



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LEILYANNE SILVA DE MORAIS

A SEQUÊNCIA DE POLYA APLICADA AO
ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

JUAZEIRO DO NORTE

2018

LEILYANNE SILVA DE MORAIS

A SEQUÊNCIA DE POLYA APLICADA AO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino da Matemática

Orientadora:

Prof^a.Dr^a.Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE

2018



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sequência de Polya Aplicada ao Ensino de Geometria Espacial

Leilyanne Silva de Morais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 30 de outubro de 2018.

Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Prof.^a Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Orientador

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis
Andrade- UFCA

Clarice Dias de Albuquerque

Prof.^a Dra. Clarice Dias de Albuquerque –
UFCA

Página da Ficha Catalográfica.

DEDICO

Dedico este trabalho de conclusão de curso a meu esposo Thiago Arrais Soares que não mediu esforços para me ajudar durante essa caminhada, que com amor e dedicação me deu a mão e, lado a lado, subimos mais um degrau em nossas vidas.

OFERECIMENTO

Ofereço esta dissertação aos meus filhos Tereza Lilian, Lourdes Maria, José Ananias e Luiz Henrique, tesouros de minha vida, motivação diária para todo meu esforço.

AGRADECIMENTOS

A Deus fonte de graça e amor.

Aos meus pais Lourival Pereira de Moraes e Terezinha Silva de Moraes exemplo de determinação e luta.

Aos meus irmãos Lourival Júnior, Lilyanne, Leidianne e Lindianne amigos e parceiros desde sempre.

A professora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa que dividiu sua sabedoria me orientando e incentivando a estudar, pesquisar e escrever.

A minha amiga Simone que é uma mãe para meus filhos.

A minha amiga Bandeira que com sua sabedoria e coragem fez o impossível tornar-se possível, nunca serei capaz de retribuir o que você fizeste por mim, o meu eterno obrigado.

Ao Colégio Paraíso, em nome de minha diretora Rosenir Fiusa, escola que acreditou no sonho de uma professora de matemática, eterna aprendiz na fonte de conhecimento que é este lugar.

Aos meus coordenadores pedagógicos Leonardo Sousa Silva e Eduardo Alves do N. Júnior que me direcionam no meu fazer pedagógico, buscando trazer sempre o melhor para os meus alunos.

A E.E.M. Governador Aduino Bezerra, na pessoa do diretor Edilberto e da ex-diretora Rosa Maria Machado que me acolheram e me fazem acreditar numa escola pública de qualidade.

Aos meus amigos, colegas professores (as): Mauro, Rogério, José Ary, Danísio, Aline Mendes, Aline Rodrigues, Ana Paula, Marcão, Flávia, companheiros de profissão que com nobreza e dedicação participam da mudança do mundo.

A minha amiga e comadre Mônica, companheira de todos os desafios, começamos juntas em 2013 e terminaremos juntas. Anjo que Deus colocou em minha vida, tua força e determinação é exemplo. Deus te abençoe infinitamente.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT de 2013 e 2016, em especial Aglaiza, Luidson, Airton, João, Eudo e Carlos que tanto compartilharam seus conhecimentos em Álgebra, Aritmética e Geometria. Com vocês fez sentido a frase "A União faz a força".

Aos professores do PROFMAT UFCA, em especial a Plácido e Clarice Dias de Albuquerque detentores de uma sabedoria notável e cuja humildade e clareza nos ensinamentos fazem o diferencial.

A todos os meus alunos que ao longo de 22 anos de magistério têm um lugar especial em meu coração.

A todos e a todas que direta ou indiretamente tornaram esse sonho realidade, o meu mais sincero muito obrigada.

A CAPES pelo apoio financeiro por meio da bolsa concedida.

A Sociedade Brasileira de Matemática pela iniciativa e preocupação em capacitar professores para desempenhar sua função de forma qualificada.

"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo."

Albert Einstein

RESUMO

Impelida a contribuir com a melhoria do ensino de matemática na qual o docente necessita praticar ações que envolvam os alunos de forma a provocar interesse pelos conteúdos e torná-los ativos na construção do conhecimento, desenvolvemos esse trabalho a partir de aulas ministradas, aplicando a Sequência de Ensino de George Polya, descrita em seu livro *A Arte de Resolver Problemas*, para estimular a resolução de questões envolvendo o cálculo de volumes de sólidos geométricos. Esta sequência sugere que a elaboração da solução de problemas matemáticos seja organizada em quatro etapas: Compreensão do problema; Estabelecimento de um plano para solucionar o problema; Execução do plano e Retrospecto da resolução, visando, assim, uma aprendizagem significativa e promovendo uma heurística que será levada além do ambiente escolar. As aulas foram ministradas a partir da óptica Ausubeliana, sempre tentando identificar na estrutura cognitiva dos alunos, conceitos relevantes preexistentes a fim de que os novos conhecimentos sejam ancorados, promovendo crescimento e maturação do aluno. Apresentamos também um capítulo sobre volume de sólidos geométricos com demonstrações das fórmulas sobre seus respectivos volumes fundamentados no Princípio de Cavalieri. Concluímos o trabalho apresentando o desenvolvimento das aulas e as soluções dadas pelos alunos utilizando as etapas da Sequência de Ensino de George Polya.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Sequência do Polya, Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

Encouraged to contribute to the improvement of mathematics teaching in which the teacher needs to practice actions that involve the students in order to provoke interest in the contents and make them active in the construction of knowledge, we develop this work from the classes taught, applying the Sequence of George Polya, described in his book *The Art of Solving Problems*, to stimulate the resolution of questions involving the calculation of volumes of geometric solids. This sequence suggests that the elaboration of the solution of mathematical problems is organized in four stages: Understanding the problem; Establishment of a plan to solve the problem; Execution of the plan and Retrospect of the resolution, aiming, thus, a significant learning and promoting a heuristic that will be taken beyond the school environment. The classes were taught from the Ausubelian perspective, always trying to identify in the cognitive structure of the students, preexisting relevant concepts in order for the new knowledge to be anchored, promoting student growth and maturation. We also present a chapter on volume of geometric solids with demonstrations of the formulas on their respective volumes based on the Cavaliere Principle. We conclude the work by presenting the development of the classes and the solutions given by the students using the steps of the George Polya Teaching Sequence.

Keywords: Mathematics Teaching, Polya Sequence, Significant Learning.

Lista de Figuras

1	Quadro resumo: Sequência de Ensino e Sequência Didática.	24
2	George Polya.	25
3	Prof. Hermínio Borges Neto.	27
4	Mapa Conceitual da Sequência de Ensino de George Polya	31
5	Visão esquemática do contínuo aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa	38
6	Bonaventura Cavaliere e sua Obra Geometria Indivisibilibus	41
7	Triângulos Semelhantes	42
8	Caso de Semelhança LLL	43
9	Caso de Semelhança LAL	44
10	Caso de Semelhança AA	44
11	Retângulos	45
12	Construção de Retângulos	46
13	Construindo um Retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$	48
14	Retângulo $R(b, h)$ e o quadrado $Q(1, 1)$	48
15	Quadrado de lado a	49
16	Paralelograma $P(b, h)$ equivalente a um Retângulo	49
17	Triângulo ABC equivalente a um Paralelogramo	50
18	Paralelepípedo reto-retângulo	51
19	Cubo de aresta unitária e sólido que os contém	51
20	Folhas de papel formando um paralelepípedo	52
21	Pilhas de Moedas	53
22	Sólidos S_1 e S_2	54
23	Paralelepípedos $P(a, b, h_1)$ e $P(a, b, h_2)$ com h_1 e h_2 comensuráveis	55
24	Paralelepípedos $P(a, b, h_1)$ e $P(a, b, h_2)$ com h_1 e h_2 incomensuráveis	56
25	Paralelepípedo $P(a, b, c)$ e cubo $P(1, 1, 1)$	58
26	Paralelepípedos	58

27	Sólidos Seccionados.	59
28	Pirâmide.	61
29	Pirâmides de mesma base.	62
30	Prisma Regular.	64
31	Divisão do Prisma em Tetraedros.	64
32	Dividindo a base da Pirâmide em Triângulos.	65
33	Prisma e Cilindro de mesma altura e bases equivalentes.	67
34	Pirâmide e Cone de mesma altura e bases equivalentes.	68
35	Cilindro equilátero de raio R e Esfera de raio R.	69
36	Simulação Estimation 2.02.	74
37	Questão Enem 2017.	76
38	Representação da forma da piscina e suas dimensões.	77
39	Planificação de uma Pirâmide Oblíqua de base quadrada.	79
40	Pirâmides Oblíquas de base quadrada.	79
41	As Pirâmides formando um Cubo.	80
42	Pirâmide Hexagonal Regular.	80
43	Pirâmide desenhada pelo aluno PE.	81
44	Execução do Plano do Problema 2 pelo aluno DR.	82
45	Retângulo ABCD.	83
46	Resolução do Problema 3 pelo aluno PL.	83
47	Questão Enem 2016.	84
48	Execução do Plano pelo aluno OL.	85
49	Tabela de respostas da questão 1 do Questionário.	86
50	Tabela de respostas da questão 11 do Questionário.	87
51	Figura da questão 1.	93
52	Figura da questão 2.	94
53	Figura da questão 3.	94
54	Figura da questão 4.	95
55	Figura da questão 5.	95

56	Figura 1 da questão 1.	96
57	Figura 2 da questão 1.	96
58	Figura da questão 2.	97
59	Figura da questão 3.	98
60	Figura da questão 1.	99
61	Figura da questão 2.	100
62	Figura da questão 3.	100
63	Figura da questão 1.	102
64	Figura da questão 2.	103
65	Figura da questão 3.	103
66	Figura da questão 1.	105
67	Figura da questão 2.	106
68	Figura da questão 3.	107
69	Figura da questão 4.	108

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	SEQUÊNCIAS DE ENSINO	21
2.1	Sequência de Ensino e Sequência Didática	22
2.2	Apresentando as Sequências de Ensino	24
2.3	Sequência de Ensino do Polya	28
2.4	Aspectos da Teoria da Aprendizagem Significativa	36
3	VOLUME DE SÓLIDOS	41
3.1	Geometria Plana	42
3.2	O Conceito de Volume	50
3.3	O Princípio de Cavaliere	52
3.4	Paralelepípedo Retângulo	54
3.5	Volume do Prisma	59
3.6	Volume da Pirâmide	60
3.7	Volume do Cilindro	66
3.8	Volume do Cone	67
3.9	Volume da Esfera	69
4	SEQUÊNCIA DE ENSINO DO POLYA NA GEOMETRIA	71
4.1	Resultados	86
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	109

1 INTRODUÇÃO

O processo de Ensino-aprendizagem na contemporaneidade apresenta desafios à prática docente, sugerindo ao educador uma mudança de postura no desenvolvimento de suas aulas, impelindo ser um docente criativo e condescendente.

Em tese, encontramos em sala de aula, estudantes passivos na construção de seu conhecimento e reprodutor de modelos de soluções de questões propostas pelos livros didáticos, ocasionando um cenário de desmotivação.

Induzida pela modificação de conduta em sala de aula e pelas informações de fácil acesso do alunado trazidas para o ambiente escolar apresentamos, nesse trabalho, uma intervenção em sala de aula aplicando a Sequência de Ensino de George Polya, na resolução de problemas, fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, como ponte reflexiva para uma mudança de atitude dos docentes.

As aulas foram desenvolvidas com intuito de aplicarmos a Sequência de Ensino elaborada por George Polya e publicada no livro "A arte de resolver problemas", buscando tornar o estudante um sujeito ativo no processo Ensino-aprendizagem e verificando simultaneamente a aplicabilidade da sequência no ensino de Geometria Espacial.

Estudioso da psicologia educacional David Ausubel elegeu uma gênese na sua teoria de aprendizagem.

Se tivesse que reduzir toda a psicologia da educação a um só princípio, diria o seguinte: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo.
(Ausubel, 1968, p. iv)

No processo de intervenção que desenvolvemos, aplicando a Sequência de Polya, foram propostas resoluções de problemas em sala de aula de forma a proporcionar um entendimento reflexivo favorecendo uma aprendizagem com significado para o discente,

afastando-se das resoluções tradicionais de questões que privilegiam a repetição de tarefas predeterminadas.

A Sequência de Polya é estruturada por quatro etapas sequenciais que se comportam adstritos, intituladas: Compreensão do Problema, Estabelecimento de um plano, Execução do plano e Retrospecto. As apresentações dos problemas a serem solucionados em cada aula sempre foram propostas pelo professor, que também direcionou os alunos a seguir as fases da sequência de ensino sugerida, norteando-os, mas sem interferir demasiadamente nos modelos¹ desenvolvidos pelos estudantes. George Polya já apresentava em seu livro "A Arte de resolver Problemas" a preocupação com o auxílio exacerbado do professor.

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (Polya, 1995, p 1)

Abordamos o conteúdo sobre volume de sólidos geométricos nas aulas da intervenção. Tal conteúdo é estudado na disciplina de Geometria Espacial no segundo ano do Ensino Médio, no qual os alunos apresentam uma rejeição inicial pelo fato da necessidade de planificar os sólidos. Para alguns estudantes a falta de materiais manipuláveis para conclusão de suas observações e a dependência do conteúdo sobre áreas de figuras planas tornam as resoluções dos problemas envolvendo sólidos geométricos, complicadas e árduas.

Desejando incentivar os discentes para o objeto de estudo proposto, transformamos o ambiente de sala de aula, em território cooperativo e dialógico, provendo sujeitos

¹Possíveis soluções para o problema proposto.

ativos na construção de suas soluções e possíveis questionamentos.

David Ausubel expressa preocupação as resoluções de problemas via atividades de memorização, apontando possível plano de recuperação de atividades ativas para os alunos.

[...] uma vasta experiência na realização de exames faz com que os estudantes se tornem adeptos da memorização, não só de proposições e de fórmulas chave, mas também de causas, exemplos, razões, explicações e formas de reconhecimento e de resolução de "problemas tipo". Pode evitar-se melhor o perigo da simulação memorizada da compreensão significativa através de colocação de questões e de problemas que possuam uma forma nova e desconhecida e exijam uma transformação máxima de conhecimentos existentes. (Ausubel, 2003, p.131)

Como professor de uma escola pública da rede Estadual da Cidade de Juazeiro do Norte, no Estado do Ceará, aplicamos a Sequência de Polya a uma turma com 40 (quarenta) alunos em média. As aulas tinham duração de 50 min (cinquenta minutos) e eram realizadas no turno regular de escola. Ocorriam dois encontros semanais com duas aulas seguidas, realizadas nos meses de Agosto e Setembro de 2018.

Como o foco era a aplicação de uma metodologia de resolução de problemas usando a Sequência de Ensino de Polya necessitava-se que o alunado já estivesse de posse das definições e equações envolvidas para o cálculo de volumes de sólidos geométricos. No mês de Agosto do corrente ano apresentamos segundo o plano anual de ensino o conteúdo proposto.

Após a realização das aulas explanatórias aplicamos um questionário para identificarmos o estado de interesse e aceitação dos conteúdos de matemática por parte dos alunos. Foi aplicada uma sondagem para levantamento de dados que nortearam o

nível inicial da aplicação da sequência de Polya e reconhecimento das concepções dos estudantes sobre o objeto em estudo.

Sempre sugerindo uma mudança de postura do docente na realização de suas aulas, aplicamos a Sequência proposta, desejando provocar o conhecimento prenunciado em cada aula visando desestruturar o ensino tradicional.

A mudança de comportamento em sala de aula nem sempre é bem compreendida e/ou desejável, mas esperamos uma reflexão pela classe docente em relação à aplicação da Sequência de Polya na resolução de problemas no ensino de matemática, visando potencializar suas vantagens que serão relatadas nos capítulos desse trabalho.

No capítulo dois abordamos as sequências de ensino confrontadas com as sequências didáticas. Apresentamos a Sequência de Ensino de Polya e comentamos a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e suas implicações para o processo de Ensino-Aprendizagem em sala de aula.

No terceiro capítulo abordamos o conteúdo volume dos primas, pirâmides, cilindros, cones e esferas os quais foram apresentados de forma aprofundada baseado no Princípio de Cavaliere.

Descreveremos no último capítulo o processo de intervenção, aplicando a Sequência de Ensino de Polya no estudo do volume dos sólidos geométricos, com alunos do segundo ano do Ensino Médio. Pensando no ofício árduo dos alunos na resolução de problemas em matemática tentamos ministrar aulas diferenciadas das tradicionais, buscando estimular os estudantes e motivar uma aprendizagem com significado e utilização no seu cotidiano.

2 SEQUÊNCIAS DE ENSINO

As Sequências de Ensino são ferramentas importantes para as *metodologias ativas*² em sala de aula, na qual o professor se comporta como orquestrador do processo ensino-aprendizagem ao invés de um genuíno transmissor de conteúdos e figurante da ideia de único detentor do conhecimento.

Percebendo ao longo da caminhada como professora uma realidade de baixo rendimento dos alunos e sucesso de poucos, necessitamos buscar alternativas para melhoria no ensino de matemática. Nesse sentido as Sequências de Ensino se configuram instrumentos de organização de ambientes de aprendizagem no qual são propostos algoritmos³ que visam promover caminhos reflexivos para a resolução de problemas.

Estudiosos aplicam as Sequências de Ensino em sala de aula com a intenção de favorecer ambiente que torne o educando parte ativa no processo educacional, retomando seu conhecimento de mundo e conduzindo a conduta do educador.

Neste capítulo apresentaremos a Sequência de Ensino, bem como Sequência Didática abordando suas diferenças e destacaremos a Sequência de Polya.

Na literatura não encontramos uma definição formal para Sequências de Ensino. Sendo assim buscamos fazer um levantamento experimental baseado na vivência docente de intervenções pedagógicas com uso das Sequências de Ensino, visando estabelecer objetivos e pontos de divergência das Sequências Didáticas.

Iniciamos com um levantamento histórico das Sequências de Ensino com suas finalidades, para reconhecer pontos de convergência, como também expomos uma visão geral da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e suas implicações para o processo Ensino Aprendizagem.

²Promove a inserção do aluno no processo de ensino e aprendizagem. O estudante deixa de ser um agente passivo e passa a ser um membro ativo na construção do saber por meio de estímulos sobre o conhecimento e análise de problemas.

³Sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas.

2.1 Sequência de Ensino e Sequência Didática

A Engenharia Didática é uma metodologia aplicada ao aperfeiçoamento da prática pedagógica. Ela trata dos procedimentos metodológicos de dimensão teórica e também experimental da pesquisa em Didática envolvidos na evolução de um curso. Podemos conceber a Engenharia Didática como sendo o alicerce do planejamento pedagógico. A sua importância para nosso trabalho se dá pela definição formal que a mesma atribui a Sequência Didática. Segundo Artigue,

Sequência Didática é um conjunto de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática [...] tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento durante as sessões ao maior número de informações que podem contribuir no desenvolvimento do fenômeno investigado. (1996 apud PAIS, 2001, p.157)

Artigue também caracteriza a Engenharia Didática como uma estrutura no campo de experiências em sala de aula observando, analisando e realizando as Sequências de Ensino. Portanto para Artigue (1996, pág. 196) a Engenharia Didática, "caracteriza-se ainda, relativamente a outros tipos de investigação baseados nas experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados".

A Engenharia Didática é apresentada em quatro fases: 1) Análises preliminares, 2) Análise a priori, 3) Experimentação e 4) Análise a posteriori, que precedem a organização da estrutura das aulas, indicando ações para garantir o *contrato didático*⁴ concebido.

⁴De acordo com Brousseau (1986 apud SILVA, 1999, p.43) "chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor."

Neste sentido construímos a Sequência Didática que irá nortear a aplicação em sala de aula da Sequência de Ensino que se deseja executar, desde o levantamento das dificuldades e obstáculos, conhecimentos prévios dos alunos, condições de trabalho até sua execução.

Como salientamos anteriormente a Sequência de Ensino não é definida formalmente e sua designação é usada inadequadamente no sentido de indicar Sequência Didática. Conforme apresentado nessa dissertação as sequências citadas são fundamentadas em etapas a serem seguidas, mas com propósitos de atuação diferentes. É importante designar a diferença entre tais concepções, com a finalidade de esclarecimento dos termos e explicitar suas propostas e objetivos.

É neste contexto que a pesquisadora SOUZA (2013, p.50), propõe um quadro⁵ de definições e objetivos para as Sequências de Ensino e Sequências Didáticas e sugere área de atuação.

Com esta tentativa de estabelecer diferença entre os conceitos ora explicitados, pudemos perceber que eles se referem basicamente a dois contextos: o ensino e a pesquisa. Apesar de possuírem uma inter-relação e por estarem associados a contextos educacionais, podem ser trabalhados separadamente ou de forma conjunta, de acordo com os objetivos da proposta em que estiverem inseridos. (SOUZA 2013, p.51)

Atestando o que propõem o quadro apresentado na figura 2.1, usaremos a Sequência Didática para planejamento e elaboração dos planos de aula, questionários e testes de sondagem que serão alicerces para aplicação da Sequência de Ensino do Polya na intervenção em sala de aula no desenvolvimento deste trabalho.

