



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

**ANDREA MACHADO FERNANDES AQUINO**

**UMA ABORDAGEM SOBRE A SEQUÊNCIA DE PADOVAN  
E O ENSINO DE PROPORÇÕES**

**JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ  
2019**

ANDREA MACHADO FERNANDES AQUINO

UMA ABORDAGEM SOBRE A SEQUÊNCIA DE PADOVAN E O ENSINO DE  
PROPORÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Clarice Dias de Albuquerque.

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ  
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Sistema de Bibliotecas

- 
- A657a Aquino, Andrea Machado Fernandes.  
Uma abordagem sobre a sequência de Padovan e o ensino de proporções. / Andrea Machado Fernandes Aquino. – 2019.  
57 f.: il. color., enc. ; 30 cm.
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2019.  
Orientação: Profa. Dra. Clarice Dias de Albuquerque.
1. Sequência de Padovan. 2. Sequência didática. 3. Número plástico. I. Título.

CDD 515.24

---

Bibliotecário: Jorge dos Santos Nogueira - CRB 3/1218



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

## UMA ABORDAGEM SOBRE A SEQUÊNCIA DE PADOVAN E O ENSINO DE PROPORÇÕES

**ANDREA MACHADO FERNANDES AQUINO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 25 de junho de 2019.

### Banca Examinadora

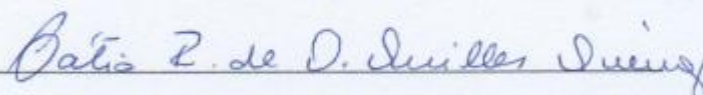


Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Clarice Dias de Albuquerque  
Orientadora



Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira  
Coorientador URCA

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade  
UFCA



Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz  
UNIFAL

*Dedico este trabalho a Deus, por ter sido minha base em todos os momentos.*

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus, pois, nos momentos mais difíceis do curso, foi Ele que me abasteceu de fé e esperança.

Agradeço também a Mãe Rainha por sua intercessão.

Agradeço ao meu esposo, Guilherme Paulo Aquino Gonçalves, por todo o apoio, paciência e companheirismo e, além disso, por seu trabalho brilhante na revisão do texto e na tradução.

Ao meu irmão, Lucas Machado Fernandes, que vem me ajudando desde o princípio na digitação do texto utilizando o Latex. Eu agradeço imensamente, por todo o apoio.

À minha mãe, Josefa Dauva Machado Fernandes, por não me fazer desanimar nunca, me incentivando a estudar durante todas as etapas da minha vida, me dando todo o suporte necessário e sempre rezando por mim.

Ao meu pai, Cicero Pereira Fernandes, por estar sempre ao meu lado, me ajudando em tudo e por todas as vezes que precisou acordar muito cedo, ou tarde da noite, para me levar/buscar no ponto de ônibus quando eu estava indo ou voltando de Juazeiro do Norte.

Aos meus colegas de curso, que sempre serviram de suporte em vários aspectos, ajudando nas mais diversas situações.

Aos meus professores, por toda aprendizagem que me proporcionaram.

Por fim, agradeço aos meus orientadores, Clarice Dias de Albuquerque e Paulo César Cavalcante de Oliveira, por terem orientado com maestria este trabalho.

*“ Os números governam o mundo.”  
(Pitágoras)*

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem sobre a Sequência de Padovan, suas propriedades e aplicações. Neste sentido, os capítulos iniciais discorrem, primordialmente, sobre o estudo de sequências numéricas e cálculo de recorrências, de modo generalizado. Foram destacadas algumas sequências relevantes, a fim de trazer familiaridade com o tema proposto, a saber: Sequências de Fibonacci, Pell, Lucas e Jacobsthal. Em seguida o trabalho enfatiza a Sequência de Padovan, sua convergência para o Número Plástico e sua importância para a Arquitetura proposta por Hans van Der Laan. Por fim, foi apresentada uma proposta pedagógica de aplicação do tema, utilizando a técnica de Sequência Didática no estudo de proporção no Ensino Fundamental.

**Palavras-chave:** Sequência. Sequência de Padovan. Sequência Didática. Proporções. Número Plástico.



## ABSTRACT

This work presents an approach about the Padovan Sequence, its properties and applications. In this sense, the initial chapters talk primarily about the study of numerical sequences and the calculation of recurrences in a generalized way. Some relevant sequences were highlighted, in order to bring familiarity to the proposed theme, to know: Fibonacci, Pell, Lucas and Jacobsthal sequences. Subsequently the work emphasizes the Sequence of Padovan, its convergence to the Plastic Number and its importance to Architecture proposed by Hans van Der Laan. Finally, a pedagogical proposal of application of the theme was presented, using the technique of Didactic Sequence in the study of proportion in Elementary School.

**Keywords:** Sequence. Padovan Sequence. Didactic Sequence. Proportions. Plastic Number.

# Lista de Figuras

1	Caracol exibindo espiral de Fibonacci . . . . .	16
2	Rosto da Mona Lisa obedecendo a espiral de Fibonacci . . . . .	16
4.3	Agrupamento de objetos . . . . .	47
4.4	Pentágono Plástico . . . . .	48
4.5	Construção do Pentágono Plástico . . . . .	48
4.6	Pentágonos semelhantes . . . . .	49
4.7	Espiral de Padovan formada por triângulos equiláteros com suas respectivas medidas dos lados . . . . .	49
5.8	Segmentos que obedecem à Razão Plástica . . . . .	51
5.9	Gráfico no plano cartesiano e raízes da equação com o software Geogebra .	53
5.10	Raízes da equação utilizando o software Maxima . . . . .	53

# Lista de Tabelas

1	Problema dos coelhos. . . . .	15
2	Aproximações de $\sqrt{2}$ . . . . .	22
5.3	Aproximações de $\psi$ . . . . .	51

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>SEQUÊNCIAS</b>	<b>12</b>
2.1	Noções Básicas . . . . .	12
2.2	Sequência de Fibonacci . . . . .	14
2.2.1	O Número de Ouro . . . . .	16
2.3	Sequência de Lucas . . . . .	19
2.4	Sequência de Jacobsthal . . . . .	21
2.5	Sequência de Pell . . . . .	22
2.5.1	Números de Pell e aproximações da $\sqrt{2}$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>RECORRÊNCIAS</b>	<b>24</b>
3.1	Recorrência Linear de 1ª Ordem . . . . .	24
3.2	Recorrência Linear de 2ª Ordem . . . . .	25
<b>4</b>	<b>SEQUÊNCIA DE PADOVAN</b>	<b>28</b>
4.1	Hans van Der Laan e Richard Padovan . . . . .	28
4.2	Sequência de Padovan . . . . .	28
4.5	A equação característica $X^3 - X - 1 = 0$ . . . . .	35
4.6	Função Geradora . . . . .	39
4.7	Sequência de Matrizes . . . . .	40
4.8	Q-Matriz de Padovan . . . . .	44
4.9	O Número Plástico . . . . .	46
4.9.1	Espiral de Convergência . . . . .	47
<b>5</b>	<b>SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Sob o ponto de vista da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Matemática é uma linguagem, uma forma de ver e modelar realidades. Mesmo que algumas de suas aplicações não sejam práticas, enxergar a Matemática, com contexto, torna o seu estudo mais dinâmico e interessante, [7].

O estudo de sequências é uma habilidade trazida pela BNCC para o Ensino Fundamental: “Investigação de padrões em sequências e representação da regularidade observada em linguagem matemática (continuar sequência; apresentar o termo qualquer).”

As sequências numéricas são objetos de estudo da Matemática desde muito tempo atrás. A aparição constante de padrões numéricos na natureza, na arte e na arquitetura sempre encantou grandes estudiosos e os motivou a descobrir propriedades que os relacionasse ainda mais com o cotidiano.

A principal sequência examinada neste trabalho, a Sequência de Padovan, foi alvo de intensas pesquisas e experimentos do monge beneditino e ex-aluno do curso de Arquitetura, Hans van Der Laan, que muito contribuiu para a arquitetura mundial ao descobrir a constante plástica  $\psi$ , um número irracional encontrado através da convergência da Sequência de Padovan. Essa constante está associada à clareza de percepção e harmonia em projetos tridimensionais; o que equivale à importância da Razão Áurea para a beleza, trazendo simetria em duas dimensões.

