao eixo que irão ser rotacionadas. Aplicando, em relação o eixo x, o teorema de Pappus, temos que

$$V_1 = 2\pi y_1 \text{Area}(A_1) \quad \text{e} \quad V_2 = 2\pi y_2 \text{Area}(A_2).$$

Queremos mostrar que o teorema também se aplica para a região A. O centro de gravidade dessa região é

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{y_1\text{Area}(A_1) + y_2\text{Area}(A_2)}{\text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2)}\\
&= \frac{2\pi y_1\text{Area}(A_1) + 2\pi y_2\text{Area}(A_2)}{2\pi\text{Area}(A_1) + 2\pi\text{Area}(A_2)}\\
&= \frac{V_1 + V_2}{2\pi\left(\text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2)\right)}\\
&= \frac{V}{2\pi\text{Area}(A)},
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$V = 2\pi y \text{Area}(A).$$

(b) A região R limitada por $1 \leqslant x_2 + y_2 \leqslant 4, x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ corresponde a região do primeiro quadrante de uma coroa circular definida entre duas circunferências concêntricas de centro $(0, 0)$ e raios 1 e 2. A Area(R) é dada por

$$\begin{aligned} \text{Area}(R) &= \frac{\pi\left(2^2 - 1^2\right)}{4} \\ &= \frac{3\pi}{4}\, u.a. \end{aligned}$$

Os volumes obtidos pelas rotações de R em torno dos eixos x e y são iguais e corresponde a diferença entre os volumes de duas semiesferas de raios 2 e 1, respectivamente. Assim o Vol(R) é dado por

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \frac{\frac{4\pi\left(2^3 - 1^3\right)}{3}}{2} \\ &= \frac{14\pi}{3}\, u.v. \end{aligned}$$

Portanto, o centro de gravidade da região R é dado por

$$\begin{aligned} x_g = y_g &= \frac{\text{Vol}(R)}{2\pi \text{Area}(R)} \\ &= \frac{28}{9\pi}. \end{aligned}$$

$\diamond$

Considerações finais

Neste trabalho apresentamos dois teoremas de Pappus, um relativo ao cálculo de áreas de superfícies de revolução e o outro ao cálculo de volumes de sólidos de revolução. O uso desses teoremas visa contribuir para a prática docente diante aplicações dos conteúdos ensinados na Matemática da Educação Básica e também no Ensino Superior.

Inicialmente destacamos áreas de algumas regiões planas, enfatizando alguns postulados referentes ao conceito de áreas de regiões e também ao conceito de volumes de alguns sólidos. Citamos áreas de algumas figuras, assim como o volume de alguns objetos arredondados. Falamos do Princípio de Cavalieri e algumas de suas aplicações. Foi dado destaque também para o centro de gravidade de curvas e regiões planas.

Como decorrência dos teoremas de Pappus, demonstramos para a rotação de uma linha poligonal, no caso de área de superfícies de revolução e rotação de um polígono retangular para volume de sólidos de revolução, ambos rotacionado em torno de uma reta de revolução. Demonstramos também utilizando ferramentas de Cálculo Integral.

Finalmente, apresentamos algumas aplicações do uso dos teoremas para calcular áreas de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução. As aplicações apresentadas neste trabalho contemplaram os conteúdos referentes a objetos arredondados que são explorados no Ensino Médio e no Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 9. ed. Fortaleza: SBM, 1995.

[2] BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

[3] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] CARVALHO, P. C. P. **Introdução a Geometria Espacial**. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[5] DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[6] DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica.** 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[7] EECKE, Paul. **Pappus D'alexandrie: La Collection Mathématique**. Paris: Desclée de Brouwer, 1933.

[8] EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Tradução de Hygino H. Rodrigues. Volume 3. 1 ed. São Paulo: Atual, 1992.

[9] Eves, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Rodrigues. Volume único. 5 ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

[10] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Volume 1. 5 ed. Rio de janeiro: LTC, 2016.

[11] LIMA, E. L. **Medida e Forma em geometria**. Volume 3. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[12] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[13] NETO, A. C. M. **Geometria**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] STEWART, J. Cálculo, v. 1. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.