⁵Quadro alterado do original, produzido por (SOUZA, 2013, p.50), suprimindo situação didática, que não será citado neste trabalho.

	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	SEQUÊNCIA DE ENSINO
DEFINIÇÃO	Refere-se à organização de uma sequência de aulas, geralmente planejadas para pesquisas relacionadas à Didática, podendo ser também uma produção para o próprio ensino.	Refere-se à organização de um determinado saber, em etapas sequenciais, como forma de produzir um conhecimento específico.
OBJETIVOS	<ul style="list-style-type: none"> • Desenvolver pesquisas • Organizar e orientar produções voltadas para o ensino 	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar em etapas sequenciais, produções específicas de <u>ensino</u>.

Figura 1: Quadro resumo: Sequência de Ensino e Sequência Didática.

Fonte: SOUZA, 2013, P.50.

2.2 Apresentando as Sequências de Ensino

Examinando algumas Sequências de Ensino elaboradas para matemática desde 1910 por John Dewey até os dias atuais, percebemos as sequências de ensino como instrumento de direcionamento de comportamentos e ações para os professores e alunos. Podemos traçar duas vertentes abordadas nessas Sequências: Em primeiro foco existem sequências que são destinadas a sugerir algoritmos para serem seguidos pelos estudantes na resolução de problemas em sala de aula ou longe dos domínios escolares para estruturação das soluções, um segundo foco é na postura do professor como mediador de atividades em sala de aula, promovendo etapas de condução do ensino.

O matemático Húngaro George Polya (2006, p.xix) no seu livro *A Arte de Resolver Problemas*, traduzido de: *How to Solve it: a new aspect of mathematical method*, orienta aos estudantes uma estrutura de exploração de quatro passos a fim de orientar a resolução de problemas. 1) Compreensão do Problema: momento de entender o problema a ser resolvido, 2) Elaboração de um Plano: Construir um plano para solu-

cionar o problema, partindo da determinação da(s) incógnita(s), 3) Colocando o plano em ação: momento de execução do plano proposto e 4) Reflexão: revisando a solução encontrada, para validá-la e tentar aperfeiçoar o caminho seguido, para servir de norte para as próximas situações.

A estratégia apresentada por Polya é uma Sequência de Ensino que utiliza algoritmos norteadores para os alunos executarem suas atividades de resoluções de problemas. George Polya (1995, p.v) preconiza que os problemas apresentados pelos docentes devem desafiar a curiosidade dos estudantes e estimular as faculdades inventivas. Nesse processo de aprendizagem, o professor tem o considerável papel de auxiliar seus alunos, tentando compreender o que se passa em sua cabeça e realizar perguntas questionadoras e estimuladoras.



Figura 2: George Polya.

Fonte: <https://www.goodreads.com/photo/author/663311.George>

Por outro lado a Sequência de Ensino proposta pelo *Professor Hermínio Borges*⁶

⁶Precursor dos Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática no Ceará e membro do Grupo Fedathi.

(GRUPO FEDATHI)⁷ formalizada em 1996 (BORGES NETO, 1998, p.7), direcionada para estudos no ensino de matemática intitulada Sequência FEDATHI, apresenta um conjunto de etapas direcionadas aos docentes, que indiretamente coordena o comportamento dos estudantes em sala de aula, sempre se opondo ao ensino tradicional que concentra seu desenvolvimento da aprendizagem na aplicação de uma tarefa e sua solução sem etapas intermediárias. As fases da Sequência são denominadas: 1) Tomada de Posição, 2) Maturação, 3) Solução e 4) Prova.

As Sequências do Polya e FEDATHI foram concebidas em épocas diferentes e com objetivos distintos, mas percebemos pontos de confluência. Em estudo, a Pesquisadora Maria José de Araújo Sousa (Sousa, 2013, p.52), estabelece os elementos de intersecção entre as Sequências de Ensino a partir de uma investigação histórica desde Dewey - 1910, passando por Graham Walls 1926, Joseph Rossman 1931, Duncker 1945, George Polya 1954, Dina e Pierre: Modelo van Hiele 1957, Barnett Rich 1971, Nérici 1973, Schoenfeld 1985, Broussen: Teoria das Situações Didáticas 1988, Michele Artigue 1988, Gusmán 1991 até Borges Neto: Sequência Fedathi 1996, concluindo cinco pontos de convergência: 1) A compreensão do enunciado, 2) A compreensão do problema, 3) A busca de várias estratégias de resolução, 4) A aplicação das estratégias e 5) A revisão e a comprovação do processo seguido.

Para evitar enganos e soluções equivocadas é importante o estudante seguir todos os passos sugeridos. As Sequências de Ensino devem apresentar dependência entre as etapas, para fugir do modelo tradicional de ensino que estabelece uma relação unilateral entre docente e educando com a prevalência da passividade na aprendizagem por parte do aluno como propõe Mizukami (1986, p.11), relatando o conhecimento humano como meramente armazenamento de informações.

⁷Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, atualmente composto por professores da Universidade Federal do Ceará - UFC, Universidade Estadual do Ceará UECE e alunos do curso de Mestrado e Doutorado da Faculdade de Educação FACED - UFC.



Figura 3: Prof. Hermínio Borges Neto.

Fonte:

<http://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/679/submission/director/679.pdf>

...atribui-se ao sujeito um papel irrelevante na elaboração e aquisição do conhecimento. Ao indivíduo que está "adquirindo" conhecimento compete memorizar definições, enunciados de leis, sínteses e resumos que lhe são oferecidos no processo de educação formal a partir de um esquema atomístico.

As Sequências de Ensino favorecem aos discentes a busca de seus próprios conhecimentos, e ampara a prática docente no sentido de dar oportunidade de mobilização por parte dos alunos na construção de seus conhecimentos, adquirindo competências básicas para prosseguimento nas suas produções, como sugere Moretto.

A visão tradicional da aprendizagem diz que o aluno aprende todo o conteúdo que o professor passa e o devolve nas avaliações. Mas ele aprende na medida que recebe informações e delas se apropria, dando significado e construindo seu próprio conhecimento. Ensinar é oportunizar essa construção. (...) O aluno decora os números primos, mas não sabe porque eles são primos. Dessa forma, ele não assimila o conteúdo. Quem não entende o que está fazendo, não se mobiliza. (MORETTO, 2014).

Podemos perceber claramente a função de facilitador e mediador que o professor desempenha, quando adota como metodologia de ensino as Sequências de Ensino, corroborando com a definição da postura do docente em sala de aula de Assmann (2000) na qual propõe que a "função já não será a da transmissão de saberes supostamente prontos, mas o de mentores e instigadores ativos de uma nova dinâmica de pesquisa-aprendizagem."(ASSMANN, 2000, p. 08)

Ainda concebendo o papel do professor, concernente com as Orientações Curriculares do Ministério da Educação que preconiza aprendizagem autônoma e contínua, preparando o jovem para participar de uma sociedade complexa, (MEC, 2006, p.6), compreendemos o orquestrador (professor) com o importante desafio de tornar suas aulas estimulantes, despertando curiosidades e tentando minimizar as dificuldades específicas do conteúdo a ser trabalhado, para posteriormente os estudantes mobilizados prosseguirem de forma ativa na construção de seu conhecimento.

2.3 Sequência de Ensino do Polya

No seu livro "A Arte de resolver problemas" George Polya (1995, p.1) recomenda que o estudante adquira experiência autônoma pelo trabalho quanto lhe for factível e apresenta o professor como discreto cooperador do discente.

A Sequência de Ensino do Polya é uma proposta de resolução de problemas seguindo quatro etapas. Essa abordagem de ensino estimula a curiosidade e desenvolve atitudes de investigador, como aponta Dante (1991).

[...] é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela. (Dante, 1991, p.25).

Portanto o docente está diante de um desafio, estimular no alunado o gosto pela resolução de problemas. Polya (1995, p.v) acredita que os estudantes se sentem instigados quando os problemas apresentados são compatíveis com seus conhecimentos e estimulados por indagações e sugestões. Para George Polya as indagações e sugestões têm gênese no simples senso comum e apresentam generalidade que traduz para o aluno apenas uma direção geral a ser seguida na pavimentação da resolução dos problemas.

Todas as indagações e sugestões da nossa lista são naturais, simples, óbvias, apenas o bom senso comum, mas elas formulam este bom senso em termos gerais. Elas indicam uma certa conduta que se apresenta naturalmente a toda a pessoa que esteja realmente interessada no seu problema e tenha alguma dose de bom senso. (Polya, 1995, p.2)

O discente deve estar familiarizado com o conteúdo, objeto de estudo que será abordado na resolução dos problemas e deverá ter muitas oportunidades de praticar

e para facilitar a construção da solução precisará imitar confecções de soluções apresentadas anteriormente pelo docente, pois para Polya a resolução de problemas é uma competência prática (Polya, 1995, p.6).

É relevante comentar que Polya (1995, p.124) difere os problemas em dois grupos: Os "problemas de determinação" que têm objetivo de apontar o valor de uma incógnita ou construir objetos, como em certos problemas de álgebra, a incógnita é um número e em um problema de traçado geométrico a incógnita é uma figura e os "problemas de demonstração" que visam apresentar conclusões acerca da veracidade de uma afirmação claramente enunciada.

Para facilitar inferências e integrar os conceitos a respeito da Sequência do Polya, como sugere (Vekiri, 2002, p.287) apresentamos um mapa conceitual que relaciona a estrutura da sequência de ensino e o papel dos professores e alunos no processo de Ensino-Aprendizagem.

A Sequência do Polya como já declarado anteriormente é organizada por quatro etapas sequenciais: 1) Compreensão do problema, 2) Elaboração de um plano, 3) Colocando o plano em ação e 4) Reflexão. A seguir detalharemos cada fase da sequência, sempre fazendo correspondência com as condutas dos professores e alunos e levando em consideração o bom senso e as indagações pertinentes a resolução dos problemas.

i) Compreensão do Problema

A compreensão do problema tem sua origem na forma de apresentação do professor, pois os alunos necessitam desejar resolver o problema. Para Polya (1995, p.7) o problema deve ser bem selecionado, deve ser natural, nem trazendo muita dificuldade nem muito fácil.

O docente deve ter preocupação em conceder um tempo significativo, natural e inspirador na apresentação do problema, sempre se empenhando na forma de despertar no aluno o interesse pelo problema.

Familiarizado com o enunciado do problema o aluno deverá identificar quais os dados apresentados, que incógnita deve ser determinada e verificar a existência das condicionantes envolvidas, caso seja um "Problema de determinação". A partir dessas

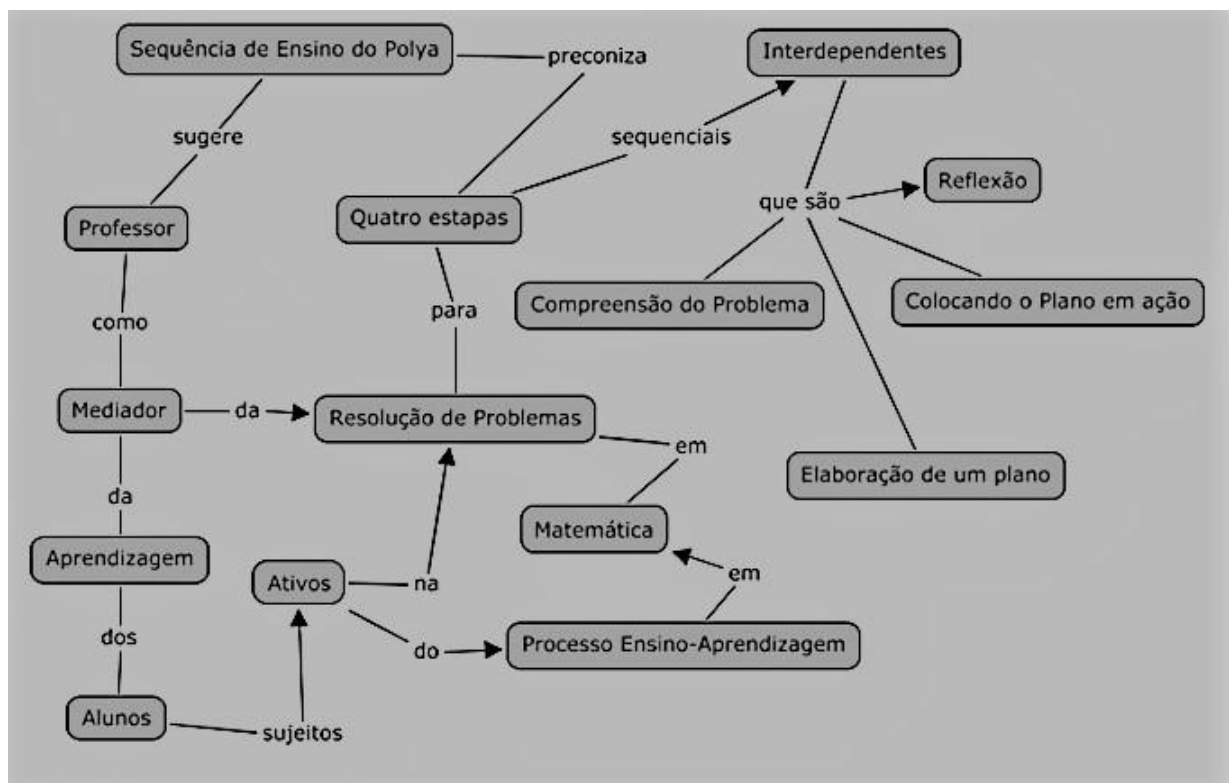


Figura 4: Mapa Conceitual da Sequência de Ensino de George Polya

Fonte: Autor.

averiguações o discente formalizará a notação adequada para encaixar os dados levantados e cuidadosamente aperfeiçoar a compreensão do problema, relacionando-o com algum outro problema anteriormente resolvido.

Para reforçar a compreensão do problema George Polya (1995, p.25) sugere dois estágios: a "familiarização" e o "Aperfeiçoamento da compreensão", onde três indagações devem ser respondidas pelos envolvidos na construção da solução da tarefa, "Por onde começar?", "Que posso fazer?" e "Qual vantagem em assim proceder?". Esses questionamentos favorecem a determinação das partes elementares do problema, hipótese e conclusão, caso seja um "Problema de demonstração" e elucidam elementos que traçarão o caminho a ser percorrido.

Para iniciar a próxima etapa da sequência confiante que o problema realmente foi compreendido, Polya (1995, p.26) recomenda, "Procure contato com seus conhecimen-

tos anteriormente adquiridos. Tente pensar naquilo que já serviu de auxílio em situações semelhantes. Tente conhecer alguma coisa de familiar no que examina e perceber algo de útil naquilo que reconhecer".

ii) Elaboração de um Plano

Nessa etapa os discentes idealizam um plano de ação a ser executado para obtenção da incógnita desejada. Novamente o professor tem importante participação no processo, auxiliando com sugestões que colaboram com o desenvolvimento das ideias fundamentais para a elaboração do plano, como preconiza Polya (1995, p.9) "A melhor coisa que pode um professor fazer pelo seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa".

Indubitavelmente essa etapa requer uma maior dedicação do alunado, logo demandará maior parte do tempo de uma aula. É necessário que o professor estabeleça critérios de delimitação a duração do tempo destinado a Elaboração do Plano, sem pressionar os estudantes.

Essa fase apresenta quesitos relevantes a serem analisadas. Como já foi dito, ter em mente um modelo de problema proposto já resolvido previamente é fundamental para a boa pavimentação da sequência, mas na maioria das ocasiões nos deparamos com uma infinidade de problemas semelhantes e que apresentam pontos de intersecção. Nessa perspectiva Polya (1995) indica qual nossa atitude diante da escolha do problema modelo precedente. "Como, então, escolher aquele, ou os poucos, que são realmente úteis? Há uma sugestão que vai diretamente a um ponto comum essencial: Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante"(Polya, 1995, p.9).

Durante a aplicação da sequência em sala de aula, os alunos farão perguntas ao professor visando obter respostas que mostrem caminhos para solucionarem o problema, mas diante dessas interrogações o docente deve indagar os estudantes com questionamentos esclarecedores e orientadores e não apresentar o desfecho explicitamente.

Caso as estratégias por analogia mencionadas para elaboração do plano, não fun-

cionem, devemos reexaminar os problemas⁸, a fim de identificar novos pontos de intersecção ou descartar parte das condicionantes. George Polya (1995) mostra uma preocupação no distanciamento do problema a ser resolvido diante dos diversos problemas análogos analisados.

Ao tentarmos aplicar vários problemas ou teoremas conhecidos, cogitando diversas modificações e ensaiando problemas auxiliares diferentes, podemos distanciar-nos tanto do nosso problema original que correremos o risco de perdê-lo por completo. Há, no entanto, uma boa indagação que nos pode trazer de volta a ele: Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? (Polya, 1995, p.10)

iii) Colocando o Plano em ação

Oportunidade dos estudantes executarem o plano estruturado na fase anterior, de forma paciente e concentrada, para honestamente desenvolver corretamente e confiante todas as operações concebidas e previstas.

Nessa etapa, a indagação "Que posso fazer?" propõe um discente detalhista e intuitivo e que,

⁸O problema a ser solucionado e o problema análogo que servirá de padrão para elaboração do plano.

Assegure o seu domínio. Realize detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que já verificou serem viáveis. Verifique a correção de cada passo, pelo raciocínio formal ou pela intuição, ou de ambas as maneiras. Se o seu problema é muito complexo, pode distinguir passos "grandes" e "pequenos", constituindo-se cada grande passo de diversos pequenos. Verifique primeiro os grandes e passe depois para os pequenos. (Polya, 1995, p.26)

Esse é o período de apresentação dos resultados obtidos, e apesar do rápido desfecho positivo para alguns discentes, outros necessitarão de mais tempo para alcançar o objetivo e poderá surgir em sala de aula uma inquietação momentânea, que o professor com sua experiência deve tornar em momento de incentivo, como aconselha os pesquisadores Santana, Borges Neto e Rocha (2004),

[...]cabe ao professor mostrar aos alunos nesta fase que a construção de conhecimentos envolve erros, acertos e confrontação de ideias. Neste sentido, o professor deve valorizar todas as soluções debatidas independentemente de estarem corretas ou não. O raciocínio deve ser valorizado e não somente as respostas. (BORGES NETO, Hermínio, SANTANA, José Rogério, ROCHA, Elizabeth Matos, 2004, p.6)

Perceptivelmente o professor encontra-se novamente em destaque nessa fase da sequência, momento em que os alunos exibirão suas produções e o docente formalizará a solução do problema.

iv) Reflexão

Esta etapa visa à consolidação da Arte de Resolver Problemas, que sugere uma retrospectiva do processo, focando no aperfeiçoamento da compreensão da solução, concernente a sugestão de Polya (1995, p. 14), "Se fizerem uma reflexão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas".

George Polya (1995) propõe uma lista de procedimentos que devem ser seguidas pelos discentes para execução desta etapa.

Considere os detalhes da resolução e procure torná-los tão simples quanto possível; examine as partes mais amplas da resolução e procure abreviá-las; tente perceber toda resolução num relance. Procure modificar vantajosamente as partes maiores e menores da resolução, melhorá-la toda e inseri-la tão naturalmente quanto for possível, nos seus conhecimentos anteriores adquiridos. Examine o método que o levou à resolução, para caracterizá-lo e utilizá-lo em outros problemas. Examine o resultado e procure utilizá-lo em outros problemas. (Polya, 1995, p.27)

O Êxito na melhoria da aprendizagem em matemática com a utilização da Sequência de Ensino do Polya decorre da postura do professor como elaborador e auxiliador já o discente como questionador, experimentador e reflexivo. Neste sentido diante da conquista de resolver problemas em matemática e convicto de ter executado o algoritmo proposto honestamente o aluno estará preparado para responder a pergunta, "É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?" (Polya, 1995, p. 14).

A Sequência de Ensino do Polya se configura como uma metodologia de ensino que promove o processo de ensino-aprendizagem, na qual o estudante a partir da realiza-

ção do plano de ação proposto pela sequência, desenvolve sua capacidade de resolver problemas e reproduzi-los futuramente.

2.4 Aspectos da Teoria da Aprendizagem Significativa

Interação é a palavra-chave: interação entre conhecimentos novos e conhecimentos prévios [...] havendo interação, ambos os conhecimentos se modificam: o novo passa a ter significados para o indivíduo e o prévio adquire novos significados, fica mais diferenciado, mais elaborado.

Marco Antônio Moreira

A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel propõe um processo para obtenção de conhecimento, ou seja, é uma aprendizagem cognitiva, que Moreira (1999, p.151) apresenta como resultado "o armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende, na sua estrutura cognitiva".