Apesar de tamanha relevância, a Sequência de Padovan acabou sendo negligenciada e pouco conhecida, principalmente no Brasil, onde os trabalhos sobre o assunto são escassos. Sendo assim, é objetivo deste trabalho promover essa sequência.

O primeiro capítulo tem a função de introduzir ao leitor uma abordagem sobre sequências numéricas, incluindo notações e convergência, assim como trazer um apanhado de sequências famosas e suas aplicações. São elas: Sequência de Fibonacci, Lucas, Jacobsthal e Pell.

Como nas sequências numéricas seus termos estão sempre atrelados aos termos que os antecedem, trouxemos, no segundo capítulo, o estudo das Recorrências Lineares, o qual servirá de suporte nesse aspecto.

A partir do embasamento dos capítulos anteriores, o terceiro capítulo traz a Sequência de Padovan, suas propriedades, equação característica, definição matricial, matriz geradora dos termos da sequência e convergência para o Número Plástico.

E, por fim, no quarto capítulo, será vista uma proposta de Sequência Didática para o 7º ano do Ensino Fundamental, onde, através do estudo de Razão e Proporção, traremos a Sequência de Padovan para que os alunos possam conhecê-la.

# 2 SEQUÊNCIAS

## 2.1 NOÇÕES BÁSICAS

As sequências estão presentes na natureza e ligadas ao nosso cotidiano de diferentes formas.

**Definição 1.** *Uma sequência de números reais é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . O valor  $x(n)$  será denotado por  $x_n$  e denominado  $n$ -ésimo termo da sequência.*

A notação usada para definir uma sequência, geralmente, é dada por:

$$(x_n), (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ou } (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots).$$

**Exemplo 1.** *A sequência definida como  $(x_n)$ ;  $x_n = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dada por*

$$(1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n + 1, \dots)$$

*é conhecida por sequência dos números ímpares.*

À medida que  $n$  cresce,  $x_n$  pode se aproximar de um número real  $L$ , motivando a seguinte definição:

**Definição 2.** *Dizemos que uma sequência  $x_n$  converge para  $L$  quando*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0; n > N \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon,$$

*onde  $N \in \mathbb{N}$ . Simbolicamente, representamos por  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ , ou apenas,  $x_n \rightarrow L$ .*

**Exemplo 2.** *Dada a sequência  $x_n = \frac{1}{n}$ , provaremos que ela converge para 0. De fato, dado  $\epsilon > 0$ , seja  $N \in \mathbb{N}$ , temos que*

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{N} = \epsilon.$$

*Portanto,  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .*

Como a convergência está associada à noção de limite, então é natural, considerarmos as operações básicas abaixo. A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [16].

**Teorema 1.** *Dadas duas seqüências  $(x_n)$  e  $(y_n)$ , onde  $x_n \rightarrow L_1$  e  $y_n \rightarrow L_2$ , temos:*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = L_1 \pm L_2$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = L_1 \cdot L_2$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{L_1}{L_2}$ , desde que  $L_2 \neq 0$ ;
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} kx_n = kL_1$ .

Uma seqüência é considerada *limitada inferiormente* quando existe  $a \in \mathbb{R}$ , tal que  $a \leq x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Neste caso,  $a$  é uma *cota inferior* do conjunto formado pelos elementos da seqüência  $(x_n)$ . Analogamente, uma seqüência é dita *limitada superiormente* quando existe  $b \in \mathbb{R}$ , tal que  $x_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . E daí temos  $b$  como uma *cota superior* do conjunto formado pelos elementos de  $(x_n)$ . Quando  $(x_n)$  for limitada inferior e superiormente, ela será dita apenas limitada.

**Definição 3.** *À maior das cotas inferiores de um conjunto dá-se o nome de ínfimo do conjunto. Analogamente, à menor das cotas superiores dá-se o nome de supremo do conjunto.*

**Teorema 2.** *Se  $(x_n)$  é uma seqüência convergente, então ela é limitada.*

*Demonstração.* Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > N \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon,$$

isto é, a partir do índice  $n = N + 1$ , a seqüência é limitada superiormente por  $L + \epsilon$  e inferiormente por  $L - \epsilon$ . Daí, tomando  $A$  e  $B$ , como sendo o mínimo e o máximo, respectivamente, entre

$$a_1, a_2, \dots, a_N, L - \epsilon \text{ e } L + \epsilon.$$

Segue-se, para todo  $n$ , que

$$A \leq a_n \leq B,$$



o que completa a demonstração.  $\square$

Dizemos que uma sequência  $(x_n)$  é *crescente* (respectivamente *decrecente*) quando  $x_n < x_{n+1}$ , (respectivamente  $x_n > x_{n+1}$ ), para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Do mesmo modo,  $(x_n)$  será não crescente (respectivamente não decrescente) quando  $x_n \geq x_{n+1}$  (respectivamente  $x_n \leq x_{n+1}$ ). Em qualquer um dos quatro casos acima,  $(x_n)$  é dita monótona.

**Teorema 3.** *Toda sequência  $x_n$  monótona e limitada converge.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência decrescente. Ela é limitada superiormente por  $x_1$ . Como a sequência é limitada, segue-se que é limitada inferiormente e, conseqüentemente, possui um ínfimo  $I$ . Dessa forma, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$I - \epsilon < I \leq x_N < I + \epsilon.$$

Por ser uma sequência não crescente,  $x_n \leq x_N$  para todo  $n > N$ . Assim,

$$n > N \Rightarrow I - \epsilon < x_n < I + \epsilon,$$

ou seja,  $x_n \rightarrow I$ . Prova-se, analogamente, para o caso não decrescente.  $\square$

## 2.2 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Em 1170, nasceu em Pisa, na Itália, Leonardo de Pisa, cujo interesse pela Matemática floresceu ainda muito cedo quando adentrou ao mundo dos negócios mercantis em que seu pai, Guiliermo Bonacci, trabalhava. Ficou conhecido como Fibonacci devido a uma abreviação da expressão “filho de Bonacci”.

Fibonacci foi o responsável por introduzir os algarismos indo-arábicos na Europa, porém o que o tornou conhecido foi o problema dos coelhos, escrito no seu livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), em 1202, e que deu origem à famosa Sequência de Fibonacci, hoje conhecida no mundo inteiro. O problema consiste no seguinte:

*Um casal de coelhos recém nascidos foi adotado. Os coelhos demoram 1 mês para atingirem a maturidade sexual, se tornarem férteis e, após o 2º mês, começarem a se reproduzir. Sabendo que cada casal de coelhos gera sempre um único novo casal por mês, que nenhum deles morreu, e que, ao atingirem a maturidade, tiveram filhotes todos os meses, ao final de 12 meses, quantos coelhos havia?*

Para resolvermos este problema, observe a Tabela 1 com a reprodução dos coelhos, a cada mês, durante o período de 1 ano. Através dela é possível concluir que ao final de 12 meses, haverá 144 casais, isto é, 288 coelhos.

Mês	Casais Adultos	Casais Jovens	Total
01	0	1	1
02	1	0	1
03	1	1	2
04	2	1	3
05	3	2	5
06	5	3	8
07	8	5	13
08	13	8	21
09	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Tabela 1: Problema dos coelhos.

Daí é fácil perceber que, a partir do terceiro mês, o número de coelhos é sempre o resultado da adição dos valores dos dois meses anteriores, veja:

$$\begin{aligned}2 &= 1 + 1 \\3 &= 2 + 1 \\5 &= 3 + 2 \\&\vdots \\144 &= 89 + 55 \\&\vdots \\f_{n+2} &= f_n + f_{n+1}\end{aligned}$$

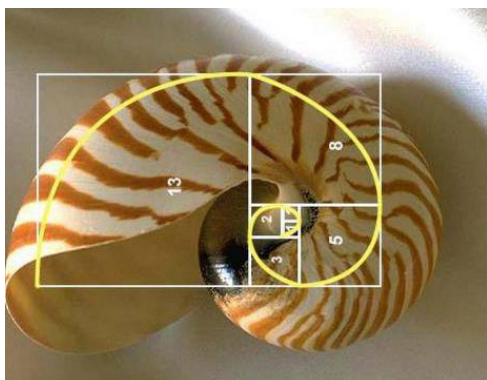
A sequência  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$  ficou conhecida por Sequência de Fibonacci. Matematicamente, definiremos a sequência de Fibonacci da seguinte forma:

**Definição 4.** A sequência de Fibonacci  $(f_n)$  é definida por  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 1$ , onde  $f_1 = 1$  e  $f_2 = 1$ .