Na Teoria Ausubeliana os conceitos que os alunos trazem consigo são marcos influenciadores importantes no processo de obtenção de informações, que Ausubel (2003) define.

O processo de aquisição de informações resulta em uma alteração quer das informações recentemente adquiridas, quer do aspecto especificamente relevante da estrutura cognitiva, à qual estão ligadas as novas informações. Na maioria dos casos, as novas informações estão ligadas a um conceito ou proposição como ideias relevantes da estrutura cognitiva. De forma a indicar que a aprendizagem significativa envolve uma interação seletiva entre o novo material de aprendizagem e as ideias preexistentes na estrutura cognitiva, iremos empregar o termo ancoragem para sugerir a ligação com as ideias preexistentes ao longo do tempo (AUSUBEL, 2003, p. 03).

Moreira (2011, p.24) exprime duas condições para a aprendizagem significativa 1) o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e 2) o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender. A primeira premissa se refere a livros didáticos, simulações, aulas que se relacionem com a 'estrutura cognitiva'⁹ do alunado, que lhe atribuirá significado. Já a segunda condição mostra a dependência da existência na estrutura cognitiva de ideias-âncora relevantes, que poderão se relacionar com o conteúdo a ser trabalhado, não versa como interesse em aprender.

É relevante ressaltar que o termo significativo não pode ser atribuído ao material de aprendizagem, e sim potencialmente significativo, pois apresenta potencial de receber significado dado pelos discentes.

Ausubel focaliza uma aprendizagem que valoriza o ganho de significados, modificando ou completando o já existente, se contrapondo a aprendizagem mecânica na qual o objeto em estudo não mantém relação com conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do estudante. Mas para Moreira (2011, p.32) a aprendizagem significativa e

⁹É a estrutura cognitiva, entendida como o conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e sua organização; ou, conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular de conhecimentos (MOREIRA, 1999, p. 152)

a mecânica não constituem uma dicotomia, estão atreladas ao longo de um contínuo, como mostra o a figura 5.

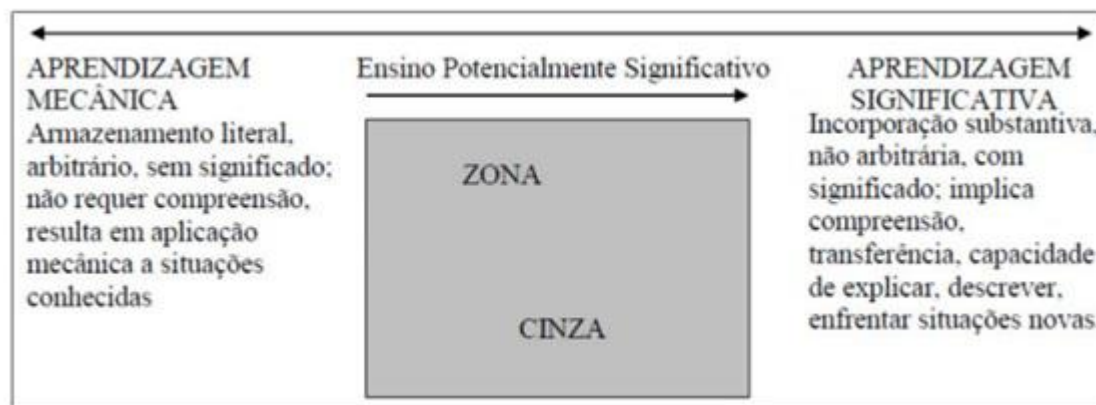


Figura 5: Visão esquemática do contínuo aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa

Fonte: MOREIRA, 2011, p.32.

A zona cinza apresentada na figura 5, é definida pelo autor (MOREIRA, 2011, p.32) como sendo o momento da transição da aprendizagem mecânica para aprendizagem significativa, é nesse período que o estudante consegue mesmo tendo iniciado os estudos mecanicamente, a partir de um Ensino Potencialmente Significativo, apresentar uma aprendizagem significativa.

Na elaboração dos primeiros subsunçores o método é mecânico, com processo de captação e incorporação de conhecimentos arbitrariamente, corroborando com a ideia de uma aprendizagem mecânica ser convertida em aprendizagem significativa. Moreira (1999, p.155) aponta transformações em tais subsunçores, "A medida que a aprendizagem começa a ser significativa, esses subsunçores vão ficando cada vez mais elaborados e mais capazes de ancorar novas informações".

Uma preocupação dos docentes é quanto à comprovação do alcance efetivo da aprendizagem significativa no processo de ensino-aprendizagem. Para Ausubel na avaliação deve prevalecer a formação e a repetição. Moreira (2011, p.52) afirma que, "É necessário buscar evidências de aprendizagem significativa, ao invés de querer determinar se

ocorreu ou não".

Portanto o professor apresenta um papel importante no processo avaliativo do aluno, no sentido de propor questões e problemas que não sejam familiares aos discentes provocando transformações do conhecimento incorporado, para completa solução da tarefa.

Outra função do educador, de incentivo a uma aprendizagem significativa proposta por Moreira (1999) compreende no mínimo quatro etapas imprescindíveis:

(1) Identificar a estrutura conceitual e proporcional da matéria de ensino, isto é, identificar os conceitos e princípios unificadores, inclusivos, com maior poder explicatório e propriedades integradoras, e organizá-los hierarquicamente de modo que, progressivamente, abranjam os menos inclusivos até chegar aos exemplos e dados específicos. (2) Identificar quais os subsunçores (conceitos, proposições, ideias claras, precisas, estáveis) relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado, que o aluno deveria ter em sua estrutura cognitiva para poder aprender significativamente este conteúdo. (3) Diagnosticar aquilo que o aluno já sabe; determinar, dentre os subsunçores especificamente relevantes (previamente identificados ao ?mapear? e organizar a matéria de ensino), quais os que estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno. (4) Ensinar utilizando recursos e princípios que facilitem a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de uma maneira significativa. (MOREIRA, 1999, p. 162)

Nessa óptica o professor após investigação dos subsunçores dos estudantes e norteado por metodologias ativas, favoráveis a reflexão, promovem uma aprendizagem

significativa ao alunado.

3 VOLUME DE SÓLIDOS

Apresentamos neste capítulo o detalhamento as proposições, axiomas, e Teoremas que fundamentam a Geometria de volume de sólidos.

Antes da definição formal, apresentamos a ideia intuitiva e alguns exemplos que facilitam a compreensão inicial do aluno do Ensino Médio ao tema abordado.

Em seguida, tomando como axioma o Princípio de Cavaliere, enunciamos e demonstramos resultados sobre volume dos prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Cavaliere expôs no tratado "Geometria Indivisibilium", publicado em 1635, cuja gênese remete-se a Demócrito e Arquimedes, dois princípios baseados nos resultados de experimentos dividindo sólidos em seções planas e paralelas.

As demonstrações apresentadas foram concebidas a nível de Ensino Médio, pois conduziram as explicações em sala de aula, contribuindo para a formação teórica dos discentes, necessária a resolução de problemas com aplicação da Sequência de Ensino do Polya.



Figura 6: Bonaventura Cavalieri e sua Obra Geometria Indivisibilibus

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/BonaventuraCavalieri>.

3.1 Geometria Plana

A seguir apresentamos algumas proposições e teoremas de Geometria Plana importantes para as demonstrações de resultados sobre volume dos sólidos.

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais.

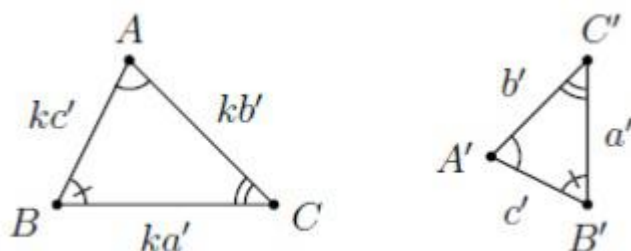


Figura 7: Triângulos Semelhantes

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital

Na figura 7, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$. Sendo, $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$, existe $\mathcal{K} > 0$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \mathcal{K}$$

O número real positivo \mathcal{K} é chamado de razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nessa ordem.

Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$, para denotar a semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$.

Se $ABC \sim A'B'C'$ na razão de semelhança \mathcal{K} , então \mathcal{K} é também a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer dos dois triângulos.

As três seguintes proposições estabelecem condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Essas proposições são chamadas de casos de semelhança entre os triângulos.

Proposição 1. Se ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \mathcal{K},$$

então $ABC \sim A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$.

Em particular $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C}'$

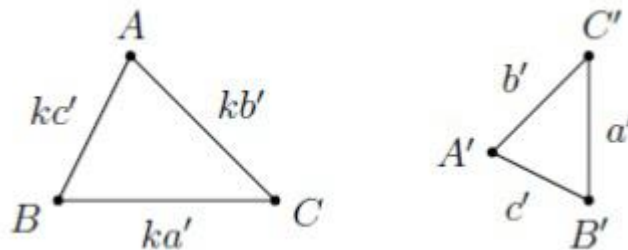


Figura 8: Caso de Semelhança LLL

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital

Proposição 2. Se ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \mathcal{K} \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B'},$$

então $ABC \sim A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$.

Em particular $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{C} = \widehat{C}'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \mathcal{K}$

Proposição 3. Se ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B}'$, então $ABC \sim A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$.

Em particular $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

A seguir apresentaremos o conceito de área de figuras Planas.

Definição 1. A Área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à uma superfície de forma tal que:

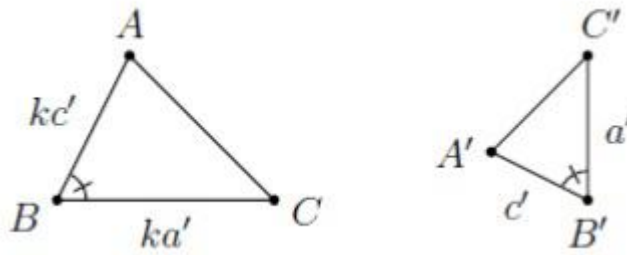


Figura 9: Caso de Semelhança LAL

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital

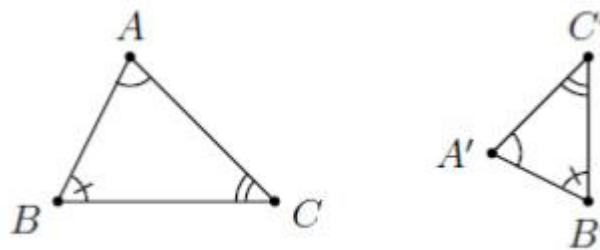


Figura 10: Caso de Semelhança AA

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital

- (i) Às superfícies equivalentes estão associadas a áreas iguais e reciprocamente.

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{Área de } (A) = \text{Área de } (B).$$

- (ii) A uma soma de superfícies está associada uma área que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

$$(C = A + B) \implies \text{Área de } (C) = \text{Área de } (A) + \text{Área de } (B).$$

- (iii) Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra.

$$B \subset A \implies \text{Área de } (B) \leq \text{Área de } (A).$$

Teorema 1. *A razão entre dois retângulos de bases congruentes (respectivamente alturas) é igual à razão entre suas alturas (respectivamente bases).*

Prova

1º Caso: h_1 e h_2 são comensuráveis

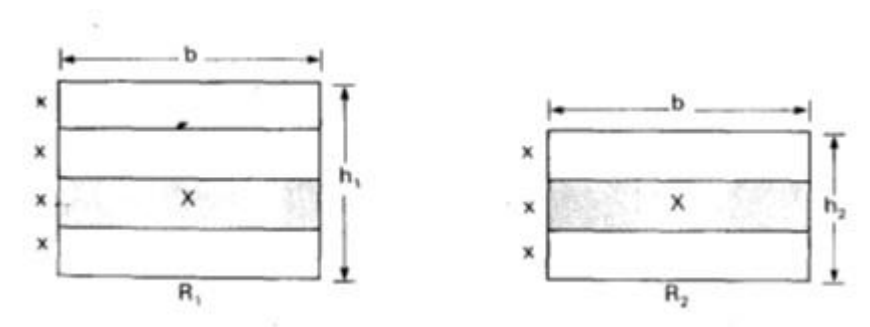


Figura 11: Retângulos

Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

Sendo h_1 e h_2 comensuráveis existe um segmento x submúltiplo comum de h_1 e h_2 tal que

$$h_1 = p.x \quad e \quad h_2 = q.x.$$

então,

$$\frac{h_1}{p} = x \quad e \quad \frac{h_2}{q} = x.$$

logo:

$$\frac{h_1}{p} = \frac{h_2}{q} \implies \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q}. \tag{1}$$

Construindo retângulos $X(b,x)$, temos

$R_1 = p.x$ e $R_2 = q.x$. Dividindo essas expressões obtemos:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q}. \tag{2}$$

Sendo assim, comparando (1) e (2) temos que:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q} = \frac{h_1}{h_2}. \quad (3)$$

2º Caso: h_1 e h_2 são incomensuráveis

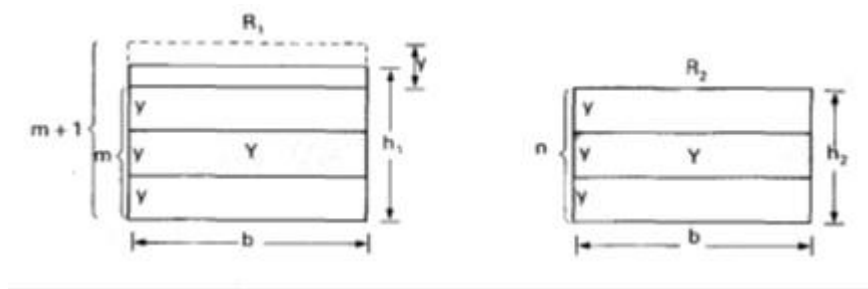


Figura 12: Construção de Retângulos

Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2 .

Consideremos um segmento y submúltiplo de h_2 (y cabe um certo número inteiro n de vezes em h_2), isto é, $h_2 = ny$.

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente y em h_1 , temos que chegando a um certo número inteiro m vezes, acontece que

$$m.y < h_1 < (m + 1).y.$$

Multiplicando membro a membro por $\frac{1}{ny}$ temos

$$m.y \cdot \frac{1}{ny} < h_1 \cdot \frac{1}{ny} < (m + 1).y \cdot \frac{1}{ny} \implies \frac{m}{n} < \frac{h_1}{ny} < \frac{h_{(m+1)}}{n}.$$

Como

$$h_2 = ny,$$

logo:

$$\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{(m + 1)}{n}. \quad (4)$$

Construindo os retângulos $Y(b,y)$ temos

$$\left\{ \begin{array}{l} m.Y < R_1 < (m+1).Y. \\ R_2 = n.Y \implies Y = \frac{R_2}{n}. \end{array} \right\}$$

Segue então que

$$m \cdot \frac{R_2}{n} < R_1 < (m+1) \frac{R_2}{n}. \quad (5)$$

Dividindo a desigualdade por R_2 temos

$$\frac{m}{n} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{(m+1)}{n}. \quad (6)$$

Sendo y submúltiplo de h_2 , pode variar, se dividirmos y o valor de n aumenta, nestas condições, $\frac{m}{n}$ e $\frac{(m+1)}{n}$ formam um par de classes contíguas¹⁰ que definem um único número real, que é $\frac{h_1}{h_2}$ pela desigualdade (4) e é $\frac{R_1}{R_2}$ pela desigualdade (6). Como esse número é único, então: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}$

Teorema 2. *A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas.*

Prova

Construindo um retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$ e aplicando duas vezes o Teorema 2 temos

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} \text{ e } \frac{R}{R_2} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (7)$$

Multiplicando estas expressões, concluímos que:

$$\frac{R_1}{R} \cdot \frac{R}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}. \quad (8)$$

Área de Polígonos

Retângulo

¹⁰Diz-se que dois subconjuntos infinitos H e K de números racionais são classes contíguas quando verificam as condições: (K1) Todo número de H é menor que todo número de K ; (K2) Para cada $\epsilon > 0$ existem $h \in H$ e $k \in K$ tais que $k - h < \epsilon$.

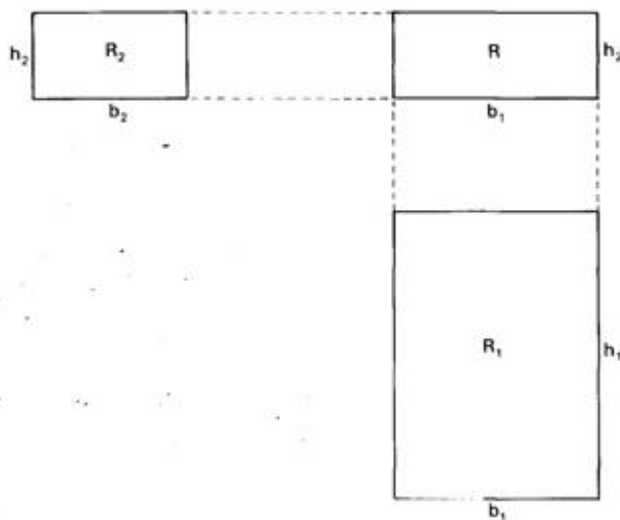


Figura 13: Construindo um Retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$.

Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

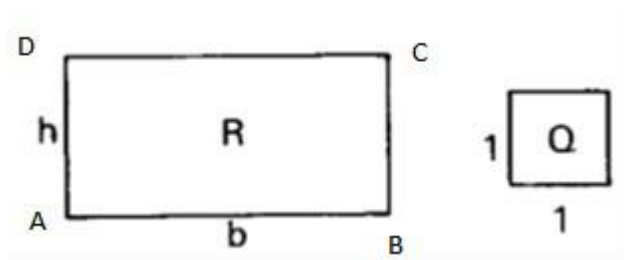


Figura 14: Retângulo $R(b, h)$ e o quadrado $Q(1, 1)$

Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

Dado o retângulo ABCD e fixado o quadrado $Q(1, 1)$ como unitário temos:

$$\text{Área do Retângulo } ABCD = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} \implies A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b \cdot h}{1 \cdot 1} \implies$$

$$A_R = (\text{medida da base } b) \cdot (\text{medida da altura } h)$$

ou simplesmente,

$$A_R = b \cdot h. \tag{9}$$

Quadrado

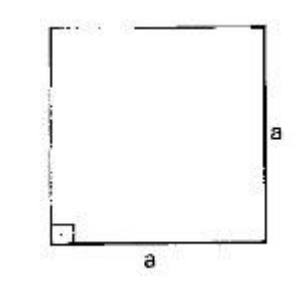


Figura 15: Quadrado de lado a

Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

Dado um quadrado de lado a , $Q(a,a)$, temos: $A_Q = a.a \implies A_Q = a^2$ (o quadrado é um caso particular do retângulo).

Paralelograma



Figura 16: Paralelograma $P(b,h)$ equivalente a um Retângulo

Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

Dado o paralelogramo $P(b,h)$ equivalente a um retângulo cuja base mede b e altura mede h . Logo:

$$A_P = A_R \implies A_P = b.h. \quad (10)$$

Triângulo

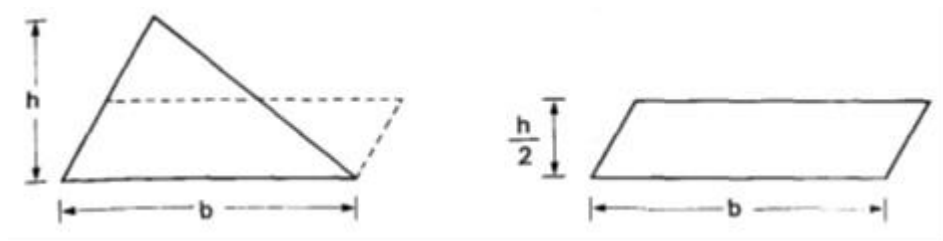


Figura 17: Triângulo ABC equivalente a um Paralelogramo

Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

Dado o triângulo $T(b, h)$ equivalente a um paralelogramo cuja base mede $\frac{h}{2}$. Sendo assim,

$$A_T = A_{\text{PARELELOGRAMO}} \implies A_T = b \cdot \frac{h}{2} \implies A_T = \frac{b \cdot h}{2} \quad (11)$$

3.2 O Conceito de Volume

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para apresentar esta ideia de quantidade de espaço através de um número, devemos compará-la com uma unidade, e o resultado dessa comparação será chamado de volume.

Com esta ideia intuitiva podemos estimular o aluno instigando-o com algumas perguntas que o façam refletir sobre a ideia de volume, como por exemplo,

1. Dadas duas caixas de formas diferentes, qual delas tem o maior volume?
2. Quantos copos com suco são necessários para encher uma jarra?
3. Quantos litros de água cabem numa caixa d'água?
4. Quantas vezes o cubo unitário de aresta 1 cm cabe em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4cm , 2cm e 3cm (figura 18) ?

Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

- i. Sólidos congruentes tem volumes iguais;

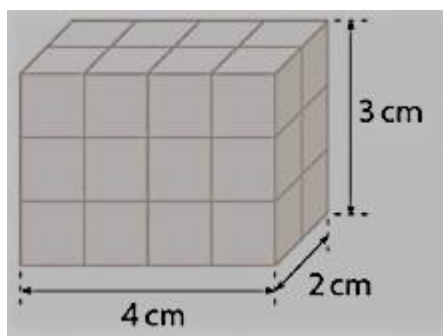


Figura 18: Paralelepípedo reto-retângulo

Fonte: Leonardo, F. M. de. Conexões com a Matemática

ii. Se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos interiores comuns, então o volume S é a soma dos volumes de S_1 com S_2 .

Comumente os sólidos são medidos por uma unidade que é o cubo de aresta unitária. Assim, o volume desse cubo é 1. Se sua aresta medir 1cm (1 centímetro), seu volume será 1cm^3 (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir 1m , seu volume será 1m^3 .

De modo geral, para calcular o volume de um sólido determinamos um número que corresponde a quantidade de vezes que esse sólido contém o cubo. Vale destacar, que nem sempre os sólidos se apresentam numa disposição espacial onde essa medida será possível, como, por exemplo, quantos cubos de aresta unitária contém uma esfera.

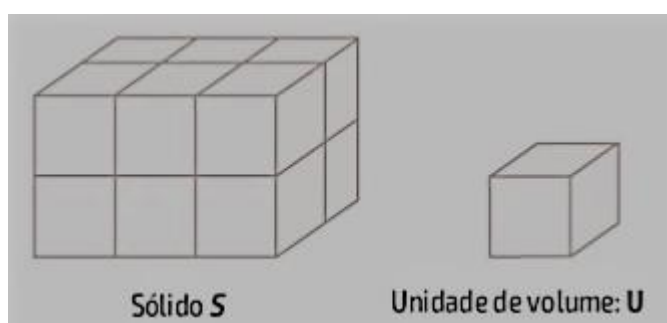


Figura 19: Cubo de aresta unitária e sólido que os contém

Fonte: Leonardo, F. M. de. Conexões com a Matemática

3.3 O Princípio de Cavaliere

Sem muita dificuldade, conseguimos apresentar o volume de um paralelepípedo retângulo, de forma acessível aos nossos alunos. Para seguir adiante com os demais sólidos, adotamos O Princípio de Cavalieri como axioma.

Antes de enunciá-lo, realizamos a seguinte atividade: sobre uma mesa, formamos uma pilha com certa quantidade de folhas de papel retangulares idênticas, perfeitamente bem arrumada, ela é um paralelepípedo retângulo como mostra a figura 9 e, portanto, tem um volume que podemos calcular. A seguir, modificamos a forma da pilha sem retirar nem pôr folha alguma, apenas encostando as mãos moldando um sólido bem diferente.

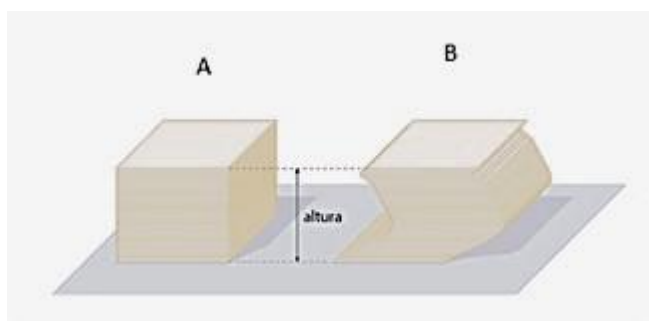


Figura 20: Folhas de papel formando um paralelepípedo

Fonte: Leonardo, F. M. de. Conexões com a Matemática

Observando as pilhas de papel é possível notar que:

- A altura das duas pilhas é a mesma, pois têm a mesma quantidade de folhas idênticas;
- As folhas das duas pilhas ficam a mesma altura da mesa e têm a mesma área, pois são idênticas;
- A segunda pilha tem o mesmo volume da primeira, já que é formada pelas mesmas folhas e, portanto, ocupa a mesma porção do espaço.

De forma intuitiva notamos que tanto no sólido A como no B, mostrados na figura 20, a parte de espaço ocupada pela coleção de folhas é a mesma, ou seja, os dois sólidos formados pela pilha de folhas tem o mesmo volume, fato este observado na disposição das folhas em igual quantidade nos dois sólidos. Podemos realizar esta atividade comparativa usando moedas, chegando a mesma conclusão, as duas pilhas de moeda possuem o mesmo volume.



Figura 21: Pilhas de Moedas

Fonte: <http://goo.gl/images/KJBFFy>

Para argumentar matematicamente a veracidade desta afirmação vamos enunciar o Princípio de Cavalieri.

Consideremos os sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α . Consideremos também o plano β , paralelo a α , que, ao seccionar S_1 , também secciona S_2 , determinando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2 .

Nessas condições, se para todo plano β tem-se que $A_1 = A_2$, então,

$$Vol.(S_1) = Vol.(S_2).$$

O fato que descrevemos acima é formalizado pelo Princípio de Cavalieri ou postulado de Cavalieri (Francesco Bonaventura Cavalieri, 1598-1647).

Axioma (Princípio de Cavalieri): São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses dois sólidos têm mesmo volume.

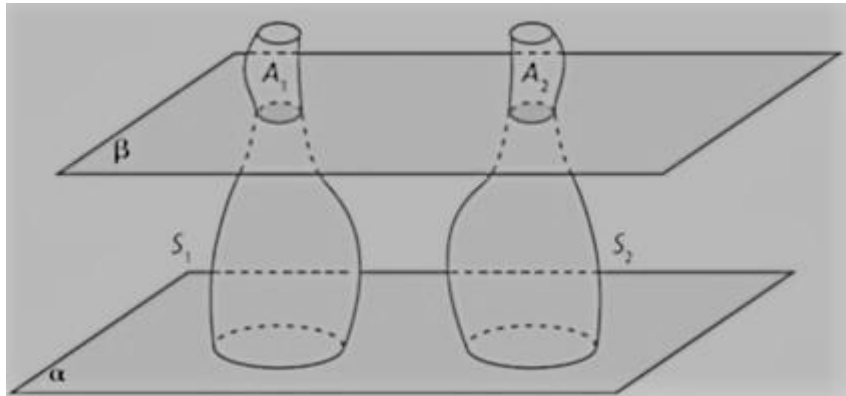


Figura 22: Sólidos S_1 e S_2

Fonte: Dante, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações

A aplicação do princípio de Cavalieri, em geral, implica a colocação dos sólidos com base num mesmo plano, paralelo ao qual estão as secções de áreas iguais.

3.4 Paralelepípedo Retângulo

Antes de apresentar o volume do paralelepípedo, precisamos de algumas proposições importantes:

Usaremos a notação $P(a,b,h)$ para indicar um paralelepípedo de comprimento a , largura b e altura h .

Proposição 4. *A razão entre dois paralelepípedos retângulos de bases congruentes é igual à razão entre suas alturas.*

Então, sejam $P(a,b,h_1)$ e $P(a,b,h_2)$ os paralelepípedos em que a,b,h_1 e a,b,h_2 representam suas dimensões.

Devemos mostrar que

$$\frac{P(a,b,h_1)}{P(a,b,h_2)} = \frac{h_1}{h_2}. \quad (12)$$

(i) h_1 e h_2 são comensuráveis:

Sendo h_1 e h_2 comensuráveis existe um segmento x submúltiplo comum de h_1 e h_2 tal que

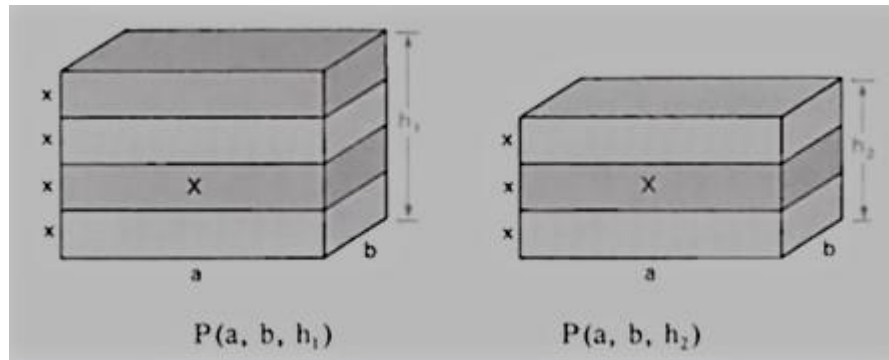


Figura 23: Paralelepípedos $P(a, b, h_1)$ e $P(a, b, h_2)$ com h_1 e h_2 comensuráveis
 Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

$$h_1 = p.x \quad e \quad h_2 = q.x.$$

então,

$$\frac{h_1}{p} = x \quad e \quad \frac{h_2}{q} = x.$$

logo:

$$\frac{h_1}{p} = \frac{h_2}{q} \implies \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q}. \quad (13)$$

Construindo os paralelepípedos $X(a,b,x)$ temos

$$P(a, b, h_1) = pX \quad e \quad P(a, b, h_2) = qX \implies \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{p}{q}. \quad (14)$$

Sendo assim, comparando (13) e (14) temos

$$\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{p h_1}{q h_2}. \quad (15)$$

(ii) h_1 e h_2 são incomensuráveis:

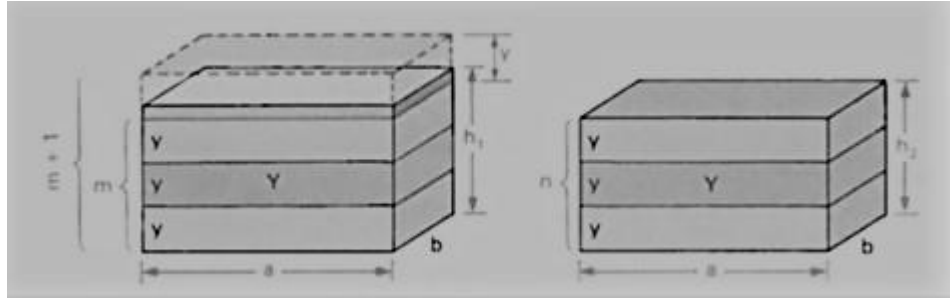


Figura 24: Paralelepípedos $P(a, b, h_1)$ e $P(a, b, h_2)$ com h_1 e h_2 incomensuráveis
 Fonte: DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2 .

Consideremos um segmento y submúltiplo de h_2 (y cabe um certo número inteiro n de vezes em h_2), isto é, $h_2 = ny$.

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente y em h_1 , temos que chegando a um certo número inteiro m vezes, acontece que:

$$m \cdot y < h_1 < (m + 1) \cdot y \quad (16)$$

Multiplicando membro a membro por $\frac{1}{ny}$ temos

$$m \cdot y \cdot \frac{1}{ny} < h_1 \cdot \frac{1}{ny} < (m + 1) \cdot y \cdot \frac{1}{ny} \implies \frac{m}{n} < \frac{h_1}{ny} < \frac{h_{(m+1)}}{n}. \quad (17)$$

Como $h_2 = ny$, logo:

$$\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{(m + 1)}{n}. \quad (18)$$

Construindo os Paralelepípedos $Y(a, b, y)$ temos

$$m \cdot Y < P(a, b, h_1) < (m + 1)Y. \quad (19)$$

Multiplicando membro a membro por $\frac{1}{nY}$ seguem as implicações

$$mY \cdot \frac{1}{nY} < P(a, b, h_1) \cdot \frac{1}{nY} < (m+1)Y \cdot \frac{1}{nY} \implies \frac{m}{n} < \frac{P(a, b, h_1)}{nY}. \quad (20)$$

Mas $nY = P(a, b, h_2)$, então

$$\frac{m}{n} < \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} < \frac{m+1}{n}. \quad (21)$$

Note que, sendo y submúltiplo de h_2 , y pode variar, e dividindo y , aumentamos n .

Nessas condições, $\frac{m}{n}$ e $\frac{(m+1)}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{h_1}{h_2}$ pela expressão (18) e $\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)}$ pela expressão (21), como esse número é único, concluímos de (18) e (21) que

$$\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{(m+1)}{n} \text{ e } \frac{m}{n} < \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} < \frac{(m+1)}{n}. \quad (22)$$

Sendo assim:

$$\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}. \quad (23)$$

Seja $P(a, b, c)$ o paralelepípedo retângulo de dimensões a , b e c . Vamos medir esse paralelepípedo com o cubo unitário, isto é, com o paralelepípedo $P(1, 1, 1)$. Para isso, estabelecemos a razão $\frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)}$, que será o volume procurado, ou seja, $V = \frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)}$.

Consideremos, então, os paralelepípedos $P(a, b, c)$, $P(a, b, 1)$, $P(a, 1, 1)$ e $P(1, 1, 1)$ em que 1 é a unidade de comprimento.

Com base na Propriedade 5 enunciada anteriormente temos:

- $\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} = \frac{c}{1}$ (i), bases (a, b) congruentes;
- $\frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} = \frac{b}{1}$ (ii), bases $(a, 1)$ congruentes;
- $\frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1}$ (iii), bases $(1, 1)$ congruentes.

Multiplicando-se membro a membro (i), (ii) e (iii):

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} \cdot \frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} \cdot \frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \implies$$

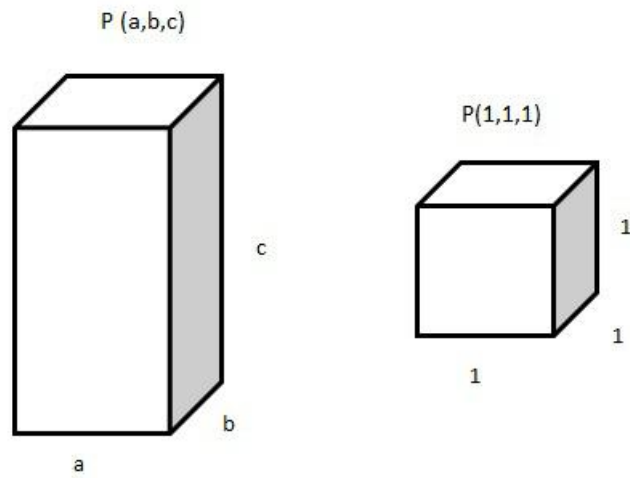


Figura 25: Paralelepípedo $P(a, b, c)$ e cubo $P(1, 1, 1)$

Fonte: Autora

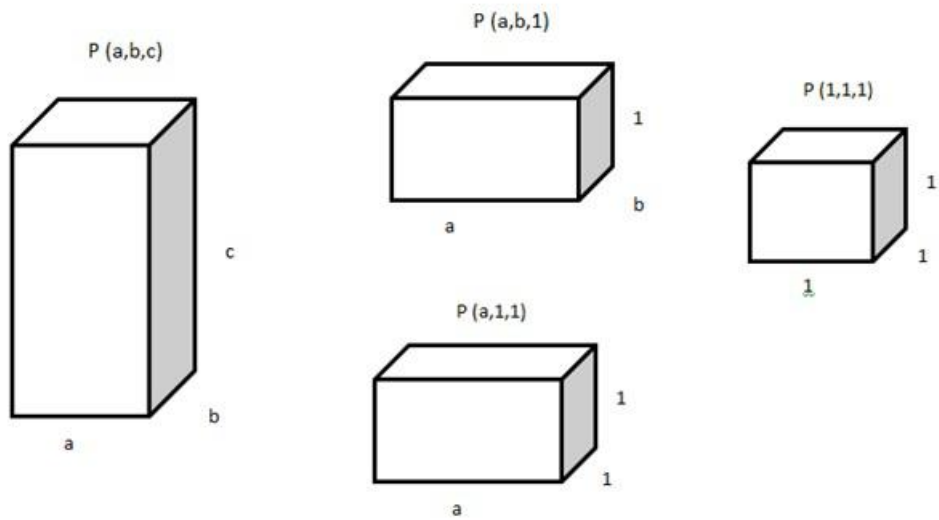


Figura 26: Paralelepípedos

Fonte: Autora

$$\frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{1 \cdot 1 \cdot 1} \implies V = \frac{a \cdot b \cdot c}{1 \cdot 1 \cdot 1} \implies \quad (24)$$

$V = a \cdot b \cdot c$, em que a , b e c são as medidas das dimensões do paralelepípedo retângulo na unidade escolhida.

Sendo assim, concluímos que:

- O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas três dimensões.
- Considerando como base a face retangular de dimensões a e b contida em um plano horizontal, indicando por B a área dessa base, tem-se que, $B = a \cdot b$ e a altura c por h , podemos escrever, $V = B \cdot h$, isto é, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela medida da altura.
- No cubo de aresta a , as dimensões $b = a$ e $c = a$, o volume será dado por

$$V = a \cdot b \cdot c \implies V = a \cdot a \cdot a \implies V = a^3. \quad (25)$$

3.5 Volume do Prisma

Aplicando o princípio de Cavalieri determinamos o volume dos prismas. Inicialmente consideremos um prisma S_1 , de altura h e área da base A_1 e um paralelepípedo retângulo S_2 , com área da base A_2 e altura h apoiados em um plano α e situados em um mesmo semiespaço. Além disso, consideremos as áreas $A_1 = A_2$ apresentadas na figura 27.

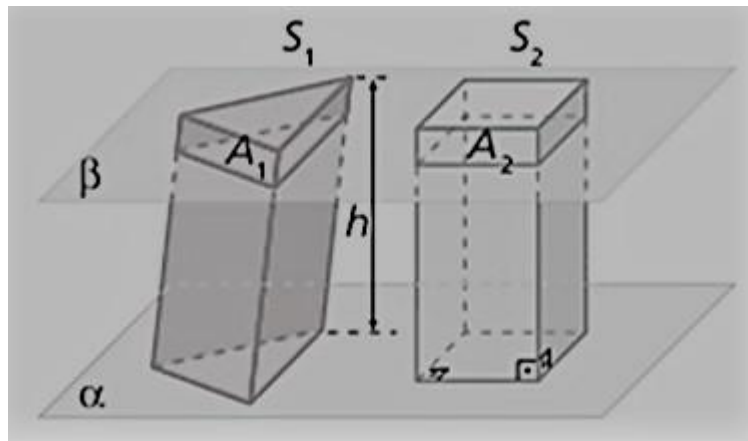


Figura 27: Sólidos Seccionados.

Fonte: Leonardo, F. M. de. Conexões com a Matemática

Qualquer plano horizontal que secciona os dois sólidos determina no prisma S_1 a secção $S_1 \cap \beta$, cuja área é igual a A_1 , e no paralelepípedo retângulo S_2 determina a secção $S_2 \cap \beta$, cuja área é igual a A_2 . Como área $(S_1 \cap \beta) = A_1$ e a área $(S_2 \cap \beta) = A_2$, para qualquer plano horizontal paralelo a α temos:

$$(S_1 \cap \beta) = (S_2 \cap \beta) \implies A_1 = A_2. \quad (26)$$

Sendo assim, de acordo com o princípio de Cavalieri o prisma S_1 e o paralelepípedo S_2 possuem o mesmo volume, isto é, $V_1 = V_2$, em que V_1 é o volume do prisma S_1 e V_2 é o volume do prisma S_2 .

Mas S_2 é um paralelepípedo retângulo e seu volume é dado por:

$$V_2 = A_2 \cdot H. \quad (27)$$

Sabendo que as áreas das bases dos sólidos S_1 e S_2 são iguais ($A_1 = A_2$) e $V_1 = V_2$, então

$$V_1 = V_2 \implies V_1 = A_2 \cdot h. \quad (28)$$

Mas $A_1 = A_2$, segue então que $V_1 = A_1 \cdot h$.

Concluimos assim que o volume de um prisma qualquer é dado por,

$$\text{Volume do prisma} = (\text{Area da base}) \times (\text{altura}).$$

3.6 Volume da Pirâmide

Para determinar o volume da pirâmide, vamos apresentar alguns resultados que auxiliam na demonstração. Particularmente devemos garantir que, se o vértice de uma pirâmide se move em plano paralelo à base, o volume dessa pirâmide não se altera.

Vamos analisar o que acontece quando seccionamos uma pirâmide por uma plano paralelo à sua base. Considere uma pirâmide de vértice V , base triangular ABC e

altura H . Um plano paralelo à base ABC , distando h do vértice V , produziu nessa pirâmide uma secção DEF apresentada na figura 28.

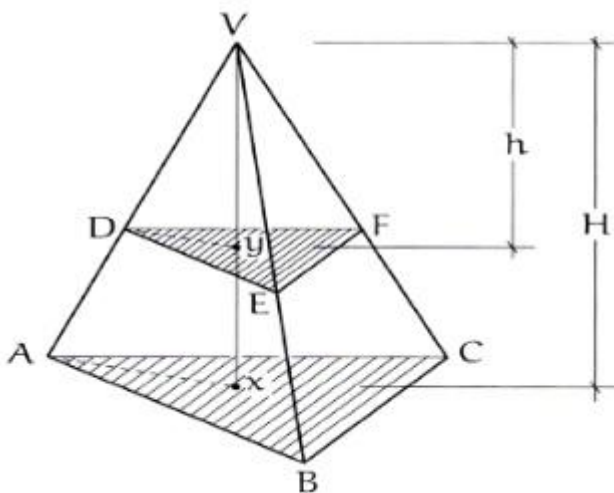


Figura 28: Pirâmide.