**Observação 1.** Adotaremos  $f_0 = 0$ .

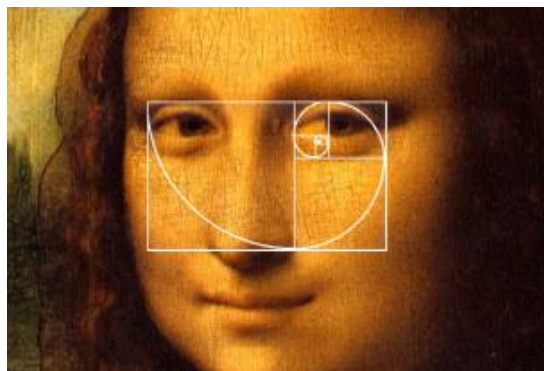
De acordo com [3], são várias as aplicações dessa sequência, como na computação, na administração de finanças, nos jogos, na pintura, e até mesmo no corpo humano e no esteriótipo de algumas plantas e animais. Veja alguns exemplos nas imagens a seguir:

Figura 1: Caracol exibindo espiral de Fibonacci



Fonte: <https://www.gaussianos.com> [8]

Figura 2: Rosto da Mona Lisa obedecendo a espiral de Fibonacci



Fonte: <https://gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcaoaurea/> [9]

## 2.2.1 O NÚMERO DE OURO

O Número de Ouro visto nesta seção, trata-se de um número irracional associado a representação da beleza através da simetria em duas dimensões, por esse motivo, também é chamado de Proporção Áurea, Razão Áurea ou Divina Proporção.

Segundo [3], dado um segmento  $AB$  e um  $C$  ponto pertencente a  $AB$ , dizemos que  $C$  divide o segmento  $AB$  segundo a razão áurea, se ocorrer a seguinte proporção

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC},$$

quando  $BC > AC$ . Sabendo disso, considere  $AB = x$ ,  $BC = y$  e conseqüentemente,  $AC = x - y$ . Substituindo esses valores na proporção acima, obtemos  $y^2 + xy - x^2 = 0$ .

Resolvendo a equação acima em função de  $y$ , obtemos

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x^2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm x\sqrt{5}}{2}$$

e, como estamos tratando da medida de um segmento, a raiz negativa da equação acima não convém considerar. Logo,

$$y = x \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right).$$

Voltando à razão  $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$ , teremos

$$\frac{x}{x \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618033\dots$$

donde este irracional será chamado de *Número de Ouro*, denotado por  $\varphi$ .

Focaremos agora em estabelecer uma relação entre os termos da Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. Para isso, considere agora a razão  $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ , onde

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots).$$

Sabendo que  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ , é fácil ver que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}.$$

Ainda baseado no texto de [3], enunciaremos a relação entre os termos da Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro:

**Proposição 4.** *Quando  $n$  tende para o infinito, a sequência  $\frac{f_{n+1}}{f_n}$  converge para  $\varphi$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, seja  $(y_n)$  a sequência onde  $y_1 = 1$  e  $y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n}$ , para todo  $n \geq 1$ . Note que  $(y_n)$  é a sequência que define  $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ .

Sendo a função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ , perceba que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 2 &= y_2 \\ f(x_2) &= 1 + \frac{1}{2} &= y_3 \\ &\vdots &\vdots \\ f(x_{n-1}) &= 1 + \frac{1}{x_{n-1}} &= y_n. \end{aligned}$$

e ao tomar  $a_1$  e  $a_2$  positivos, com  $a_1 > a_2$ , temos:

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 &\Leftrightarrow a_1 a_2 + a_1 > a_1 a_2 + a_2 \\ &\Leftrightarrow a_1(a_2 + 1) > a_2(a_1 + 1) \\ &\Leftrightarrow \frac{a_1(a_2 + 1)}{a_2 + 1} > \frac{a_2(a_1 + 1)}{a_1 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{a_1 a_2}{a_2 + 1} > \frac{a_1 a_2}{a_1 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} > \frac{a_1}{a_1} \\ &\Leftrightarrow f(a_2) > f(a_1) \end{aligned}$$

o que prova que  $f$  é uma função decrescente. Agora, provaremos que a sequência  $(y_n)$  gera duas subsequências, sendo uma delas crescente e ímpar, e a outra decrescente e par.

Para isso, consideremos a função  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = f(f(x)) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

A função  $g$  é crescente, pois, supondo  $b_1$  e  $b_2$  positivos, com  $b_1 < b_2$ , segue-se

$$\begin{aligned} g(b_2) - g(b_1) &= \frac{2b_2+1}{b_2+1} - \frac{2b_1+1}{b_1+1} \\ &= \frac{(2b_2+1)(b_1+1) - (2b_1+1)(b_2+1)}{(b_1+1)(b_2+1)} \\ &= \frac{b_2 - b_1}{(b_1+1)(b_2+1)} > 0, \end{aligned}$$

já que  $b_1 < b_2$  e ambos são positivos

Dessa forma, aplicando a função nos termos da sequência  $(y_n)$  na função  $g$ , temos

$$\begin{array}{ccccccc} g(y_1) & = & f(f(y_1)) & = & f(y_2) & = & y_3 \\ g(y_2) & = & f(f(y_2)) & = & f(y_3) & = & y_4 \\ g(y_3) & = & f(f(y_3)) & = & f(y_4) & = & y_5 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g(y_{2n-1}) & = & f(f(y_{2n-1})) & = & f(y_{2n}) & = & y_{2n+1} \\ g(y_{2n}) & = & f(f(y_{2n})) & = & f(y_{2n+1}) & = & y_{2n+2} \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

onde observamos as subsequências  $g(y_{2n}) = y_{2n+2}$  e  $g(y_{2n-1}) = y_{2n+1}$ . Provaremos os seguintes casos, por indução sobre  $n \in \mathbb{N}$ :

1.  $y_{2n-1} < y_{2n+1}$ ;
2.  $y_{2n} > y_{2n+2}$ ;
3.  $y_{2n-1} < y_{2n}$ .

De fato,

1. É fácil ver que para  $n = 1$  é válido, pois  $y_1 = 1 < y_3 = 3/2$ . Supondo que vale para  $n$ , isto é,  $y_{2n-1} < y_{2n+1}$ , temos que

$$y_{2n-1} < y_{2n+1} \Rightarrow g(y_{2n-1}) < g(y_{2n+1}) \Rightarrow y_{2n+1} < y_{2n+3},$$

pois  $g$  é crescente. Logo, vale para  $n+1$  e, conseqüentemente, vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Perceba que para  $n = 1$  é válido, pois  $y_2 = 2 > y_4 = 5/3$ . Supondo que vale para  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $y_{2n} > y_{2n+2}$ , temos que

$$y_{2n} > y_{2n+2} \Rightarrow g(y_{2n}) > g(y_{2n+2}) \Rightarrow y_{2n+2} > y_{2n+4}$$

pois  $g$  é crescente. Logo, vale para  $n + 1$  e, conseqüentemente, vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Para  $n = 1$  é válido, pois  $y_1 = 1 < y_2 = 2$ . Supondo que vale para  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $y_{2n-1} < y_{2n}$ , temos que

$$y_{2n-1} < y_{2n} \Rightarrow g(y_{2n-1}) < g(y_{2n}) \Rightarrow y_{2n+1} < y_{2n+2}$$

pois  $g$  é crescente. Logo, vale para  $n + 1$  e, conseqüentemente, vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Com isso, podemos concluir que a subsequência dos termos pares  $(y_{2n})$  é decrescente e limitada inferiormente por  $y_1 = 1$  e, pelo Teorema 3, a subsequência converge para um  $L_1 \in \mathbb{R}$ . Seguindo o mesmo raciocínio, a subsequência  $(y_{2n-1})$  é crescente e limitada superiormente por  $y_2 = 2$ , o que indica que existe  $L_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim(y_{2n-1}) = L_2$ .