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

Observe que:

- A secção da base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$,

De fato, os ângulos da base da secção ($\triangle DEF$) e os ângulos da base ($\triangle ABC$); por terem lados respectivamente paralelos, são congruentes. Donde se conclui que a secção DEF e a base ABC são triângulos semelhantes.

A razão de semelhança é $\frac{h}{H}$, como segue

Se $\triangle VDE$ é semelhante ao $\triangle VAB$ então,

$$\frac{\overline{VD}}{\overline{VA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \implies \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{h}{H} \implies \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{h}{H}. \quad (29)$$

Portanto, os triângulos DEF e ABC são semelhantes, sendo $\frac{h}{H}$ a razão de semelhança.

- A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. De fato, sendo $\overline{BH_1}$ a altura relativa ao lado \overline{AC} do triângulo ABC e $\overline{EH_2}$ a altura relativa ao lado \overline{DF} do triângulo DEF, ou seja, $\overline{BH_1}$ a altura do $\triangle ABC$ da base da pirâmide; e $\overline{EH_2}$ a altura da secção DEF.

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EH_2}}{\overline{BH_1}} \Rightarrow \frac{\overline{EH_2}}{\overline{BH_1}} = \frac{h}{H} \quad (30)$$

Logo,

$$\frac{Area(\triangle DEF)}{Area(\triangle ABC)} = \frac{1/2 \cdot \overline{DF} \cdot \overline{EH_2}}{1/2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BH_1}} = \frac{\overline{DF} \cdot \overline{EH_2}}{\overline{AC} \cdot \overline{BH_1}} = \frac{h}{H} \cdot \frac{h}{H} = \frac{h^2}{H^2}. \quad (31)$$

Teorema 3. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.*

Considere duas pirâmides de mesma base ABC, vértices V_1 e V_2 e com mesma altura, como mostra a figura:

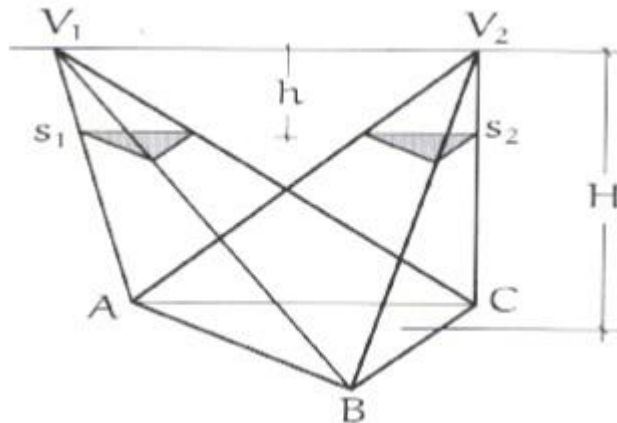


Figura 29: Pirâmides de mesma base.

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

Um plano paralelo ao plano que contém a base ABC e distando h dos vértices V_1 e V_2 das pirâmides, determina secções S_1 e S_2 nas duas pirâmides, respectivamente.

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das secções S_1 e S_2 , respectivamente, tem-se

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{A_2}{A}. \quad (32)$$

Logo concluímos que $A_1 = A - 2$. Pelo Princípio de Cavalieri as duas pirâmides têm o mesmo volume.

O fato de que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é fato importante para a demonstração do volume de uma pirâmide de base triangular.

Inicialmente vamos adotar a seguinte notação para um tetraedro: num tetraedro qualquer face pode ser considerada base, então para um tetraedro ABCD, determinamos a face ABC como base e o ponto D como vértice dessa pirâmide, vamos representá-lo por D - ABC. E o volume será representado por:

$$V(D - ABC) = V(B - ACD) = V(C - ABD) = V(A - BCD). \quad (33)$$

Teorema 4. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Prova

Dado um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e A'B'C', como mostra a figura a seguir

Sendo A a área da base ABC e h a altura do prisma. Logo o volume do prisma é dado por A.h.

Dividindo-se esse prisma em 3 tetraedros:

$$[A - A'B'C'; B' - ACC' \text{ e } B' - ABC],$$

como mostra a figura a seguir:

Considerando V_1 , V_2 e V_3 os volumes respectivos dos três tetraedros acima e V o volume do prisma. Pelo Teorema anterior, o volume de uma pirâmide não se altera quando, mantendo a base fixa, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base. Assim concluímos que

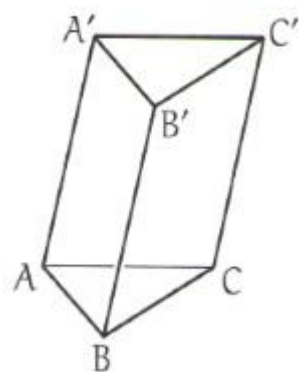


Figura 30: Prisma Regular.

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

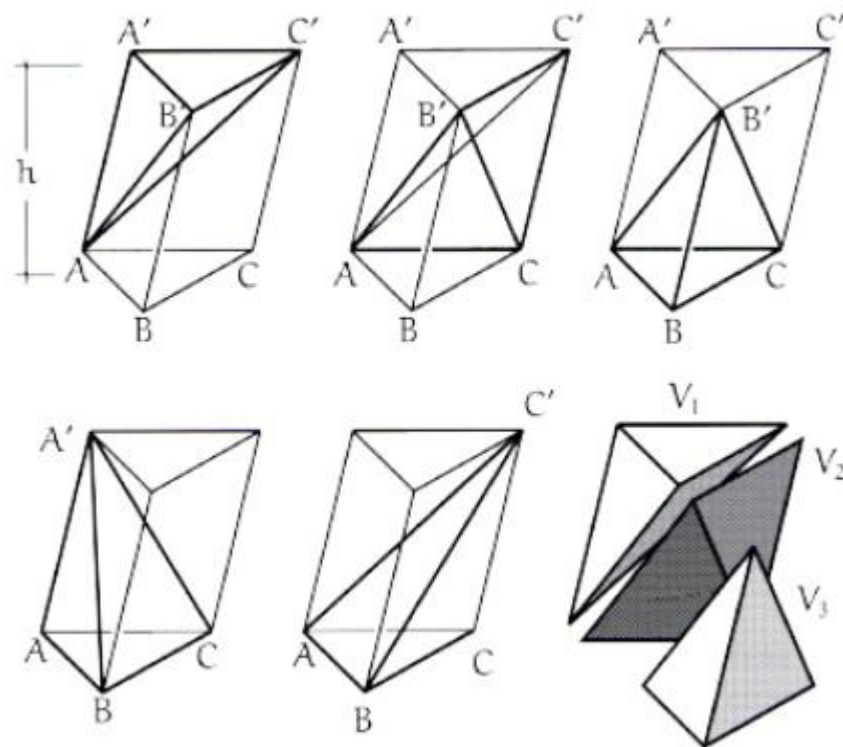


Figura 31: Divisão do Prisma em Tetraedros.

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

$$V_1 = V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') = V(A - A'BC) = V(A' - ABC)$$

$$V_2 = V(B' - ACC') = V(B - ACC') = V(C' - ABC)$$

$$V_3 = V(B' - ABC). \quad (34)$$

Temos então que o volume do prisma é igual à soma dos volumes dos três tetraedros:

$$V = V(A' - ABC) + V(B' - ABC) + V(C' - ABC) = V_1 + V_2 + V_3 \quad (35)$$

Com as bases dos três tetraedros iguais a base do prisma e com as alturas iguais a do prisma, cada pirâmide possui volume igual a um terço do volume do prisma.

Teorema 5. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Prova

Uma pirâmide qualquer poderá ser dividida em pirâmides de base triangular. Dividindo a base em triângulos justapostos, por meio de suas diagonais e definindo cada plano da divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

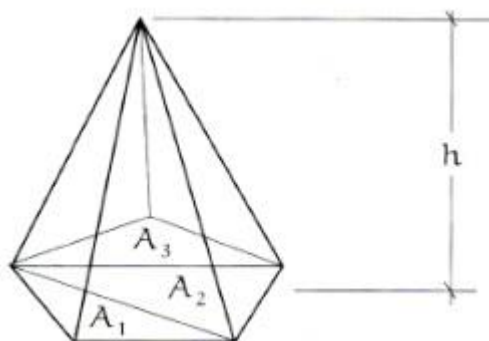


Figura 32: Dividindo a base da Pirâmide em Triângulos.

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

Se a pirâmide possui altura h a sua base de área A foi dividida em n triângulos de áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Como o volume da pirâmide é igual a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + \dots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h \quad (36)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (A_1 h + A_2 h + A_3 h + \dots + A_n h)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) \cdot h$$

Mas $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$, então

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h. \quad (37)$$

Concluimos assim que o volume da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{Area da base}) \cdot (\text{altura}). \quad (38)$$

3.7 Volume do Cilindro

No cilindro, toda secção paralela à base, é congruente com essa base. Logo pelo Princípio de Cavalieri o volume do cilindro é dado pelo produto da área de sua base pela sua altura.

Consideremos um cilindro de altura h e área da base A e um prisma de mesma altura h e área da base A (o cilindro e o prisma têm alturas iguais e bases equivalentes) como mostra a figura 33:

Suponhamos que os dois sólidos têm as bases A contidas num mesmo plano horizontal α e estão num dos semiespaços determinados por α . Se outro plano horizontal β secciona o cilindro este mesmo plano também secciona a pirâmide, determinando secções de áreas A_1 e A_2 , então $A_1 = A = A_2$ e conseqüentemente, os dois têm o mesmo volume.

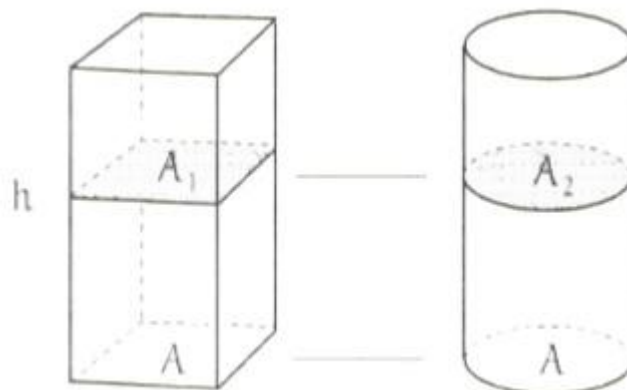


Figura 33: Prisma e Cilindro de mesma altura e bases equivalentes.

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

Sendo assim o volume do cilindro é também o produto da área da base pela altura. Como a área da base de um círculo é $\pi.R^2$, então podemos escrever o volume do cilindro como:

$$V = \pi.R^2.h. \quad (39)$$

3.8 Volume do Cone

Apresentamos para os alunos do Ensino Médio o cilindro como sendo um caso particular dos prismas, e o cone como um caso particular das pirâmides, o que facilita a compreensão e resolução dos problemas por analogia.

Consideremos um cone de altura H e área da base A contida num plano horizontal α , e uma pirâmide de mesma altura H e área da base A (equivalente a área da base do cone) contida nesse mesmo plano.

Suponhamos que outro plano horizontal β , distando h do vértice secciona o cone, também secciona a pirâmide, e sendo as áreas das seções A_1 (área da seção da pirâmide) e A_2 (área da seção do cone), então

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{A_2}{A}. \quad (40)$$

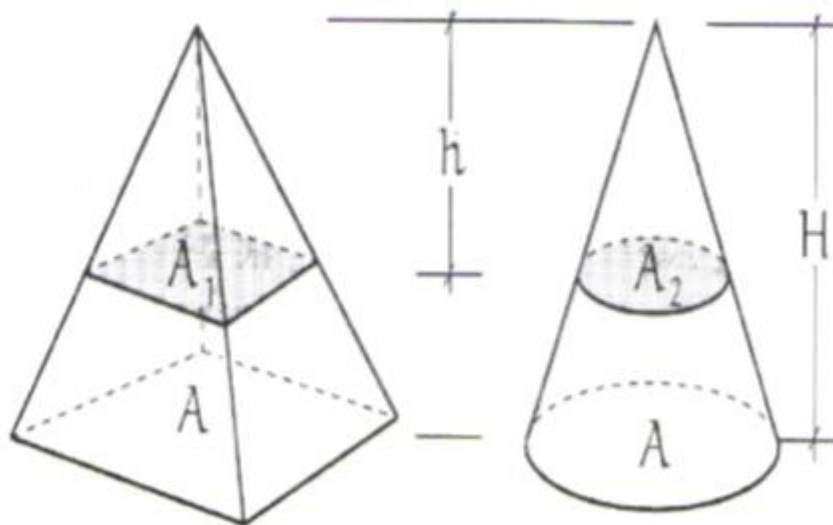


Figura 34: Pirâmide e Cone de mesma altura e bases equivalentes.

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

Ou seja, $A_1 = A_2$. Pelo princípio de Cavalieri garantimos que o volume da pirâmide é igual ao volume do cone. Concluimos assim, que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do cone} = \frac{1}{3} \cdot (\text{rea da base}) \cdot (\text{altura}). \quad (41)$$

Como a área da base de um círculo é $\pi \cdot R^2$ então o Volume V do cilindro é dado por

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h. \quad (42)$$

Para os alunos do Ensino Médio, os problemas envolvendo volume de cilindros e cones apresentados nas aulas são retos de base circular pois estão mais relacionados com objetos do cotidiano.

3.9 Volume da Esfera

Aplicando o Princípio de Cavalieri também conseguimos determinar o volume da Esfera. Consideremos inicialmente, um certo sólido de volume V e uma esfera de raio R apoiados num plano α (como na figura). As secções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido possuem a mesma área. Note que, em uma esfera de raio R , uma secção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$. Esta expressão também equivale a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raio R e h .

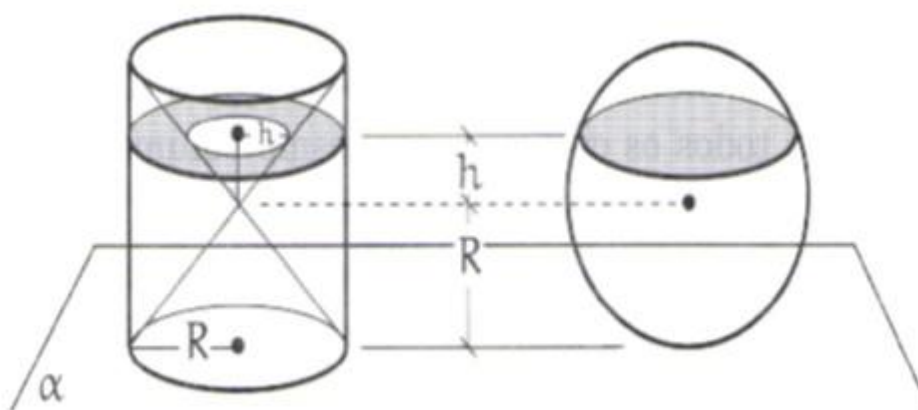


Figura 35: Cilindro equilátero de raio R e Esfera de raio R .

Fonte: Coleção PROFMAT versão digital.

Suponhamos que a esfera de raio R esteja apoiada em um plano α horizontal e ao lado, um cilindro equilátero (no cilindro equilátero a altura é igual ao diâmetro da base) de raio R e altura $2R$ apoiado sobre o mesmo plano α . Do cilindro subtraímos dois cones iguais, cada um deles com base em uma das bases do cilindro e vértices coincidentes com centro do cilindro. O sólido gerado é chamado de Clépsidra, e é tal que qualquer plano horizontal distando h de seu centro (ou do centro da esfera), produz uma secção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h , de área igual a $\pi.(R^2 - h^2)$.

O volume V da Clépsidra igual ao volume do cilindro de raio R e altura $h_1 = 2R$

(cilindro equilátero) subtraído de dois cones de raio R e altura $h_2 = R$, sendo assim,

$$V = \pi R^2 h_1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h_2. \quad (43)$$

logo,

$$V = \pi R^2 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 R \implies V = 2\pi R^3 - \frac{2}{3} \pi R^3 \implies$$

$$V = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} \implies V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Que, pelo Princípio de Cavalieri, é o volume da esfera.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (44)$$

4 SEQUÊNCIA DE ENSINO DO POLYA NA GEOMETRIA

Tal como noutros períodos de transição, difíceis de entender e de percorrer, é necessário voltar as coisas simples, à capacidade de formular perguntas simples, pergunta que, como Einstein costuma dizer, só uma criança pode fazer mas que, depois de feitas, são capazes de trazer uma luz nova à nossa perplexidade.

Boaventura Santos

Ao longo de 22 anos de magistério ouvi inúmeras vezes as seguintes indagações por parte dos alunos, ao serem apresentados a algum problema matemático: por onde devo começar?, o que posso fazer para chegar no resultado?, diante disso e a partir do conhecimento sobre as sequências de ensino, mudei a postura como professor e busquei aplica-las em sala de aula na tentativa de responder as perguntas acima citadas.

A experiência da aplicação da Sequência de Ensino do Polya ocorreu em turma de 40 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede Estadual de Ensino no Estado do Ceará, na cidade de Juazeiro do Norte, onde sou professora, visando investigar o processo educacional mediado por uma sequência de ensino e assim melhorar a atuação como professor e o desempenho dos alunos.

Tendo em vista que o ensino de geometria é visto pelos discentes como um conteúdo difícil pois, para a resolução das questões, faz-se necessário buscar uma interpretação geométrica do problema antes de efetuar os cálculos. Desta forma, procuramos, através da Sequência de Ensino de George Polya, minimizar tais dificuldades aplicando-a, em sala de aula, na resolução de problemas em Geometria, visando fornecer estrutura para a pavimentação da solução das questões.

A Sequência de Ensino do Polya se estabeleceu ao longo dos anos como uma metodologia de ensino com o objetivo de favorecer uma mudança de atitude dos professores e alunos em sala de aula, estimulando um discente ativo na construção de seu conhecimento e um docente colaborador do processo de ensino e aprendizagem, buscando indicar conceitos que originem significados para o alunado.

Procuramos no desenvolvimento das aulas, adotar problemas que motivassem os estudantes e tivessem alguma relação com seu cotidiano, incutindo centelhas de meditação e estudo.

Pensando em um ambiente solidário no qual os discentes têm a oportunidade de interagir com o docente de forma a produzir reflexões pertinentes sobre a resolução do problema, nosso trabalho tem como objetivo geral a análise do impacto da resolução de problemas em sala de aula no ensino de volume de sólidos geométricos aplicando a Sequência de Ensino do Polya, embasado na Teoria da Aprendizagem significativa de David Ausubel e com os seguintes objetivos específicos:

- Propor esquemas de verificação qualitativa de situações problema;
- Propiciar aos discentes meios para construção do conhecimento;
- Desenvolver estratégias para transformar a linguagem usual em linguagem matemática;
- Favorecer aos discentes a ampliação do conhecimento pelas interações com o grupo e professor;
- Determinar o desempenho dos alunos nas atividades de situações problema;
- Compreender o cálculo do volume de sólidos geométricos;
- Aplicar a Sequência de Ensino do Polya na resolução de problemas matemáticos.

No desenvolvimento das aulas e na aplicação das questões buscamos incentivar os alunos a desenvolver com liberdade a elaboração de suas soluções para os problemas apresentados.

Concebemos as aulas expositivas sobre o volumes dos sólidos geométricos, parâmetros necessários para resolução dos problemas propostos durante a aplicação da Sequência do Polya. Durante as aulas de exposição do conteúdo os alunos, ao término da apresentação do volume de cada sólido, resolviam questões tradicionais do livro didático adotado pela escola, visando familiarização com a matéria. Após a realização das aulas, um questionário estruturado de abrangência subjetiva foi aplicado com os estudantes para construir julgamento dos discentes a respeito do ensino de matemática em específico geometria objetivando pavimentar de forma estimuladora o caminho da nossa averiguação.

Como os alunos já apresentavam noções sobre o cálculo de volumes, um teste de sondagem foi executado de forma individual e sem consulta, pretendendo estabelecer o ponto inicial dessa mediação pedagógica.

A importância do diagnóstico é notória para nortear o educador no seu exercício. Souza (2013) , sugere dois períodos para sua realização

[...] o diagnóstico pode ser realizado por meio de dois momentos, o primeiro em que o professor define quais conhecimentos prévios os alunos deveriam ter para a apreensão do novo conhecimento, e o segundo, a realização da investigação junto aos alunos a fim de averiguar se os estudantes são detentores destes conceitos. (Souza, 2013, p.15)

No decurso das aulas os problemas apresentados aos estudantes advinham de listas escritas ou de simulações de computador.