Sabemos que,

$$y_{2n+2} = g(y_{2n}) = \frac{2y_{2n} + 1}{y_{2n} + 1} \quad \text{e} \quad y_{2n+1} = g(y_{2n-1}) = \frac{2y_{2n-1} + 1}{y_{2n-1} + 1}.$$

Dessa forma, ao aplicar os limites, obtemos

$$\lim y_{2n+2} = \lim \frac{2y_{2n} + 1}{y_{2n} + 1} \Leftrightarrow L_1 = \frac{2L_1 + 1}{L_1 + 1} \Leftrightarrow L_1^2 - L_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow L_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e, analogamente,  $L_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Como as subsequências possuem apenas termos positivos, conclui-se que

$$L_1 = L_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Portanto,  $y_n \rightarrow \varphi$ . □

## 2.3 SEQUÊNCIA DE LUCAS

Segundo [19], Édouard Lucas nasceu em 1842, em Amiens, na França. Estudou na *École Normale Supérieure* e lecionou Matemática durante vários anos em escolas francesas. Destacou-se por ser um professor preocupado com a aprendizagem dos seus alunos, além de ter sido um exímio estudioso com inúmeras publicações de artigos matemáticos, principalmente voltados para a Teoria dos Números, área da matemática que o fascinava e o levou a estudar a Sequência de Fibonacci, a qual era conhecida até então por *Série de Lamé*.

Segundo [11], ao mudarmos os dois termos iniciais da Sequência de Fibonacci por 1 e 3 e mantendo a mesma relação que a define, obtemos uma nova sequência, (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...) profundamente ligada à Sequência de Fibonacci e que, posteriormente, ficou conhecida como Sequência de Lucas. Vamos defini-la matematicamente:

**Definição 5.** A sequência  $(l_n)$  definida por  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 3$  e termos iniciais  $l_1 = 1$  e  $l_2 = 3$  é chamada Sequência de Lucas.

Novamente, tomando por base [19], vamos enunciar uma relação bem interessante entre a Sequência de Fibonacci  $(f_n)$  e a sequência de Lucas  $(l_n)$ . Para isso, precisaremos antes da seguinte definição e do teorema que sucede:

**Definição 6.** Seja  $(a_n)$  uma sequência com  $a_1$  e  $a_2$  números reais e  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ , para todo  $n \geq 2$ . Dizemos que  $(a_n)$  é uma Sequência Generalizada de Fibonacci.

**Teorema 5.** Se  $(a_n)$  é uma Sequência Generalizada de Fibonacci, e  $(f_n)$  é a Sequência de Fibonacci, vale a seguinte fórmula:

$$a_n = a_2 f_{n-1} + a_1 f_{n-2}.$$

*Demonstração.* Por indução sobre  $n \in \mathbb{N}$ , a proposição acima é válida para  $n = 2$  e  $n = 3$  pois  $f_0 = 0$  e  $f_1 = f_2 = 1$ . Suponhamos que  $a_n = a_2 f_{n-1} + a_1 f_{n-2}$  seja válida para  $n$  e para  $n + 1$ , ou seja,

$$a_n = a_2 f_{n-1} + a_1 f_{n-2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = a_2 f_n + a_1 f_{n-1}.$$

Daí, ao somarmos e subtraímos estas duas equações entre si, obtemos, respectivamente,

$$a_{n+2} = a_2 f_{n+1} + a_1 f_n \quad \text{e} \quad a_{n-1} = a_2 f_{n-2} + a_1 f_{n-3}.$$

Dessa forma, como vale para  $n + 2$  e  $n - 1$ , vale também para todo  $n$ . □

Sigamos com a relação.

**Corolário 6.** Seja  $(f_n)$  a Sequência de Fibonacci e  $(l_n)$  a Sequência de Lucas, vale

$$l_n = f_{n+1} + f_{n-1}.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 5, tomando  $(a_n) = (l_n)$ , temos que

$$l_n = l_2 f_{n-1} + l_1 f_{n-2}.$$

Como  $l_1 = 1$  e  $l_2 = 3$ , então

$$l_n = 3f_{n-1} + f_{n-2}. \tag{1}$$

Pela Sequência de Fibonacci, sabemos que  $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ , substituindo em (1), segue:

$$\begin{aligned}
 l_n = 3(f_{n+1} - f_n) + f_{n-2} &\Leftrightarrow l_n = f_{n+1} + 2f_{n+1} - 3f_n + f_{n-2} \\
 &\Leftrightarrow l_n = f_{n+1} + 2(f_n + f_{n-1}) - 3f_n + f_{n-2} \\
 &\Leftrightarrow l_n = f_{n+1} - f_n + 2f_{n-1} + f_{n-2} \\
 &\Leftrightarrow l_n = f_{n+1} - f_n + (f_{n-1} + f_{n-2}) + f_{n-1} \\
 &\Leftrightarrow l_n = f_{n+1} + f_{n-1}.
 \end{aligned}$$

□

Com o resultado acima, podemos notar o quanto as sequências de Fibonacci e Lucas estão interligadas. A seguir, conheceremos uma sequência que também tem ligação com a Sequência de Lucas. Trataremos da Sequência de Jacobsthal.

## 2.4 SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL

A denominação da sequência que será definida a seguir é uma homenagem ao matemático alemão Ernst Jacobsthal (1882 - 1965) e trata-se de uma particularidade da Sequência de Lucas. Os primeiros termos da sequência são

$$(1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \dots)$$

**Definição 7.** A Sequência de Jacobsthal ( $j_n$ ) é definida recursivamente por

$$\begin{cases} j_0 = 1 \\ j_1 = 1 \\ j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Essa sequência é amplamente usada para resolver problemas de Análise Combinatória. Um exemplo desses problemas é o caso de ladrilhamento proposto por [4].

**Aplicação 1.** A quantidade de ladrilhamentos  $q_n$  que é possível calcular para um retângulo  $(3 \times n)$  usando dois tipos de ladrilhos, sendo um deles de dimensões  $(1 \times 1)$ , na cor branca e o outro  $(2 \times 2)$  na cor vermelha obedece aos números de Jacobsthal. Definindo  $q_0 = 0$ , para um retângulo  $(3 \times 1)$  temos  $q_1 = 1$ , para um retângulo  $(3 \times 2)$ ,  $q_2 = 3$ , isto é, três tipos de ladrilhamentos possíveis, para um retângulo  $(3 \times 3)$ ,  $q_3 = 5$ , seguindo a Sequência de Jacobsthal.

A solução completa para este problema não cabe ser resolvida aqui, mas pode ser vista em [4].



## 2.5 SEQUÊNCIA DE PELL

Segundo [14], John Pell foi um matemático inglês, nascido em 1611. Seu nome tornou-se conhecido entre os matemáticos da época devido às intensas correspondências que mantinha com vários deles, dentre os quais estavam Leonhard Euler. Em contrapartida, publicou pouco durante sua vida e, devido a isso, há muitas dúvidas sobre as contribuições que são realmente de sua autoria. Após sua morte, seu nome foi atribuído à equação  $x^2 - dy^2 = (-1)^n$ , e daí as soluções da Equação de Pell e a relação entre essas soluções e as aproximações de  $\sqrt{2}$  tornaram conhecida a Sequência de Pell, formada pelos termos

$$(1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots)$$

Vamos definir a sequência segundo [1].

**Definição 8.** *A sequência que possui  $\mathcal{P}_1 = 1$ ,  $\mathcal{P}_2 = 2$  e  $\mathcal{P}_n = 2\mathcal{P}_{n-1} + \mathcal{P}_{n-2}$  é chamada de Sequência de Pell.*

**Observação 2.** *Os termos da sequência ( $\mathcal{P}_n$ ) são chamados números de Pell.*

### 2.5.1 NÚMEROS DE PELL E APROXIMAÇÕES DE $\sqrt{2}$

Descobrir métodos para calcular aproximações de raízes irracionais era um assunto que despertava o interesse dos matemáticos desde o tempo antigo, [14]. A escada de Theon, foi um algoritmo criado para aproximar o valor da raiz de 2. Consistia em definir as sequências  $(a_n)$  e  $(b_n)$ , onde

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_n \end{cases}$$

Perceba que a razão  $c_n = \frac{b_n}{a_n}$  tende para  $\sqrt{2} \cong 1,414213562\dots$  quando  $n$  cresce:

$n$	$b_n$	$a_n$	$c_n$
01	1	1	1
02	3	2	1,5
03	7	5	1,4
04	17	12	1,41666...
05	41	29	1,4137931...
06	99	70	1,41428571...
07	239	169	1,41420118...
08	577	408	1,41421568...

Tabela 2: Aproximações de  $\sqrt{2}$ .