Em alguns encontros os alunos resolviam os problemas propostos individualmente e em grupo em outros momentos. Ao término das sessões, os alunos apresentavam suas produções e o docente promovia um debate reflexivo para identificar a importância, ou não da Sequência do Polya na resolução.

Durante as aulas preliminares de abordagem do tema objeto de estudo, visando retratar a noção de cálculo de volume, a partir do Princípio de Cavaliere, uma simulação do Phet Interactive Simulations da Universidade do Colorado, disponível em https://phet.colorado.edu/sims/estimation/estimation_ptBR.html, foi apresentada aos alunos para estimular o entendimento do conteúdo.

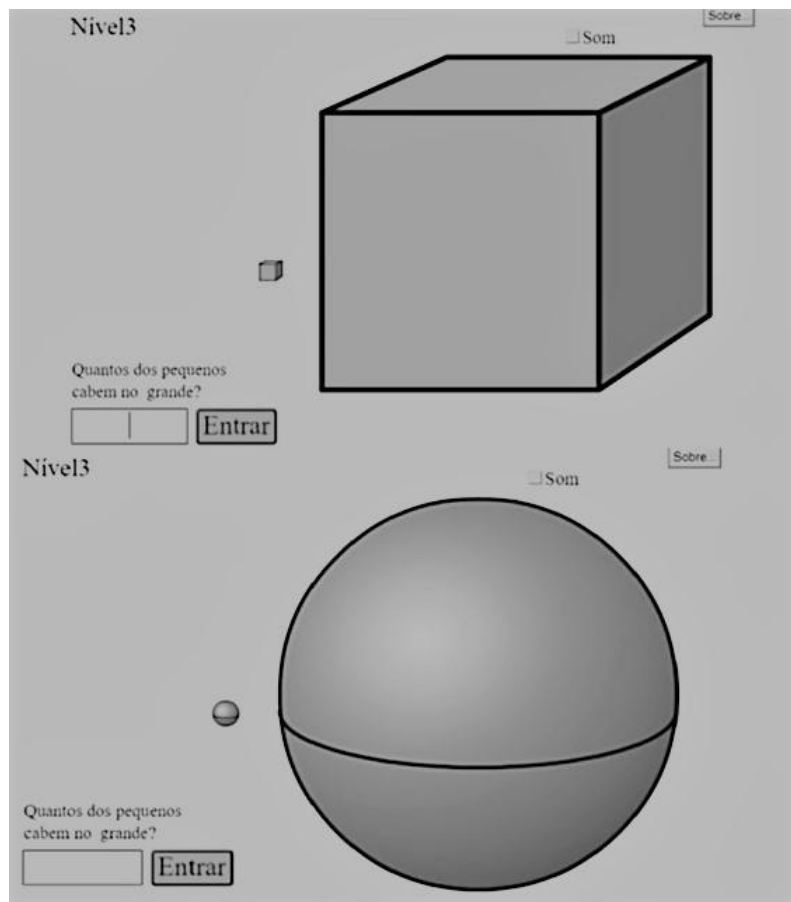


Figura 36: Simulação Estimation 2.02.

Fonte: <https://phet.colorado.edu/sims/estimation/estimationptBR.html>.

O aluno tem a possibilidade de treinar antes da execução da tarefa no próprio simulador e os cubos e esferas menores elementares podem ser movidos para o interior dos sólidos maiores permitindo fazer uma estimativa racional.

Para todo encontro foi produzido um plano de aula nos quais a aplicação da Sequência de Ensino está em anexo no Apêndice dessa dissertação. Necessitamos de 6 (seis)

aulas para apresentação do conteúdo e decidimos aplicar a Sequência do Polya para resolução dos problemas de aplicação e aprofundamento da matéria em encontros, apresentados e detalhados a seguir.

A seguir apresentaremos a estrutura das aulas realizadas durante a aplicação das resoluções de problemas em geometria, empregando a Sequência do Polya.

1º Encontro

- Apresentação dos problemas em lista de questões;
- Conteúdo: Volume do paralelepípedo e cubo;;
- Metodologia: Sequência de Ensino do Polya;
- Discussão sobre as produções dos alunos em sala.

2º Encontro

- Apresentação dos problemas em lista de questões;
- Conteúdo: Volume dos prismas;
- Metodologia: Sequência de Ensino do Polya;
- Discussão sobre as produções dos alunos em sala.

3º Encontro

- Apresentação dos problemas em material manipulável e lista de questões;
- Conteúdo: Volume da pirâmide;
- Metodologia: Sequência de Ensino do Polya;
- Discussão sobre as produções dos alunos em sala.

4º Encontro

- Apresentação dos problemas em vídeos e em lista de questões;

- Conteúdo: Volumes de esferas, cilindros e cones;
- Metodologia: Sequência de Ensino do Polya;
- Discussão sobre as produções dos alunos em sala.

As aulas foram expostas de forma detalhada, manifestando as estratégias utilizadas e relacionando as atitudes e produções dos alunos com as etapas da Sequência do Polya.

A seguir apresentamos algumas questões aplicadas e soluções dadas pelos alunos.

Questão 01 (ENEM/2017) Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:

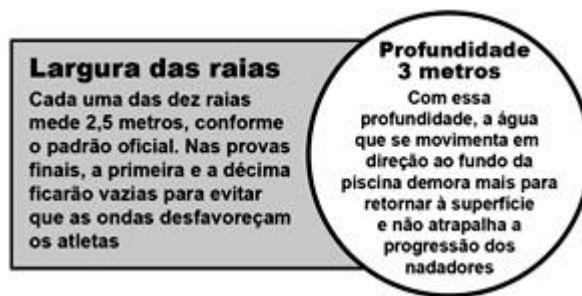


Figura 37: Questão Enem 2017.

Fonte: Veja 2278,jul. 2012 (adaptado).

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a:

- 3 750.
- 1 500.
- 1 250.
- 375.
- 150.

Os discentes foram orientados a fazerem uma leitura do enunciado destacando os dados relevantes.

Mediamos a primeira etapa (compreensão do problema) com indagações do tipo:

1. Qual é a incógnita?

- O volume da piscina.

2. Quais são os dados do problema?

- Foram dados as dimensões da piscina: o comprimento 50m, a largura 2,5 m e a profundidade 3m.

3. Sugerimos que os alunos produzissem uma figura, pois alguns não perceberam que a profundidade era a altura:

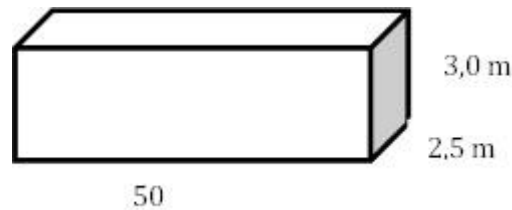


Figura 38: Representação da forma da piscina e suas dimensões.

Fonte: Autora.

4. Adote uma notação adequada. Qual a letra que deve denotar a incógnita?

- queremos calcular o volume, podemos usar a letra V.

5. Quais as letras você escolheria para o comprimento, a largura e a altura?

- a,b,c.

6. Qual a condicionante que relaciona a, b, c com V?

7. Trata-se de um problema razoável? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

- Sim, ele é razoável. Se conhecermos a,b,c conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo está determinado, o volume também ficará.

Seguindo para a segunda etapa a Elaboração do Plano. Depois de realizada a compreensão do problema e percebido o interesse de alguns alunos em busca da solução, observamos que outros alunos não tiveram iniciativa para montar o plano. Mas orientamos os discentes a fazerem uma releitura da questão e associar a outro problema já resolvido.

É difícil formular uma ideia para o plano quando pouco conhecemos do assunto.

Muitos dos problemas propostos em sala de aula foram apresentados anteriormente durante as aulas expositivas, nas aulas de demonstração da expressão matemática que determina o volume. As ideias de como resolver já foram apresentadas pelo professor. Sendo assim, ao notar a falta de iniciativa de alguns alunos foram feitas as seguintes indagações: Conhece algum problema correlato? Considerando a incógnita (volume), lembra de algum problema que tenha a mesma incógnita? Existem problemas correlatos já resolvidos. É possível utilizá-lo?

A etapa de Execução do Plano ocorreu sem interferências, depois que o plano foi formulado e analisado, os alunos seguros com o que foi planejado, honestamente aplicaram a fase. Esse foi o momento de tranquilidade para o professor que acompanhou, sem interferir, o desenvolvimento da solução.

Finalmente o aluno conseguiu ter a ideia da resolução. Percebendo que, com as dimensões do paralelepípedo: o comprimento 50m, a largura 2,5 m e a profundidade 3m, chegaria facilmente ao volume da piscina multiplicando esses valores.

Durante a Execução do Plano não houve necessidade de interrupções por parte do professor, pois os alunos executaram corretamente as operações desejadas, a partir do plano formulado.

Na etapa de Retrospectiva, ressaltamos a importância das unidades de medida dos dados e da incógnita do problema em questão, da utilização da notação adequada e de ter uma visão crítica de sua resposta.

Nesse primeiro encontro 90% da turma alcançou êxito nos 4 (quatro) problemas que foram apresentados. Sempre mediados pela professora a cada etapa da sequência.

O encontro seguinte teve como objetivo a determinação do volume da pirâmide. Neste encontro foi proposto inicialmente a utilização da planificação de três pirâmides que, com os materiais manipuláveis, os alunos compreendessem a expressão matemática para cálculo de volume da pirâmide. Nesta atividade receberam planificações e foram orientados a cortar, colorir e colar, e com as três pirâmides prontas deveriam formar um cubo. Em seguida alguns questionamentos foram feitos, induzindo ao discente refletir sobre a relação entre o volume do cubo e os volumes das três pirâmides.

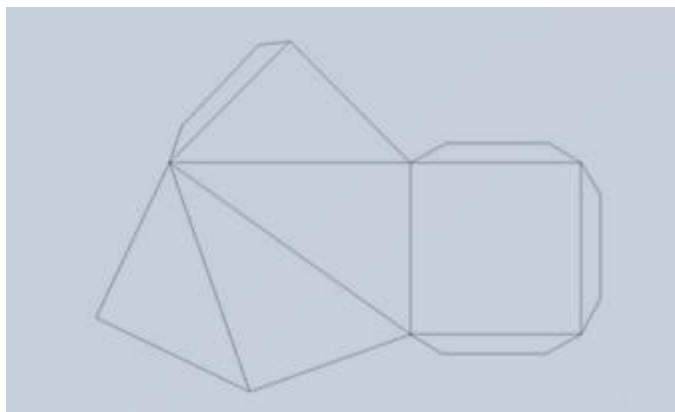


Figura 39: Planificação de uma Pirâmide Oblíqua de base quadrada.

Fonte: Autora.

Após concluírem a montagem das três pirâmides como nas imagens abaixo, ficou mais claro perceber que o volume da pirâmide é igual a um terço da área da base multiplicada pela altura.

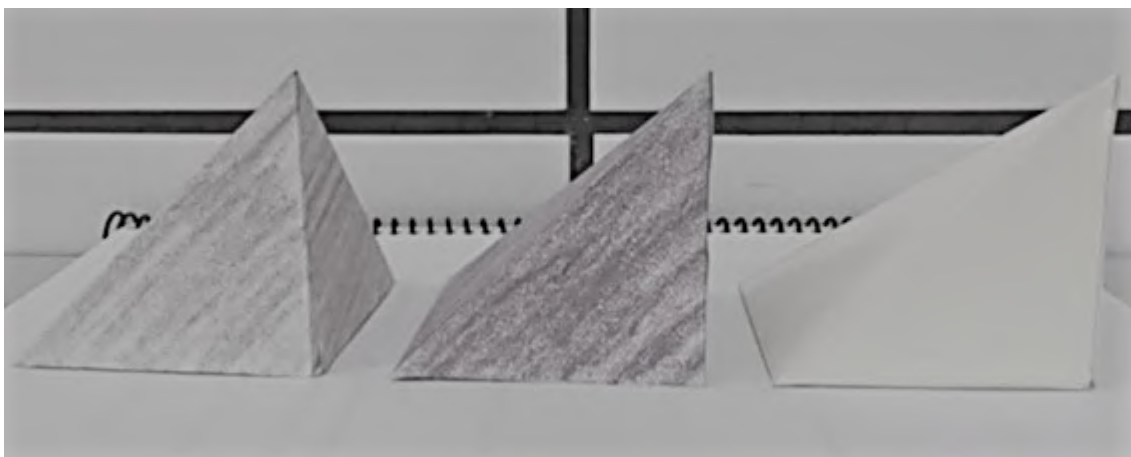


Figura 40: Pirâmides Oblíquas de base quadrada.

Fonte: Autora.

Em seguida a turma recebeu a segunda lista com os problemas sobre volumes de pirâmide, para resolução individual. O problema de maior dificuldade e, conseqüentemente mais demorado foi à questão a seguir:

Questão 02. A figura abaixo apresenta um molde para construção de uma pirâmide

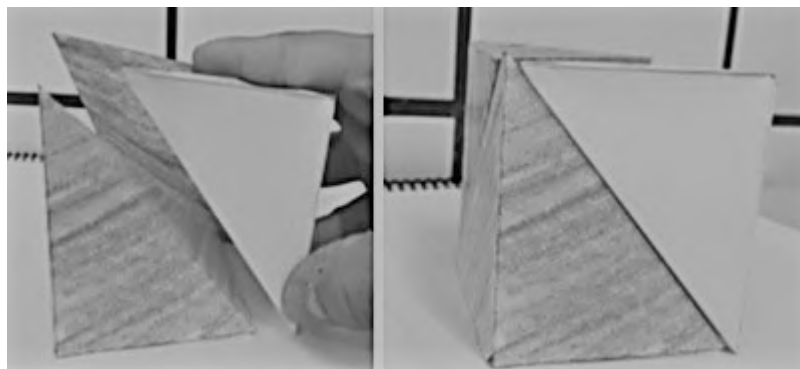


Figura 41: As Pirâmides formando um Cubo.

Fonte: Autora.

hexagonal regular. Para montar essa pirâmide, basta recortar o molde seguindo as linhas contínuas, dobrar corretamente nas linhas tracejadas e montar a pirâmide usando as abas trapezoidais para fixar sua estrutura com um pouco de cola. Sabendo que cada um dos triângulos tracejados nesse molde é isósceles, com lados medindo 5 cm e 13 cm, qual o volume dessa pirâmide?

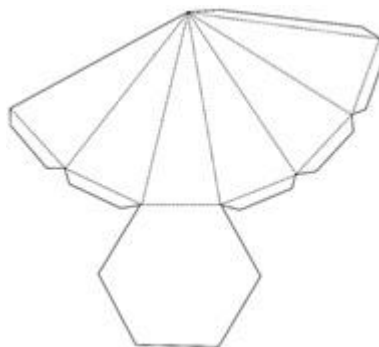


Figura 42: Pirâmide Hexagonal Regular.

Fonte: Autora.

Já familiarizados com a sequência de ensino, os alunos por iniciativa própria iniciaram a leitura e análise do problema. Conseguiram identificar os dados e incógnitas. Nos problemas sobre pirâmide, em especial o desenho da pirâmide desempenha um papel importante na interpretação do problema e montagem do plano de resolução.

Na etapa de Compreensão do Problema os alunos conseguiram colocar os dados



Figura 43: Pirâmide desenhada pelo aluno PE.

Fonte: Autora.

fornecidos no problema na figura. A dificuldade de 100% da turma foi em relação ao conteúdo de Geometria Plana, mais precisamente perceber que o raio da circunferência que circunscreve a base é igual à medida da aresta da base. O que, mesmo com as indagações comuns durante a intervenção do professor, os alunos não obtiveram sucesso de imediato. Fato esse que atrasou a elaboração do plano. A intervenção foi realizada, a partir do de um compasso e transferidor para apresentar a construção de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio R . O que facilmente ajudou na percepção que o valor do raio é igual a aresta da base.

Os alunos identificaram as condicionantes raio da circunferência que circunscreve a base e a altura. Para o cálculo da altura, a turma percebeu o triângulo retângulo envolvendo os elementos raio, altura e aresta lateral, destacando a importância de usar o teorema de Pitágoras para determinar a altura.

Durante a Execução do Plano a turma conseguiu executar tranquilamente. Seguindo os passos que cada um determinou. As etapas a seguir manifestam o caminho adotado pelos alunos.

(i) Desenho da pirâmide identificando os elementos e o triângulo retângulo necessário para determinar as condicionantes;

- (ii) Usaram o fato do raio da circunferência que circunscreve a base ser igual ao lado da base, determinando a primeira condicionante R;
- (iii) Concluíram que a altura seria determinada aplicando o teorema de Pitágoras (**Elaboração do Plano**).
- (iv) Usaram o teorema de Pitágoras para determinar a altura da pirâmide;
- (v) Calcularam a área da base;
- (vi) Determinaram o volume;
- (vii) Verificaram as etapas seguidas relacionando com os resultados obtidos (**Reflexão**).

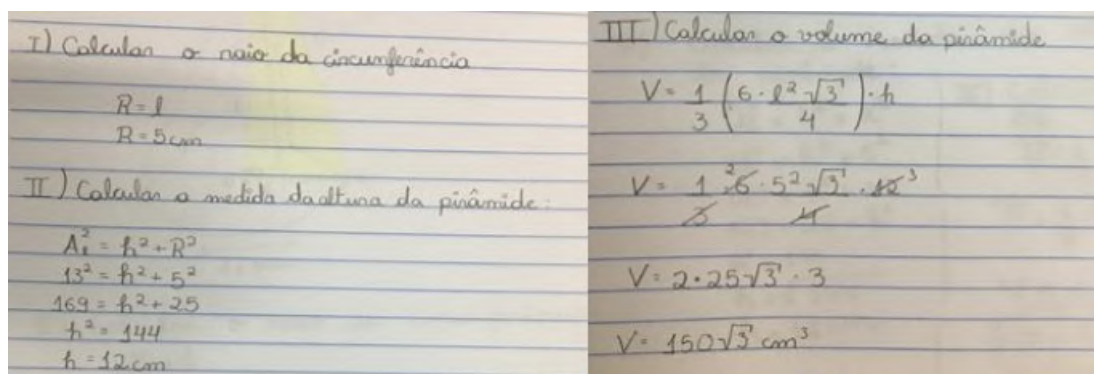


Figura 44: Execução do Plano do Problema 2 pelo aluno DR.

Fonte: Autora.

O conteúdo seguinte a ser abordado foi calcular o volume do cilindro. Os alunos receberam a terceira lista e dividimos a turma em duplas.

Questão 03. A Figura mostra um retângulo ABCD cujos lados medem 7 cm e 3 cm. Um cilindro será formado girando-se o retângulo ABCD (Figura 16) em torno da reta definida pelo seu lado AB. Qual a medida do volume desse cilindro, em centímetros cúbicos?

Notamos que nessa aula o intervalo de tempo na compreensão do problema foi menor, os alunos estavam mais participativos e inseridos no modelo de condução da aula, proposta pelo professor. A Execução do Plano foi mais imediata e tranquila, sem muitos questionamentos. Alguns não lembravam do conceito de diâmetro (dificuldade

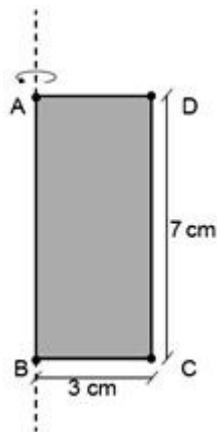


Figura 45: Retângulo ABCD.

Fonte: Autora.

em conceitos de Geometria Plana não esclarecidas no Ensino Fundamental), mas logo após explicações conseguem executar o plano formulado por eles. Em nenhum momento houve indisciplina. Nesta aula todos os alunos obtiveram sucesso nos problemas.

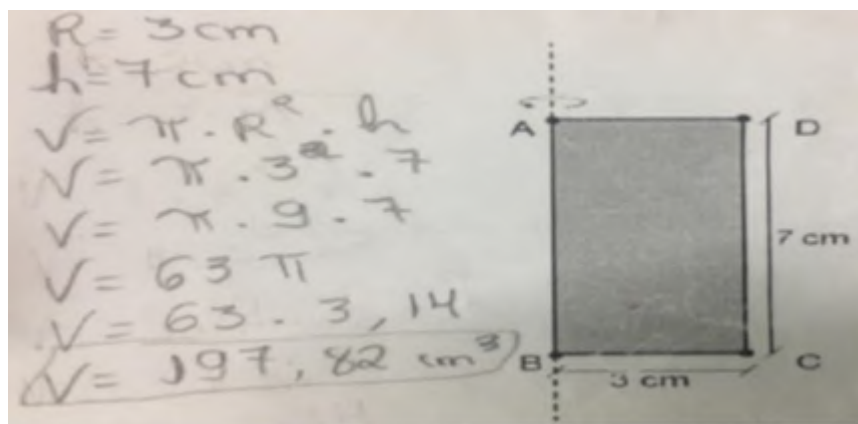


Figura 46: Resolução do Problema 3 pelo aluno PL.

Fonte: Autora.

No encontro seguinte, objetivando resolver problemas envolvendo cálculo de volume do cone e da esfera, utilizamos inicialmente um vídeo, disponível nos objetos educacionais do livro digital de Luiz Roberto Dante, volume 2 no qual apresenta a ideia da demonstração do volume do cone e da esfera através de recursos visuais e animados

graficamente. Reforçando assim, o que havia sido feito na aula expositiva sobre estes sólidos.

A quarta e última lista de problemas foi entregue e, de modo espontâneo, todos se organizaram individualmente para início da resolução seguindo os passos da Sequência do Polya.

O problema mais apreciado pelos estudantes foi proposto pelo Exame Nacional do Ensino Médio, no ano de 2016:

Questão 04(ENEM/2016). Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de $20m^3$. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

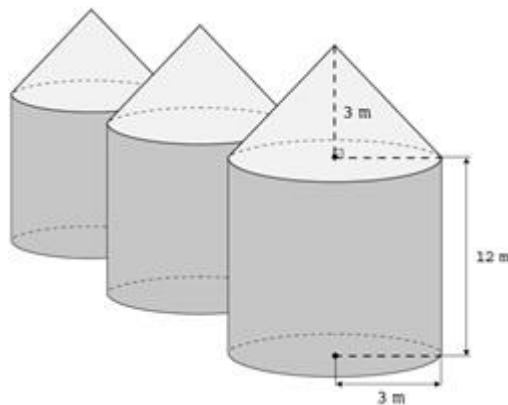


Figura 47: Questão Enem 2016.

Fonte: Inep.

Utilize 3 como aproximação para π . O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

- a)6.
- b)16.
- c)17.

d)18.

e)21.

Após a fase de compreensão do problema, realizada de forma participativa, todos conseguiram identificar os sólidos contemplados no problema, o cilindro e o cone. Na Elaboração do Plano foi sugerido que os alunos colocassem os dados do problema na figura, o que facilitou a elaboração do plano, dividindo o volume em dois sólidos: o cálculo do volume do cone e do cilindro. Perceber que o volume total é calculado somando os dois sólidos foi rápido e sem muito esforço com o auxílio da figura.

Durante a Execução do Plano alguns apresentaram dificuldade em concluir o problema. No momento de calcular o número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo (cilindro + cone) ficaram em silêncio por alguns minutos, até um dos alunos ir ao quadro e apresentar para os colegas que se tratava de uma simples regra de três.

Em seguida toda a turma conseguiu finalizar a lista de forma satisfatória.

Handwritten student work showing calculations for the volume of a cone and cylinder, and a proportion to find the number of trips.

② $V_{\text{total}} = V_{\text{cone}} + V_{\text{cilindro}}$

I) $V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$

$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3}$

$V_{\text{cone}} = 9 \cdot \pi$

$V_{\text{cone}} = 9 \cdot 3$

$V_{\text{cone}} = 27 \text{ m}^3$

II) $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot R^2 \cdot h$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 9 \cdot 12$

$V_{\text{cilindro}} = 9 \cdot 108$

$V_{\text{cilindro}} = 3 \cdot 108$

$V_{\text{cilindro}} = 324 \text{ m}^3$

$\therefore V_{\text{total}} = 27 + 324$

$V = 351 \text{ m}^3$

1 caminhão = 20 m^3

$X = \frac{351}{20} \cdot 20 \text{ m}^3$

$20x = 351$

$x = \frac{351}{20} \quad x = 17,5$

20 **total = 18 viagens**

Figura 48: Execução do Plano pelo aluno OL.

Fonte: Autora.

4.1 Resultados

Iniciamos apresentando algumas respostas ao Questionário aplicado nas aulas iniciais desse projeto, visando obter informações sobre o que os estudantes pensam à cerca do ensino de matemática. Verificando as respostas sobre a questão 01, onde 21 (vinte e um) alunos, cerca de 53%, não gostavam de matemática, com justificativas confluindo para a complexidade dos cálculos. Na tabela a seguir exibimos algumas afirmações.

PERGUNTA 01 Você gosta de Matemática? Por quê?
MI: Não. Já gostei mais, porque ano passado quando chegou em funções teve muita troca de professores, cada um ensinando de um forma e acabei criando um bloqueio.
AE: Mais ou menos, se tiver muito cálculo não.
PE: Não, porque é muito complicado.
OL: Sim, pois acho essencial para o nosso dia a dia.
AB: Não. Porque não consigo aprender com facilidade.
MR: Sim, porque a profissão que escolhi envolve matemática.
DR: Sim, porque eu gosto de cálculos.
PL: Sim, porque testa o raciocínio da pessoa.

Figura 49: Tabela de respostas da questão 1 do Questionário.

Fonte: Autora.

Ainda verificando as respostas obtidas percebemos que a maioria dos alunos que admitiram gostar de matemática, eram impulsionados pela aplicação da mesma no seu cotidiano.

Também foi inquirida aos alunos nesse questionário a definição de volume, para identificar suas concepções. A tabela a seguir exibiu respostas de alguns estudantes a respeito de volume de sólidos.

Observa-se nas respostas que o entendimento dos alunos sobre volume é convergente para a ideia de capacidade, corroborando com seu conceito de quantidade de espaço ocupado.

Também foi aplicado um Teste de Sondagem para verificar a visão crítica de identificação dos sólidos geométricos trabalhados e a determinação quantitativa do volume

O que você entende por volume?
AG: O quanto cabe em um recipiente. PE: Tudo aquilo que pode ser preenchido. PL: Quantidade. AE: É o conteúdo que é posto dentro de algo.

Figura 50: Tabela de respostas da questão 11 do Questionário.

Fonte: Autora.

de determinado corpo sólido. Notamos que as questões de reconhecimento das figuras foram resolvidas pela maioria dos alunos e a questão de cálculo envolvendo o volume do corpo foi o exemplo com maior número de respostas imprecisas, validando as afirmações dos alunos no questionário quanto à fobia por cálculos matemáticos.

Durante as aulas da aplicação da Sequência de Ensino do Polya percebemos que todos os alunos buscavam solucionar os problemas seguindo todas as etapas propostas pela sequência. A etapa na qual os estudantes dispensaram maior tempo foi a de Elaboração de um Plano seguida da Colocando o Plano em ação, pois alguns alunos ainda apresentavam déficit nas premissas matemáticas para resolução de cálculos.

Em todos os encontros destinados a aplicação da Sequência de Ensino a maioria dos alunos conseguiram desenvolver seus modelos de respostas e realizar a fase da Reflexão, para amadurecimento do roteiro seguido para solução, possibilitando obter uma aprendizagem significativa.

Em aula preliminar a execução da Sequência de Ensino, a apresentação da situação-problema foi realizada por simulação em computador, na qual os estudantes se mostraram mais interessados no desenvolvimento da aula, manifestando o importante papel do uso de tecnologias em sala de aula no processo Ensino-aprendizagem.

Com relação à etapa inicial da Sequência do Polya, Compreensão do Problema, utilizamos listas de exercícios impressas, para serem solucionadas, visando transformar o aluno em sujeito ativo no seu processo de aprendizagem e prepara-los para a realização do ENEM Exame Nacional do Ensino Médio, como também recorreremos as figuras

manipuláveis para estudo da Pirâmide, tentando incentivar um olhar tridimensional e relativo, que também é abordado no ENEM.

Os discentes acolheram a Sequência do Polya como estrutura de organização de obtenção dos resultados das questões propostas pelo docente, encorajando-os na produção de seus resultados.

As listas dos problemas trabalhados em sala de aula foram recolhidas para documentação quantitativa perante o regimento interno da Escola, e notoriamente mostravam uma organização sem precedentes, na pavimentação da resolução dos problemas, principalmente na elaboração das repostas as indagações, Quais são os dados?, momento em que todos se preocuparam em estabelecer relações entre as letras¹¹ e seus respectivos valores numéricos e Qual é a incógnita?, verificando qual letra falta quantidade associada.

¹¹São abreviações das grandezas para compor uma equação. Por exemplo altura abreviamos na maioria das ocasiões por h.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão orientadora mais relevante considerada neste trabalho, investiga de que modo o uso da Sequência de Ensino do Polya contribui para um ensino voltado a discentes ativos propiciando uma Aprendizagem Significativa.

Este anseio surgiu a partir da vivência docente que nos apresenta a busca constante por metodologias que reconstrua a prática do professor de matemática. Após o desenvolvimento desse trabalho, estamos convictos da importância do uso da Sequência do Polya na resolução de problemas, pois os alunos se mostraram estimulados a seguir o algoritmo proposto e atingiram seus objetivos de forma reflexiva obtendo modelos mentais para aplicação em outras situações.

Idealizamos um estudante participativo e questionador para a aplicação dessas novas ideias, e observamos que a Sequência do Polya propicia esse comportamento, pois nas aulas em que os alunos foram dispostos em grupos a colaboração entre eles foi perceptível e perante seus questionamentos inevitáveis ao professor constatamos o momento reflexivo do desenvolvimento da aula, como também na execução da quarta etapa da sequência, que sugeri um retrospecto investigativo ao desenvolvimento da solução.

Os problemas desenvolvidos pelos estudantes foram pensados de forma a representar objetos de seu cotidiano, mas não mostrando situações familiares, para promover uma maior transformação do conhecimento assimilado, pois assim evitamos o que Ausubel chama de simulação da aprendizagem significativa (Moreira, 1999, p. 156), onde o aluno só apresenta respostas mecanicamente memorizadas, confundindo com uma verdadeira aprendizagem significativa, que ancora reflexivamente elementos na sua estrutura cognitiva.

As evidências de uma aprendizagem significativa foram sondadas durante todo o processo de ensino, pois, para o professor determinar se uma aprendizagem foi ou não realmente significativa é muito difícil. Todas as fases da Sequência do Polya foram evidenciadas, não houve etapa suprimida nem confundida.

O papel do professor como mediador, estimulador e avaliador, a partir desta nova

conduta, foi percebido pelo professor que desenvolveu esse trabalho, sempre controlando o tempo da realização de cada etapa, não como arbitro que determina que todos os alunos só poderão passar juntos para outra fase da sequência, mas sim supervisionar o tempo de execução de alguns estudantes que não concluíram determinada etapa, pois influenciaria no restante das fases.

Os alunos apresentaram tempos distintos de conclusão das tarefas solicitadas, quando sua realização foi individual, mas durante a aplicação em grupo notamos uma cooperação entre eles no sentido de ajudar os colegas que não finalizaram determinada etapa.

Foi possível observar que a Sequência de Ensino do Polya aplicada ao cálculo de volumes de sólidos geométricos se configura como artefato metodológico facilitador e inspirador, pois percebemos por parte dos alunos, um exponencial crescimento no interesse por essa proposta.

Acreditamos que a aprendizagem significativa foi estimulada nos discentes e que a Sequência do Polya exerceu sua função metodológica motivando e norteando os alunos na resolução de problemas.

Entendemos após a realização desse trabalho, que o professor não é mais o elemento central do processo de Ensino-aprendizagem e sim um dedicado conciliador entre o conhecimento a ser transmitido e os estudantes.

Podemos salientar que a intenção de promover a autonomia discente da Sequência do Polya foi realmente contemplada, pois em nenhum momento durante a realização das aulas o professor resolveu integralmente um problema e em todas as ocasiões os alunos alcançaram seus objetivos. Pensamos também em fornecer elementos experimentais para estimular outros professores na sua labuta diária em sala de aula, mas acreditamos que pesquisas envolvendo Sequências de Ensino e em específico a do Polya para o uso não só na matemática, devem ser prosseguidas.

APÊNDICE

Questionário

1. Você gosta de Matemática? Por quê?
2. Você tem boas notas em Matemática? Por quê?
3. Você acha que o ensino de Matemática é importante? Por quê?
4. Você consegue relacionar o que aprende em sala de aula na disciplina de Matemática com seu cotidiano?
5. Você já realizou alguma experiência prática de Matemática?
6. Você já participou de alguma olimpíada de conhecimento em Matemática?
7. Cite o nome de um Matemático que você conhece.
8. Faça uma pergunta sobre algum assunto da Matemática que você sempre quis saber, mas nunca teve oportunidade de perguntar.
9. Como você gostaria de estudar Matemática?
 - () Só na sala de aula
 - () Na sala com experiências
 - () No laboratório de Matemática
 - () No laboratório de informática
10. Qual a sua maior dificuldade na disciplina de Matemática?
 - () Entender os cálculos
 - () Interpretar a teoria

Compreender as demonstrações

Solucionar problemas contextualizados

11. O que você entende por volume?

12. Quais os sólidos geométricos que você conhece?

13. Você consegue encontrar no seu dia-a-dia uma situação que você usa o volume de um sólido?

Teste de Sondagem

1. (Unifor-2015) Planificar um sólido geométrico é abri-lo, tornando-o uma figura plana. Sendo assim, as Figuras I , II e III mostradas acima correspondem, respectivamente, às planificações de:

- a) prisma, cilindro, cone.
- b) pirâmide, cone, cilindro.
- c) prisma, pirâmide, cone.
- d) pirâmide, prisma, cone.
- e) pirâmide, cone, prisma.

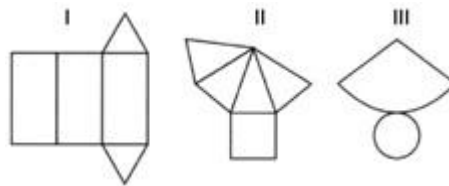


Figura 51: Figura da questão 1.

Fonte: Vestibular Unifor 2015

2. (ENEM - 2011) A figura a seguir mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais. A figura 23 é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:
- a) pirâmide.
 - b) semiesfera.
 - c) cilindro.
 - d) tronco de cone.
 - e) cone.



Figura 52: Figura da questão 2.

Fonte: Inep - Enem 2011

3. (ENEM - 2010) A siderúrgica Metal Nobre produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue. O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza?
- a) massa.
 - b) volume.
 - c) superfície.
 - d) capacidade.
 - e) comprimento.

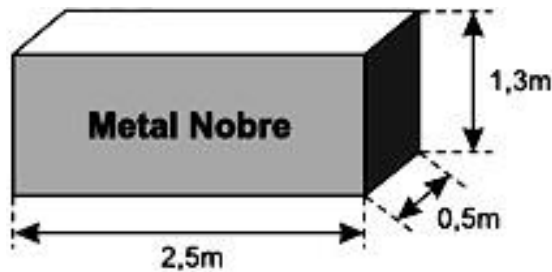


Figura 53: Figura da questão 3.

Fonte: Enem 2010

4. (Vunesp) Quantos cubos A precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo B?
- a) 60
 - b) 47
 - c) 94
 - d) 39
 - e) 48

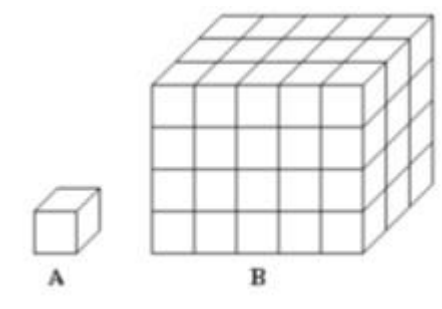


Figura 54: Figura da questão 4.

Fonte: Vestibular Vunesp

5. (Autora) Qual é o volume da caixa?

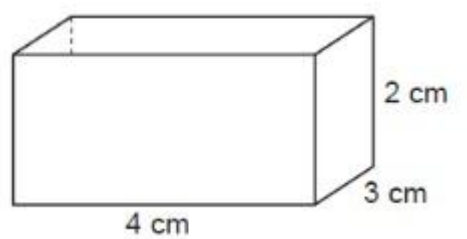


Figura 55: Figura da questão 5.

Fonte: Autora

Lista de Problemas (Aula 01)

1. (UNIFOR CE - 2017) Um hotel em Dubai possui um aquário no formato de um tanque retangular, cujas dimensões internas são mostradas na figura abaixo.

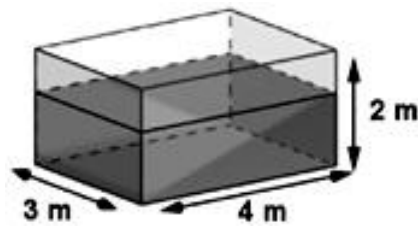


Figura 56: Figura 1 da questão 1.

Fonte: Vestibular Unifor

O volume de água contido no aquário é de $15m^3$. O aquário será reposicionado de modo que a base será uma das faces com 3m de largura e 2m de comprimento, como mostrado abaixo.

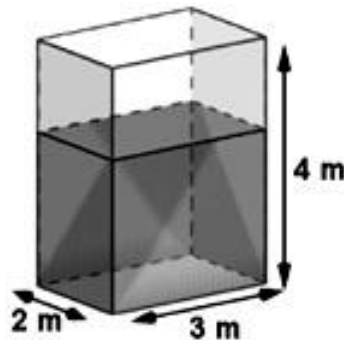


Figura 57: Figura 2 da questão 1.

Fonte: Vestibular Unifor

A altura da coluna de água no tanque após ele ser reposicionado será

- a) 1,5 m
- b) 2,0 m

- c) 2,5 m
- d) 3,0 m
- e) 3,5 m

2. (ENEM - 2017) Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:

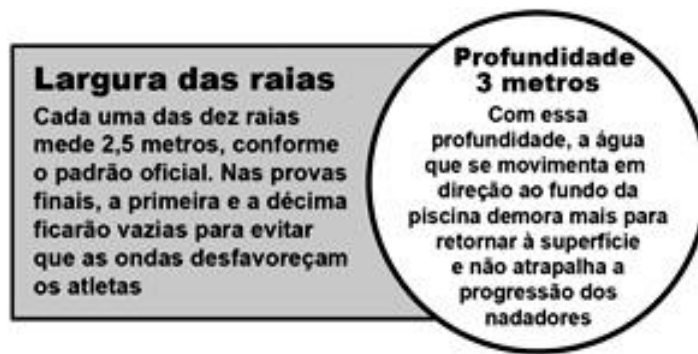


Figura 58: Figura da questão 2.

Fonte: Inep - Enem 2017

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a:

- a) 3750
 - b) 1500
 - c) 1250
 - d) 375
 - e) 150
3. (IFPE - 2016) Uma folha retangular de papelão de 40cm por 30cm será utilizada para confeccionar uma caixa, sem tampa, em forma de paralelepípedo, de base retangular. Para isso, deve-se, a partir desta folha de papelão, retirar 4 quadrados de lado 5cm, de cada um dos vértices e, em seguida, dobrar os lados, conforme a figura abaixo:

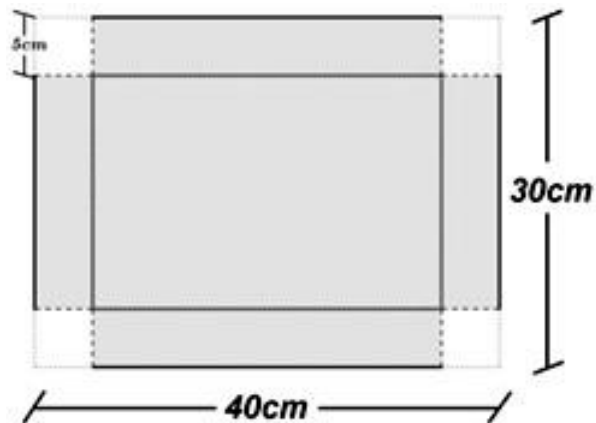


Figura 59: Figura da questão 3.

Fonte: IFPE 2016

Determine, em litros, o volume dessa caixa.

- a) 3 litros
 - b) 2 litros
 - c) 1 litro
 - d) 4 litros
 - e) 5 litros
4. (Autora) Um prisma de base quadrangular possui volume igual a 192cm^3 . Determine sua altura sabendo que ela corresponde ao triplo da medida da aresta da base.

Lista de Problemas (Aula 02)

1. (UFPR - 2017) A figura abaixo apresenta um molde para construção de uma pirâmide hexagonal regular. Para montar essa pirâmide, basta recortar o molde seguindo as linhas contínuas, dobrar corretamente nas linhas tracejadas e montar a pirâmide usando as abas trapezoidais para fixar sua estrutura com um pouco de cola. Sabendo que cada um dos triângulos tracejados nesse molde é isósceles, com lados medindo 5 cm e 13 cm, qual o volume dessa pirâmide?

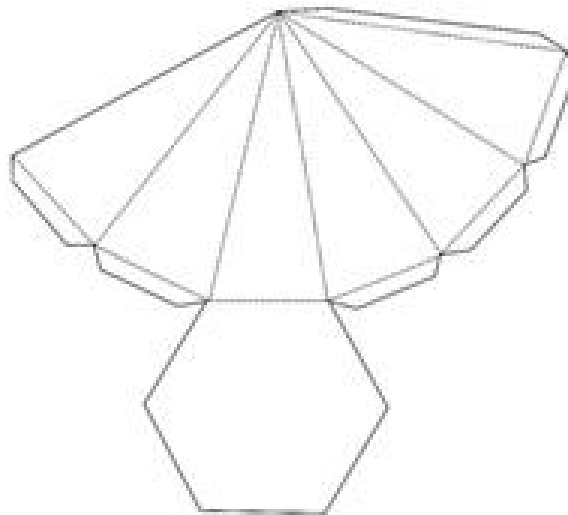


Figura 60: Figura da questão 1.