Uma observação interessante é que, ao reescrevermos as sequências  $a_n$  e  $b_n$  de forma independente, notamos que

$$\begin{aligned}a_n &= 2a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_n &= 2b_{n-1} + b_{n-2}\end{aligned}$$

ou seja, as duas sequências possuem a mesma lei de formação da Sequência de Pell. Como  $(a_n)$  possui também os mesmos termos iniciais da referida sequência,  $(a_n)$  é a própria Sequência de Pell. Quanto à sequência  $(b_n)$  que possui como termos iniciais  $b_1 = 1$  e  $b_2 = 3$ , será chamada Sequência de Pell-Lucas modificada.

# 3 RECORRÊNCIAS

No capítulo anterior, vimos que as sequências apresentadas eram regidas por uma lei de formação, de modo que, dado(s) o(s) termos(s) inicial(is), o termo seguinte dependia do anterior ou de mais de um termo anterior. Essa lei de formação chamamos *recorrência*. A recorrência é uma regra que permite calcular qualquer termo de uma sequência em função do(s) antecessor (es) imediato(s), [13].

Apesar disso, pelos exemplos vistos no Capítulo 1, pudemos perceber que apenas a lei de recorrência não é suficiente para definir uma sequência. É necessário também conhecer o(s) primeiro(s) termo(s). A Sequência de Pell-Lucas modificada e a Sequência de Pell possuem a mesma fórmula de recorrência, porém, como o segundo termo de ambas difere, geram sequências diferentes.

**Exemplo 3.** *Dada a sequência  $(x_n)$ , com recorrência  $x_{n+1} = 2x_n$  e o termo inicial  $x_1 = 3$ , determinamos  $x_n$  da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}x_2 &= 2x_1 \\x_3 &= 2x_2 \\x_4 &= 2x_3 \\&\dots\dots\dots \\x_n &= 2x_{n-1}.\end{aligned}$$

*Multiplicando, teremos*

$$x_n = x_1 \cdot 2^{n-1},$$

*como  $x_1 = 3$ , então  $x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ .*

Perceba que, no exemplo acima, o termo seguinte da sequência  $(x_n)$  depende, unicamente, do antecessor imediato. Nesse caso, temos uma recorrência de 1ª ordem. Isso nos incita a iniciar a seção seguinte.

## 3.1 RECORRÊNCIA LINEAR DE 1ª ORDEM

Segundo [13], temos a definição a seguir.

**Definição 9.** *Se  $x_{n+1}$  está expresso em função de  $x_n$ , a recorrência é dita de primeira ordem.*

Vale observar que uma recorrência é dita linear se essa função for do primeiro grau.

**Exemplo 4.** Vamos determinar  $x_n$  na recorrência  $x_{n+1} = x_n + 3$  e  $x_1 = 2$ . Perceba que

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + 3 \\x_3 &= x_2 + 3 \\x_4 &= x_3 + 3 \\&\dots \\x_n &= x_{n-1} + 3\end{aligned}$$

Somando, temos

$$x_n = x_1 + 3 \cdot (n - 1).$$

Como  $x_1 = 2$ , então

$$x_n = 3n - 1.$$

No Exemplo 4, a recorrência é dita *não-homogênea*, pois possui termo independente de  $x_n$ . Já no Exemplo 3, a recorrência é *homogênea*, pois não possui termo independente de  $x_n$ .

## 3.2 RECORRÊNCIA LINEAR DE 2ª ORDEM

Numa sequência, quando o termo seguinte depende dos dois antecessores imediatos, teremos uma recorrência de segunda ordem. Neste capítulo, será útil tratarmos apenas das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, que são as que possuem a forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0 \text{ com } q \neq 0.$$

A equação  $r^2 + pr + q = 0$  será chamada *equação característica* e estará sempre associada a cada recorrência linear de segunda ordem, com coeficientes constantes.

**Exemplo 5.** A recorrência  $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$  possui  $r^2 - 2r - 1 = 0$  como equação característica e esta tem como raízes  $r_1 = 1 + \sqrt{2}$  e  $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ .

Conhecendo a equação característica da recorrência, nos resta saber como utilizar essa informação para resolver a recorrência. O teorema que segue nos mostrará o formato que todas as soluções de uma recorrência terá.

**Teorema 7.** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as soluções distintas da equação característica  $r^2 + pr + q = 0$ , então  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  representa todas as soluções da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  com  $C_1$  e  $C_2$  constantes.

*Demonstração.* Mostraremos inicialmente que  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  é uma solução da recorrência. Ao substituir  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  na recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , teremos:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) \\ &= C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que  $r_1$  e  $r_2$  são raízes da equação característica.

Provaremos agora que todas as soluções da recorrência serão da forma  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ .

Consideremos  $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  uma solução da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  para todo  $n$  natural, onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que solucionam o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}.$$

Considere também  $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$ . Note que  $z_n = 0$  para todo  $n$ . De fato,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = 0,$$

já que  $y_n$  é solução da recorrência, ao passo que  $r_1$  e  $r_2$  são raízes da equação característica  $r^2 + pr + q = 0$ . Daí, como  $z_1 = z_2 = 0$ , pois  $z_1 = y_1 - C_1 r_1 - C_2 r_2 = 0$  e  $z_2 = y_2 - C_1 r_1^2 - C_2 r_2^2 = 0$ , então  $z_n = 0$ . Logo, todas as soluções da recorrência são da forma  $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ .  $\square$

**Exemplo 6.** A Sequência de Pell  $\mathcal{P}_n$  definida por

$$\mathcal{P}_1 = 1, \mathcal{P}_2 = 2 \text{ e } \mathcal{P}_{n+2} = 2\mathcal{P}_{n+1} + \mathcal{P}_n$$

possui equação característica  $r^2 - 2r - 1 = 0$  e suas raízes são

$$r_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ e } r_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Então,  $\mathcal{P}_n = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n$ .

Para determinar  $C_1$  e  $C_2$ , iremos usar  $\mathcal{P}_1 = 1$  e  $\mathcal{P}_2 = 2$ , através do sistema:

$$\begin{cases} C_1(1 + \sqrt{2}) + C_2(1 - \sqrt{2}) = 1 \\ C_1(1 + \sqrt{2})^2 + C_2(1 - \sqrt{2})^2 = 2 \end{cases}.$$

Daí, obtemos  $C_1 = -C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Então,

$$\mathcal{P}_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) (1 + \sqrt{2})^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) (1 - \sqrt{2})^n.$$

O exemplo a seguir é um item da Questão 1 do Exame de Qualificação (ENQ - 2019.1) do Profmat (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) que trata de recorrências:

**Exemplo 7.** A recorrência  $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0$  com  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 3$  possui equação característica  $r^2 - 5r + 4 = 0$  cujas raízes são  $r_1 = 1$  e  $r_2 = 4$ . Sabemos pelo teorema anterior que a solução geral da recorrência é dada por

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 4^n.$$

Como  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 3$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = 3 \end{cases}$$

cujas soluções são  $C_1 = \frac{1}{3}$  e  $C_2 = \frac{2}{3}$ . Portanto,  $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 4^n$ .

# 4 SEQUÊNCIA DE PADOVAN

## 4.1 HANS VAN DER LAAN E RICHARD PADOVAN

Nascido em 1904, o holandês Hans van Der Laan estudou arquitetura na Technische Hogeschool de Delft (1923 a 1926), porém, antes de terminar o curso, decidiu tornar-se monge beneditino e mudou-se para a Abadia de St. Paul, Oosterhout, onde foi ordenado sacerdote em 1934. Por ironia, foi após desistir do curso de arquitetura que sua paixão por ela aflorou, fazendo-o desenvolver um sistema de medidas inovador, baseado em um número irracional que ele próprio denominou de Número Plástico.

Em 1974, o britânico Richard Padovan conheceu os trabalhos de van Der Laan, pelos quais se interessou profundamente. Como também dominava a língua holandesa, publicou uma tradução do trabalho *Architectonic Space*, de autoria de Hans van Der Lan, em 1983. Padovan estudou arquitetura na Associação de Arquitetura de Londres e escreveu livros sobre o tema.

O envolvimento de Padovan com os trabalhos de Hans van Der Lan acabou por levá-lo a ser homenageado com o nome da sequência que iremos trabalhar neste capítulo. Apesar disso, o próprio Richard sempre atribuiu a descoberta ao monge beneditino.

Vamos iniciar a sequência na seção que segue.

## 4.2 SEQUÊNCIA DE PADOVAN

**Definição 10.** *A sequência  $(p_n)$  definida por*

$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, \dots)$$

*é chamada Sequência de Padovan, e os termos dessa sequência chamam-se números de Padovan. Recursivamente, podemos defini-la como*

$$\begin{cases} p_0 = p_1 = p_2 = 1 \\ p_n = p_{n-2} + p_{n-3} \quad \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Ocasionalmente, será utilizada a segunda definição abaixo para a Sequência de Padovan com extensão para índices inteiros.

**Definição 11.** A Sequência de Padovan  $(p_n)$  pode ser definida como:

$$\begin{cases} p_{-5} = 1 \\ p_{-4} = 0 \\ p_{-3} = 0 \\ p_n = p_{n-2} + p_{n-3} \quad \forall n \geq -2 \end{cases}$$

**Lema 8.** Podemos definir recursivamente a sequência de Padovan como:

a)  $p_n = p_{n-1} + p_{n-5}$

b)  $p_n = p_{n-2} + p_{n-4} + p_{n-8}$

c)  $p_n = p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-5}$

d)  $p_n = p_{n-4} + p_{n-5} + p_{n-6} + p_{n-7} + p_{n-8}$

*Demonstração.*

a) Utilizando a Definição 10:

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-2} + p_{n-3} \\ &= p_{n-4} + p_{n-5} + p_{n-1} - p_{n-4} \\ &= p_{n-1} + p_{n-5}. \end{aligned}$$

Nos itens a seguir, usaremos a Definição 10 e o resultado do item anterior.

b)

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + p_{n-5} \\ &= p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-7} + p_{n-8} \\ &= (p_{n-3} + p_{n-7}) + p_{n-4} + p_{n-8} \\ &= p_{n-2} + p_{n-4} + p_{n-8}. \end{aligned}$$



c)

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + p_{n-5} \\ &= p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-7} + p_{n-8} \\ &= p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-5}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + p_{n-5} \\ &= p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-7} + p_{n-8} \\ &= p_{n-4} + p_{n-5} + p_{n-6} + p_{n-7} + p_{n-8} \end{aligned}$$

□

**Proposição 9.** *São válidas as seguintes propriedades para a Sequência de Padovan  $(p_n)$ :*

$$a) \sum_{k=0}^n p_k = p_{n+5} - 2$$

$$b) \sum_{k=0}^n p_{2k} = p_{2n+3} - 1$$

$$c) \sum_{k=0}^n p_{2k+1} = p_{2n+4} - 1$$

$$d) \sum_{k=0}^n p_{3k} = p_{3n+2}$$

$$e) \sum_{k=0}^n p_{3k+1} = p_{3n+3} - 1$$

$$f) \sum_{k=0}^n p_{3k+2} = p_{3n+4} - 1$$

$$g) \sum_{k=0}^n p_{5k} = p_{5n+1}.$$

*Demonstração.*

a) Provaremos por indução sobre  $n$ . Para  $n = 0$ , temos:

$$\sum_{k=0}^0 p_k = p_0 = 1, \text{ como } p_5 - 2 = 3 - 2 = 1, \text{ então vale para } n = 0.$$

Supondo que vale para  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,

$$\sum_{k=0}^n p_k = p_{n+5} - 2,$$

provaremos que vale para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_k &= \sum_{k=0}^n p_k + p_{n+1} \\ &= p_{n+5} - 2 + p_{n+1} \\ &= p_{n+5} + p_{n+1} - 2. \\ &= p_{n+6} - 2. \end{aligned}$$

Logo, a proposição vale para  $n + 1$  e pelo Princípio de Indução Finita, vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Para  $n = 0$ , a proposição é verdadeira, pois

$$\sum_{k=0}^0 p_{2k} = p_0 = 1 \text{ e } p_3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Supondo que vale para  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,

$$\sum_{k=0}^n p_{2k} = p_{2n+3} - 1$$

provaremos que vale para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_{2k} &= \sum_{k=0}^n p_{2k} + p_{2n+2} \\ &= p_{2n+3} - 1 + p_{2n+2} \\ &= p_{2n+5} - 1 \\ &= p_{2(n+1)+3} - 1. \end{aligned}$$

Assim, como é válido para  $n + 1$ , vale  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

c) A sentença é válida para  $n = 0$ , já que

$$\sum_{k=0}^0 p_k = p_1 = 1 \text{ e } p_4 = 1.$$

Supondo que  $\sum_{k=0}^n p_{2k+1} = p_{2n+4} - 1$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_{2k+1} &= \sum_{k=0}^n p_{2k+1} + p_{2n+3} \\ &= p_{2n+4} - 1 + p_{2n+3} \\ &= p_{2n+6} - 1. \end{aligned}$$

O que prova que vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

d) Para  $n = 0$ , vale, pois

$$\sum_{k=0}^0 p_{3k} = p_0 = 1 = p_2.$$

Provaremos para  $n + 1$  supondo que, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , vale:

$$\sum_{k=0}^n p_{3k} = p_{3n+2}$$

. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_{3k} &= \sum_{k=0}^n p_{3k} + p_{3n+3} \\ &= p_{3n+2} + p_{3n+3} \\ &= p_{3n+5} \\ &= p_{3(n+1)+2}. \end{aligned}$$

O que encerra a demonstração.

e) A proposição é claramente válida para  $n = 0$ . Tomando como hipótese de indução para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^n p_{3k+1} = p_{3n+3} - 1,$$

temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_{3k+1} &= \sum_{k=0}^n p_{3k+1} + p_{3n+4} \\ &= p_{3n+3} - 1 + p_{3n+4} \\ &= p_{3n+6} - 1 \\ &= p_{3(n+1)+3} - 1. \end{aligned}$$

Portanto, vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

f) Note inicialmente que

$$\sum_{k=0}^{3n+2} p_k = \sum_{k=0}^n p_{3k} + \sum_{k=0}^n p_{3k+1} + \sum_{k=0}^n p_{3k+2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} p_{3n+7} - 2 &= p_{3n+2} + p_{3n+3} - 1 + \sum_{k=0}^n p_{3k+2} \\ \sum_{k=0}^n p_{3k+2} &= p_{3n+7} - p_{3n+2} - p_{3n+3} - 1 \\ \sum_{k=0}^n p_{3k+2} &= p_{3n+4} - 1. \end{aligned}$$

g) Novamente, por indução sobre  $n$ , vemos que é verdadeira a sentença para  $n = 0$ .  
Supondo que vale para  $n \in \mathbb{N}$ , provaremos para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_{5k} &= \sum_{k=0}^n p_{5k} + p_{5(n+1)} \\ &= p_{5n+1} + p_{5n+5} \\ &= p_{5n+6}. \end{aligned}$$

Onde a última igualdade deve-se ao item a do Lema 8. □

**Proposição 10.** *Se  $(p_n)$  a Sequência de Padovan, então é válido afirmar que:*

- a)  $\sum_{k=0}^n p_k^2 \cdot p_{k+1} = p_n \cdot p_{n+1} \cdot p_{n+2}, \forall n \geq 0, \text{ com } n \in \mathbb{N};$
- b)  $\sum_{k=0}^n p_k \cdot p_{k+2} = p_{n+2} \cdot p_{n+3} - 1, \forall n \geq 0, \text{ com } n \in \mathbb{N};$
- c)  $\sum_{k=0}^n p_k^2 = p_{n+2}^2 - p_{n-1}^2 - p_{n-3}^2, \forall n \geq 3, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$

*Demonstração.* Nas três demonstrações que seguem será usado o Princípio de Indução Finita.

a) Para  $n = 0$ , temos

$$\sum_{k=0}^0 p_k^2 \cdot p_{k+1} = p_0^2 \cdot p_1 = 1 = p_0 \cdot p_1 \cdot p_2,$$

logo é válido para esse caso.