Fonte: Vestibular UFPR

2. (IFPE) Walter é aluno do curso de Design Gráfico. Ele está interessado em objetos decorativos para ambientes internos. Para o seu trabalho de conclusão de curso, ele projetou uma divisória usando octaedros regulares, como o da figura abaixo. Nessa divisória, cada um deles é suspenso por meio de um fio vertical que é preso a um dos seus vértices. Se cada octaedro tem 15cm de aresta, qual o volume de cada um desses sólidos, em centímetros cúbicos?

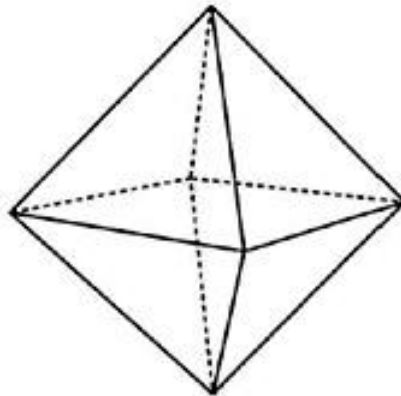


Figura 61: Figura da questão 2.

Fonte: IFPE

3. (UERJ) Leia os quadrinhos:

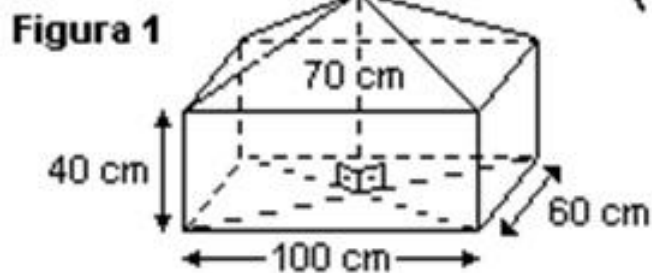


Figura 62: Figura da questão 3.

Fonte: Vestibular UERJ

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho-de-mão do personagem

seja igual ao do sólido esquematizado na figura 1, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo. Assim, qual o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em dm^3 .

4. (Brainly) Na Antiguidade, a arquitetura destacou-se com a construção de obras monumentais, tais como as pirâmides do Egito. As pirâmides tinham base quadrangular e eram feitas com pedras que pesavam cerca de 20 toneladas. Calcule, em m^3 , o volume de uma pirâmide quadrangular regular cujo o perímetro da base mede 24m e o apótema da pirâmide mede 5m.

Lista de Problemas (Aula 03)

1. (FMP - 2018) A Figura mostra um retângulo ABCD cujos lados medem 7 cm e 3 cm. Um cilindro será formado girando-se o retângulo ABCD em torno da reta definida pelo seu lado AB. Qual a medida do volume desse cilindro, em centímetros cúbicos?

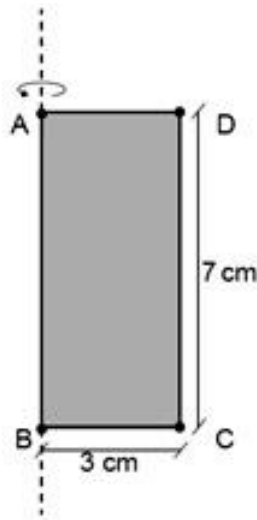


Figura 63: Figura da questão 1.

Fonte: Vestibular FMP 2018

2. (FDSBC - 2017) Uma loja vende chocolates na forma de cilindros e de prismas de base retangular, ambos maciços, sendo que cada cilindro tem 1 cm de diâmetro e 6 cm de altura, e cada prisma tem 3 cm de comprimento e 0,5 cm de espessura, conforme mostram as figuras.

Utilizando $\pi = 3$ e sabendo que o volume de 6 cilindros equivale ao volume de 9 prismas, determine a largura (L), em centímetros, de um prisma.

3. (UNIFOR CE - 2018) Um posto de combustível inaugurado recentemente em Fortaleza, usa tanque subterrâneo que tem a forma de um cilindro circular reto

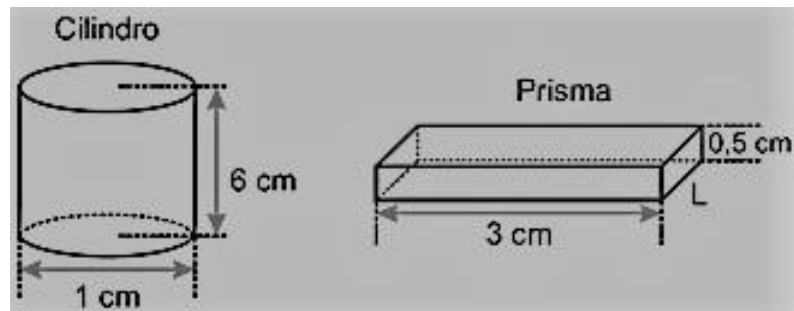


Figura 64: Figura da questão 2.

Fonte: Vestibular FDSBC 2017

na posição vertical, como mostra a figura abaixo. O tanque está completamente cheio com $42m^3$ de gasolina e $30m^3$ de álcool.

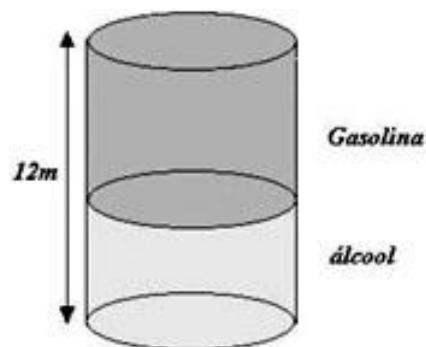


Figura 65: Figura da questão 3.

Fonte: Vestibular Unifor 2018

Considerando que a altura do tanque é de 12 metros, a altura da camada de gasolina é:

- a) 6 m
- b) 7 m
- c) 8 m
- d) 9 m
- e) 10 m

4. (IFSC - 2017) Diante dos frequentes períodos de estiagem na cidade onde está sediada, a empresa MESOC decidiu construir um reservatório para armazenar água. Considerando que esse reservatório deva ser cilíndrico e ter 10 metros de diâmetro interno e 10 metros de altura, assinale a alternativa CORRETA. Determine a capacidade do reservatório a ser construído, em litros, Obs.: (Use: $\pi = 3,1$)

Lista de Problemas (Aula 04)

1. (IFSC - 2017) Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5cm e altura de 30cm está parcialmente ocupado por $625\pi\text{cm}^3$ de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5cm e altura de 6cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

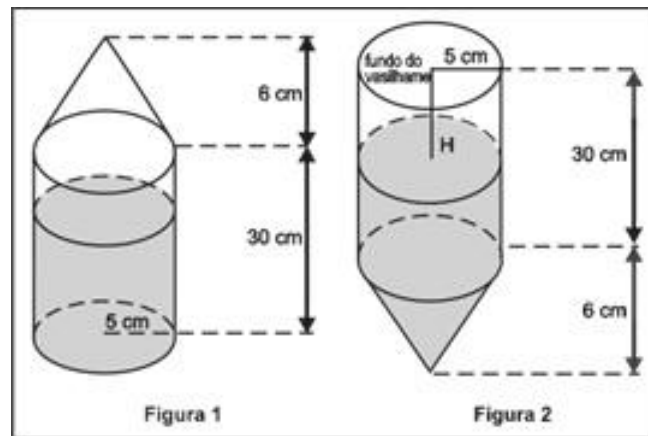


Figura 66: Figura da questão 1.

Fonte: IFSC 2017

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância H?

- a) 5 cm
- b) 7 cm
- c) 8 cm
- d) 12 cm
- e) 18 cm

2. (FAMEMA SP - 2016) Uma lata de suco com o formato de um cilindro circular reto com 12 cm de altura e 3 cm de raio da base está completamente cheia, conforme mostra a figura 1. Parte desse suco será colocado em uma taça na forma de um cone circular reto com 9 cm de altura e raio da boca igual a 4 cm, conforme mostra a figura a seguir.

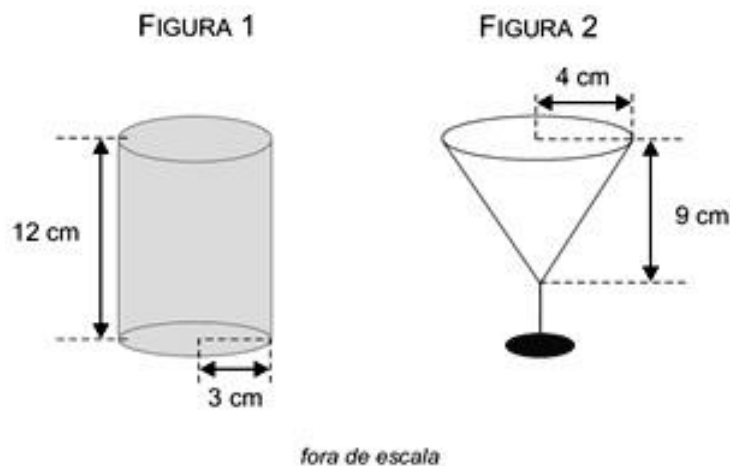


Figura 67: Figura da questão 2.

Fonte: FAMEMA

- Após encher completamente a taça, o suco restante dentro da lata terá uma altura aproximada de:
- a) 6,0 cm.
 - b) 6,6 cm.
 - c) 6,8 cm.
 - d) 6,4 cm.
 - e) 6,2 cm.
3. (ENEM - 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de $20m^3$.

Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

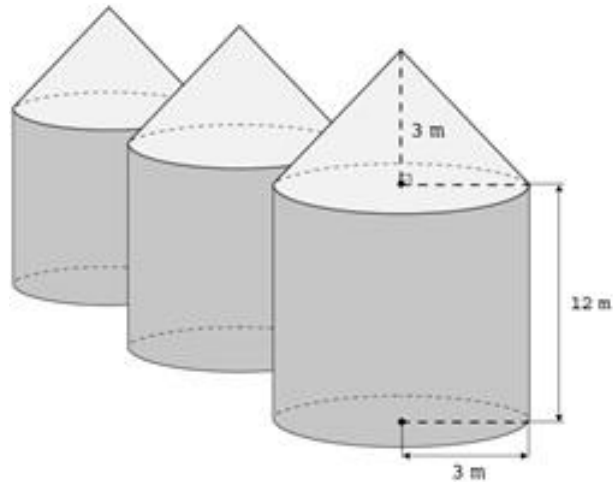


Figura 68: Figura da questão 3.

Fonte: Inep - Enem 2016

Utilize 3 como aproximação para π . O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

- a) 6 m
 - b) 16 m
 - c) 17 m
 - d) 18 m
 - e) 21 m
4. (UNIFOR - 2015) Um dia de muito calor David senta-se à mesa de um bar na orla marítima de Fortaleza e pede um chope. Nesse local, o chope é servido em tulipas que são copos com formas de um cone invertido, como mostra a figura abaixo. A tulipa tem 15cm de profundidade e capacidade para 300ml. Suponha que o chope foi tirado com 3cm de colarinho (espuma). Qual o volume aproximado de chope (líquido) contido na tulipa?

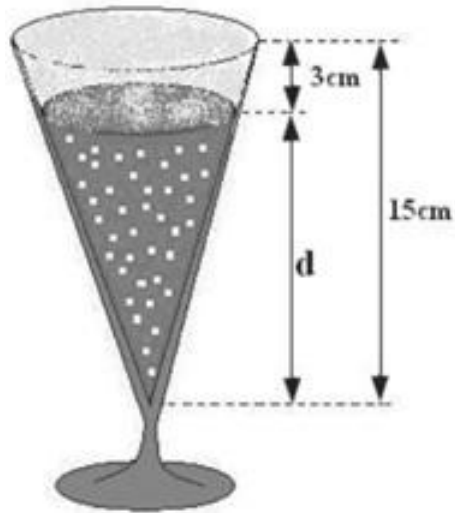


Figura 69: Figura da questão 4.

Fonte: Vestibular Unifor 2015

- a) $V = 152 \text{ ml}$
- b) $V = 153,6 \text{ ml}$
- c) $V = 155,2 \text{ ml}$
- d) $V = 160 \text{ ml}$
- e) $V = 162,6 \text{ ml}$

Referências

- [1] Alves, Rubens. *A escola com que sempre sonhei sem imaginar que pudesse existir.*, Campinas, SP, 2001.
- [2] Assman, Hugo. *Reencantar a Educação Rumo a sociedade Aprendente. Petrópolis*, quarta edição, Petrópolis, SP, 2000.
- [3] Artigue, M. *Ingénierie Didactique. In: BRUN, J. (Org.). Didactique des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé S.A, 1996.
- [4] Ausubel, David. *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva. Portugal: Plátano Edições Técnicas*, primeira edição, traduzido por Lígia Teodoro, 2003.
- [5] AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D. HANESIAN, H. *Psicologia Educacional (Tradução de Educational Psychology, 1968)*, Rio de Janeiro, Interamericana, 1980.
- [6] BACHELARD, G. A. *A formação do espírito científico: uma contribuição para a psicanálise do conhecimento*, Contraponto, Rio de Janeiro, 1996.
- [7] BOGDAN, Roberto. BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em educação*, Porto Editora, LDA: Portugal, 1994.
- [8] BORDANAVE, I. *Estratégias de aprendizagem*, São Paulo: Vozes, 1983.
- [9] BORGES, H. N. et all. *A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas*, In: *Anais do XV EPENN - Encontro De Pesquisa Educacional Do Nordeste*, São Luís, 2001.
- [10] BORGES NETO, Hermínio; SANTOS, Maria José Costa dos(2006). *O desconhecimento das operações concretas e os números fracionários In: Entre Tantos: diversidade na pesquisa educacional*, Volume 1, Fortaleza: UFC.

- [11] BORGES NETO, H. B. (Coord.). *Sequência Fedathi: Uma Proposta Pedagógica para o Ensino de Ciências e Matemática*, Fortaleza, Edições UFC, 2013.
- [12] BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Secretaria de educação Básica*, Brasília: MEC, 2006.
- [13] Dante, Luiz R. *Didática da resolução de problemas de matemática*, segunda edição, São Paulo: Ática, 1991.
- [14] DESLAURIERS, Jean-Pierre. KÉRISIT, Michèle. *O delineamento de pesquisa qualitativa. In: POUPART (et. al). A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos*, Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.
- [15] DOLCE, O., POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*, quinta edição, São Paulo: Atual, 1993.
- [16] ERICKSON, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In Wittrock, M.C. (Ed.). *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan Publishing Co. p. 119-161. Traducción al español: Erickson, F. (1989) Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. In Wittrock, M.C. (Comp.), *La investigación en la enseñanza, II*, Barcelona, Paidós. pp. 195-301.
- [17] EVES, HOWARD. *Introdução à História da Matemática*, Campinas, SP: Editora Unicamp, 2008.
- [18] FOUREZ, G. *Crise no ensino de ciências? Investigação em Ensino de Ciências*, VOLUME 8, 2003.
- [19] FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*, São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- [20] FREIRE, Paulo. *Pedagogia do Oprimido*, Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.
- [21] GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*, quarta edição, São Paulo: Atlas, 2007.

- [22] HUETE, J.C.S. e BRAVO, J.A.F. *O Ensino de Matemática: Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*, Porto Alegre: Artmed, 2006.
- [23] Kemmis, S. and McTaggart, R. (Eds.). (1988). *The action search reader*, 3rd ed. Geelong: Deakin University Press.
- [24] LANKSHEAR, C. KNOBEL. *Pesquisa Pedagógica: do projeto à implementação*, Porto Alegre: Artmed, 2008.
- [25] LIBÂNEO, José Carlos. *Adeus professor, adeus professora? Novas exigências educacionais e profissão docente*, sétima edição, São Paulo: Cortez, 2003.
- [26] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E.,MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*,volume 2, sexta edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [27] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E.,MORGADO, A. C. *Temas e Problemas*, Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [28] LÜDKE, M. e ANDRÉ, M.E.D.A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*, 1ª reimpressão, S. Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.
- [29] MASINI, Elcie F. Salzano. MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa: condições para ocorrências e lacunas que levam a comprometimentos*, São Paulo: Vetor, 2008.
- [30] MAYER, R.E. *Cognição e aprendizagem humana (Tradução de Thinking and problem solving, 1977)*, São Paulo, Cultrix.
- [31] MINAYO, M. C. S.Frank Close, *O desafio do conhecimento. Pesquisa qualitativa em saúde*,São Paulo: HUCITEC, 2007.
- [32] MIZUKAMI, M. G. N. *Ensino: as abordagens do processo*, São Paulo: EPU, 1986.
- [33] MORAIS, S. R. *O papel das representações mentais na percepção-ação: uma perspectiva crítica (tese)*, São Paulo: Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, 2006.

- [34] MOREIRA, M.A.; MANSINI, E.F.S. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*, São Paulo: Moraes, 1982.
- [35] MOREIRA, Marco Antônio. BUCHWEITZ, Bernardo, *Mapas Conceituais: instrumentos didáticos, de avaliação e de análise de currículo*, São Paulo: Editora Moraes, 1987.
- [36] MOREIRA, Antonio Flavio B. *Currículos e Programas no Brasil*, segunda edição. Campinas-SP. Papirus,1995.
- [37] MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de Aprendizagem*, São Paulo: Ed. EPU, 1999.
- [38] MOREIRA, Marco Antonio. MASINI, Elcie F. Salzano. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*, São Paulo: Centauro, 2001.
- [39] MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem Significativa Crítica.*, Porto Alegre: Ed. Adriana Toigo, 2005.
- [40] MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem Significtiva: a teoria e textos complementares*, São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2011.
- [41] MOREIRA, Marco Antonio. *Metodologias de Pesquisa em Ensino*, São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2011.
- [42] MORETTO, V.P. *A Mobilização como Estratégia em Sala de Aula. Palestra proferida no 13º Congresso Internacional de Educação da LBV. São Paulo, 01/08/2014. Disponível em: <https://www.lbv.org/educacao/congresso-de-educacao/vasco-moretto-discute-mobilizacaocomo-estrategia-em-sala-de-aula>, Último acesso em: 30/06/2015.*
- [43] NETO, A. C. M. *Geometria*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [44] NOVAK. J.D. *Uma Teoria de Educação*, (Tradução de M. A. MOREIRA), São Paulo, Pioneira, 1981.

- [45] OLIVEIRA, Inês Barbosa. ALVES; Nilda (orgs.). *Pesquisa no/do cotidiano das escolas: sobre redes de saberes*, Rio de Janeiro: DPA, 2001.
- [46] OTTE, Michael. *O formal, o social e o subjetivo: Uma introdução à Filosofia e a Didática da Matemática*, São Paulo: UNESP Editora, 1991, 322P.
- [47] PAIS, L.C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*, segunda edição. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- [48] POLYA, G. *A arte de resolver problemas (Tradução de How to solve it, 1945)*, Rio de Janeiro, Interciência, 1995.
- [49] POLYA. G. *A new aspect of mathematical method*, Princeton University Press. Princeton e Oxford, 2004.
- [50] POLYA. G. *A arte de resolver problemas (Tradução de How to solve it, 1945)*, Rio de Janeiro, Interciência, 2006.
- [51] POZO MUNICIO, J.I (Coord). *La solución de problemas*, Madrid. Santillana,S.A. 1994.
- [52] SANTANA, José Rogério; BORGES NETO, Hermínio; ROCHA, Elizabeth Matos. *A Seqüência Fedathi: uma proposta de mediação pedagógica no ensino de matemática. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004, Recife, PE. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC15472834830.pdf>> Acesso em: 15 out. 2018.
- [53] SILVA, Benedito Antonio da. Contrato Didático. In: MACHADO Sílvia Dias Alcântara et al. *Educação matemática: uma introdução*, São Paulo: educ, 1999.
- [54] SOUZA, M.J.A. *Aplicações da seqüência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediado por tecnologias digitais. Tese de Doutorado*, Curso de Pós-

Graduação em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, 2010.

- [55] SOUZA, M.J.A. *Sequência Fedathi. Capítulo: Sequências no Ensino da Matemática: Retrospectiva Histórica de Dewey a Fedathi*, Fortaleza: Edições UFC, 2013.
- [56] THIOLENT, M. *Metodologia da Pesquisa-ação*, São Paulo: Cortez. 2000.
- [57] VEIGA, I.P.A. (Org.). *Técnicas de ensino: novos tempos, novas configurações*, Campinas SP: Papyrus, 2006.
- [58] VELIRI, I. *What Is the Value of Graphical Displays in Learning?*, Ed. Psychol. Rev., 14, 261, 2002.