Supondo que é verdadeiro para  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $\sum_{k=0}^n p_k^2 \cdot p_{k+1} = p_n \cdot p_{n+1} \cdot p_{n+2}$ , provaremos para  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_k^2 \cdot p_{k+1} &= \sum_{k=0}^n p_k^2 \cdot p_{k+1} + p_{n+1}^2 \cdot p_{n+2} \\ &= p_n \cdot p_{n+1} \cdot p_{n+2} + p_{n+1}^2 \cdot p_{n+2} \\ &= p_{n+1} \cdot p_{n+2} (p_n + p_{n+1}) \\ &= p_{n+1} \cdot p_{n+2} \cdot p_{n+3}. \end{aligned}$$

b) Novamente, para  $n = 0$ ,

$$\sum_{k=0}^0 p_k \cdot p_{k+2} = p_0 \cdot p_2 = p_2 \cdot p_3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Provaremos validade para  $n + 1$  supondo que é verdadeiro para  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$\sum_{k=0}^n p_k \cdot p_{k+2} = p_{n+2} \cdot p_{n+3} - 1.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} p_k \cdot p_{k+2} &= \sum_{k=0}^n p_k \cdot p_{k+2} + p_{n+1} \cdot p_{n+3} \\ &= p_{n+2} \cdot p_{n+3} - 1 + p_{n+1} \cdot p_{n+3} \\ &= p_{n+3} \cdot (p_{n+2} + p_{n+1}) - 1 \\ &= p_{n+3} p_{n+4} - 1. \end{aligned}$$

c) Por último, temos para  $n = 3$  que a relação é válida, já que

$$\sum_{k=0}^3 p_k^2 = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 7 = p_5^2 - p_2^2 - p_0^2.$$

Supondo que  $\sum_{k=0}^n p_k^2 = p_{n+2}^2 - p_{n-1}^2 - p_{n-3}^2$  vale para  $n \in \mathbb{N}$ , mostraremos que também será

verdadeiro para  $n + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} p_k^2 &= \sum_{k=0}^n p_k^2 + p_{n+1}^2 \\
 &= p_{n+2}^2 - p_{n-1}^2 - p_{n-3}^2 + p_{n+1}^2 \\
 &= p_{n+2}^2 - p_{n-3}^2 + p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2 \\
 &= (p_{n+2} + p_{n-3})(p_{n+2} - p_{n-3}) + (p_{n+1} + p_{n-1})(p_{n+1} - p_{n-1})
 \end{aligned}$$

Pelo item a do Lema 8, temos que  $p_{n+1} = p_{n+2} - p_{n-3}$  e pela Definição 9,  $p_{n+1} = p_{n-2} + p_{n-1}$ . Daí,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} p_k^2 &= (p_{n+2} + p_{n-3})p_{n+1} + (p_{n+1} + p_{n-1})p_{n-2} \\
 &= (p_{n+2} + p_n - p_{n-2})p_{n+1} + p_{n+1}p_{n-2} + p_{n-1}p_{n-2} \\
 &= (p_n + p_{n-1} + p_{n+3} - p_{n+1})p_{n+1} - p_{n-2}p_{n+1} + p_{n+1}p_{n-2} + p_{n-1}p_{n-2} \\
 &= [(p_n + p_{n+3}) + (p_{n-1} - p_{n+1})](p_{n+3} - p_n) + p_{n-1}p_{n-2} \\
 &= (p_n + p_{n+3})(p_{n+3} - p_n) + (p_{n-1} - p_{n+1})(p_{n+3} - p_n) + p_{n-1}p_{n-2} \\
 &= p_{n+3}^2 - p_n^2 - p_{n-2}(p_{n+3} - p_n) + p_{n-2}p_{n-1} \\
 &= p_{n+3}^2 - p_n^2 - p_{n-2}(p_{n+3} - p_n - p_{n-1}) \\
 &= p_{n+3}^2 - p_n^2 - p_{n-2}(p_{n+1} + p_n - p_n - p_{n-1}) \\
 &= p_{n+3}^2 - p_n^2 - p_{n-2}(p_{n+1} - p_{n-1}) \\
 &= p_{n+3}^2 - p_n^2 - p_{n-2}^2.
 \end{aligned}$$

Como os três itens são válidos para  $n + 1$ , então pelo Princípio de Indução, vale para todo  $n \in \mathbb{N}$  de acordo com as condições pedidas em cada item.  $\square$

## 4.5 A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA $X^3 - X - 1 = 0$

**Proposição 11.** *A equação característica  $X^3 = X + 1$  da relação de recorrência  $p_{n+3} = p_{n+1} + p_n$  possui uma única raiz real e duas raízes complexas conjugadas dadas pela fórmula*

$$X_k = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{ik\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{-ik\pi}{3}}.$$

*Demonstração.* Usando o artifício  $X = y + \frac{1}{3y}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} X^3 - X - 1 = 0 &\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{3y}\right)^3 - \left(y + \frac{1}{3y}\right) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 27y^6 - 27y^3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Tomando  $y^3 = z$ , segue que

$$27y^6 - 27y^3 + 1 = 27z^2 - 27z + 1 = 0,$$

e então, por Bháskara,

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{18},$$

isto é,

$$y^3 = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{18} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}}.$$

Utilizando raízes cúbicas da unidade, temos:

$$\begin{aligned} y_k &= \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} \cdot \sqrt[3]{1} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \end{aligned}$$

com  $k = 0, 1, 2$ .

Como  $X = y + \frac{1}{3y}$ , então:

$$\begin{aligned} X_k &= \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9 \mp \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{-2k\pi i}{3}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$X_k = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{-2k\pi i}{3}}$$

com  $k = 0, 1, 2$ .

Por fim,

para  $k = 0$  temos:

$$X_0 = \psi = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}}$$

para  $k = 1$ , temos:

$$X_1 = \alpha = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}}$$

para  $k = 2$ , temos:

$$X_2 = \beta = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} \cdot e^{-\frac{4\pi i}{3}}.$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes complexas conjugadas. □

**Teorema 12.** *Sendo  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  as raízes da equação característica, valem as relações*

$$\left| \frac{\alpha}{\psi} \right| < 1 \text{ e } \left| \frac{\beta}{\psi} \right| < 1.$$

*Demonstração.* Note que, como  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes da equação característica  $X^3 = X + 1$ , então podemos escrever

$$\begin{aligned} X^3 - X - 1 &= (X - \psi)(X - \alpha)(X - \beta) \\ &= X^3 - (\psi + \alpha + \beta)X^2 + (\psi\alpha + \psi\beta + \alpha\beta)X - \psi\alpha\beta. \end{aligned}$$

Isso significa que  $\psi + \alpha + \beta = 0$  e  $\psi\alpha + \psi\beta + \alpha\beta = -1$ .

Como  $\psi$  é um número real positivo e  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes conjugadas, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{\psi} \right| &= \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\psi} \\ &= \frac{\sqrt{-1 - \psi\alpha - \psi\beta}}{\sqrt{\psi^2}} \\ &= \sqrt{\frac{-1 - \psi(\alpha + \beta)}{\psi^2}}, \end{aligned}$$



mas,  $\alpha + \beta = -\psi$ , logo

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{\psi} \right| &= \sqrt{\frac{-1 + \psi^2}{\psi^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{\psi^2}}. \end{aligned}$$

Como  $\psi > 0$ , concluímos que  $\left| \frac{\alpha}{\psi} \right| < 1$ . De modo análogo, prova-se  $\left| \frac{\beta}{\psi} \right| < 1$ .  $\square$

O resultado seguinte trata da fórmula posicional para o termo geral da Sequência de Padovan e será útil para demonstrar o próximo teorema.

**Proposição 13.** *Sendo  $\alpha, \beta, \psi$  as raízes da equação característica  $X^3 - X - 1 = 0$ , podemos escrever*

$$p_n = a\psi^n + b\alpha^n + c\beta^n$$

onde

$$a = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)}, \quad b = \frac{(1 - \psi)(1 - \beta)}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)} \quad e \quad c = \frac{(1 - \psi)(1 - \alpha)}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)}.$$

**Teorema 14.** *Sendo  $(p_n)$  a Sequência de Padovan e  $\psi$  o Número Plástico, então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \psi.$$

*Demonstração.* Como  $p_n = a\psi^n + b\alpha^n + c\beta^n$ , então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n+1} a\psi^{n+1} + b\alpha^{n+1} + c\beta^{n+1}}{a\psi^n + b\alpha^n + c\beta^n}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por  $\psi^n$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n+1} \left( a\psi + b \left( \frac{\alpha}{\psi} \right)^n \alpha + c \left( \frac{\beta}{\psi} \right)^n \beta \right)}{p_n \left( a + b \left( \frac{\alpha}{\psi} \right)^n + c \left( \frac{\beta}{\psi} \right)^n \right)}.$$

Pelo Teorema 12 sabemos que  $\left| \frac{\alpha}{\psi} \right| < 1$  e  $\left| \frac{\beta}{\psi} \right| < 1$ , logo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{a\psi}{a} = \psi$ .  $\square$

## 4.6 FUNÇÃO GERADORA

Uma função geradora de números, também conhecida como função geratriz, é uma série de potências em que seus coeficientes obtêm dados sobre uma sequência  $(b_n)$ . Ela é definida por

$$G(b_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \dots$$

**Proposição 15.** *A sequência de Padovan  $(p_n)$  possui*

$$G(P_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}$$

como função geradora.

*Demonstração.* Note que, multiplicando  $G(b_n, x)$  por  $x^2$  e  $x^3$ , respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 G(p_n, x) &= p_0 x^2 + p_1 x^3 + p_2 x^4 + \dots \\ x^3 G(p_n, x) &= p_0 x^3 + p_1 x^4 + p_2 x^5 + \dots \end{aligned}$$

A seguir, perceba que

$$G(p_n, x) - x^2 G(p_n, x) - x^3 G(p_n, x) = G(p_n, x)(1 - x^2 - x^3) = p_0 + p_1 x + (p_2 - p_0)x^2.$$

Como  $p_0 = p_1 = p_2 = 1$ , concluímos que

$$G(p_n, x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}.$$

□

Trabalhar com a função geradora de uma sequência numérica é útil para resolver problemas como do exemplo a seguir.

**Exemplo 8.** *Na Sequência de Padovan*

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, \dots$$

*cada termo de ordem  $n$ , a partir do quarto termo, é igual à soma dos termos de ordem  $n-2$  e  $n-3$ . Sabendo disso, vamos encontrar o valor da soma infinita*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{3}{243} + \dots,$$

*onde o  $n$ -ésimo termo é o  $n$ -ésimo termo da sequência de Padovan dividido por  $3^n$ .*

*Observe que*

$$G(p_n, x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots,$$

então para  $x = \frac{1}{3}$ ,

$$G(p_n, \frac{1}{3}) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{3}{243} + \dots,$$

sabendo disso, a soma infinita poderá ser calculada através da fórmula da função geradora aplicada a  $x = \frac{1}{3}$ , isto é,

$$G\left(p_n, \frac{1}{3}\right) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{36}{23}.$$

## 4.7 SEQUÊNCIA DE MATRIZES

**Definição 12.** Definimos recursivamente a Sequência de Padovan  $p_{n+3} = p_{n+1} + p_n$ , na forma matricial, onde os termos iniciais são:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O teorema que segue nos dá o termo geral da Sequência de Padovan na forma matricial.

**Teorema 16.** A Sequência de Padovan na forma matricial  $(P_n)$  com  $n \geq 0$  e  $n \in \mathbb{Z}$  é dada por

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{n-5} & p_{n-3} & p_{n-4} \\ p_{n-4} & p_{n-2} & p_{n-3} \\ p_{n-3} & p_{n-1} & p_{n-2} \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Provaremos por Indução Finita. Para isso, consideremos a Definição 11, onde:

$$p_{-1} = p_{-3} = p_{-4} = 0 \text{ e } p_{-2} = p_{-5} = 1.$$

Para  $n = 0$ , temos  $P_0 = \begin{pmatrix} p_{-5} & p_{-3} & p_{-4} \\ p_{-4} & p_{-2} & p_{-3} \\ p_{-3} & p_{-1} & p_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . O que mostra que é

válido para esse caso inicial.

Supondo que vale para algum  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{n-5} & p_{n-3} & p_{n-4} \\ p_{n-4} & p_{n-2} & p_{n-3} \\ p_{n-3} & p_{n-1} & p_{n-2} \end{pmatrix}$$

provaremos que vale para  $n + 1$ .

Pela definição, sabemos que

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_{n-1} + P_{n-2} \\ &= \begin{pmatrix} p_{n-6} & p_{n-4} & p_{n-5} \\ p_{n-5} & p_{n-3} & p_{n-4} \\ p_{n-4} & p_{n-2} & p_{n-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{n-7} & p_{n-5} & p_{n-6} \\ p_{n-6} & p_{n-4} & p_{n-5} \\ p_{n-5} & p_{n-3} & p_{n-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-4} & p_{n-2} & p_{n-3} \\ p_{n-3} & p_{n-1} & p_{n-2} \\ p_{n-2} & p_n & p_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, como vale para  $n + 1$ , vale para todo  $n \geq 0$  com  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 17.** *Sendo  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  as raízes da equação característica  $X^3 - X - 1 = 0$  da relação de recorrência da Sequência de Padovan, podemos escrever a fórmula de Binet para a matriz da Sequência de Padovan como*

$$P_n = a\psi^n + b\alpha^n + c\beta^n,$$

onde

$$a = \frac{\psi p_2 + \psi^2 p_1 + p_0}{\psi(\psi - \alpha)(\psi - \beta)}, b = \frac{\alpha p_2 + \alpha^2 p_1 + p_0}{\alpha(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)}$$

e

$$c = \frac{\beta p_2 + \beta^2 p_1 + p_0}{\beta(\beta - \psi)(\beta - \alpha)}.$$

*Demonstração.* Como  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes da equação característica, então existem  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes, tais que

$$P_n = a\psi^n + b\alpha^n + c\beta^n. \quad (4.2)$$

Para encontrarmos o valor das constantes citadas, vamos usar a equação (4.2) aplicada aos valores  $n = 0$ ,  $n = 1$  e  $n = 2$ . O que gera o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a\psi + b\alpha + c\beta = 1 \\ a\psi^2 + b\alpha^2 + c\beta^2 = 1 \end{cases}$$

Utilizando a Regra de Cramer para resolver o sistema, em seguida, o método de Vandermonde para resolver determinantes e, na última igualdade, as Relações de Girard para equação de 3º grau, temos:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \alpha & \beta \\ \psi^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\alpha - \psi)(\beta - \psi)} = \frac{\psi\alpha\beta - \psi\alpha - \psi\beta + \psi}{\psi(\alpha - \psi)(\beta - \psi)} = \frac{\psi p_2 + \psi^2 p_1 + p_0}{\psi(\alpha - \psi)(\beta - \psi)}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & 1 & \beta \\ \psi^2 & 1 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \alpha & \beta \\ \psi^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}} = \frac{(1-\psi)(\beta-1)}{(\alpha-\psi)(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha\beta - \alpha - \psi\alpha\beta + \psi\alpha}{\alpha(\alpha-\psi)(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha p_2 + \alpha^2 p_1 + p_0}{\alpha(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \alpha & 1 \\ \psi^2 & \alpha^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \alpha & \beta \\ \psi^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}} = \frac{(1-\alpha)(1-\psi)}{(\beta-\alpha)(\beta-\psi)} = \frac{\beta - \psi\beta - \beta\alpha + \psi\alpha\beta}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\psi)} = \frac{\beta p_2 + \beta^2 p_1 + p_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\psi)}$$

O que encerra a demonstração. □

**Corolário 18.** *A fórmula de Binet para a Sequência de Padovan, em relação a sua matriz, é escrita como*

$$P_{n-1} = \frac{\psi^{n+3}}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)} + \frac{\alpha^{n+3}}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} + \frac{\beta^{n+3}}{(\beta-\psi)(\beta-\alpha)}.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 17,

$$\begin{aligned} P_n &= a\psi^n + b\alpha^n + c\beta^n \\ &= \frac{\psi p_2 + \psi^2 p_1 + p_0}{\psi(\alpha-\psi)(\beta-\psi)} \psi^n + \frac{\alpha p_2 + \alpha^2 p_1 + p_0}{\alpha(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} \alpha^n + \frac{\beta p_2 + \beta^2 p_1 + p_0}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\psi)} \beta^n \\ &= \frac{\psi P_2 + \psi^2 p_1 + P_0}{(\alpha-\psi)(\beta-\psi)} \psi^{n-1} + \frac{\alpha P_2 + \alpha^2 P_1 + P_0}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} \alpha^{n-1} + \frac{\beta P_2 + \beta^2 p_1 + P_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\psi)} \beta^{n-1}. \end{aligned}$$

Sabemos, pelo Teorema 16, que

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_{-5} & p_{-3} & p_{-4} \\ p_{-4} & p_{-2} & p_{-3} \\ p_{-3} & p_{-1} & p_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{-4} & p_{-2} & p_{-3} \\ p_{-3} & p_{-1} & p_{-2} \\ p_{-2} & p_0 & p_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_{-3} & p_{-1} & p_{-2} \\ p_{-2} & p_0 & p_{-1} \\ p_{-1} & p_1 & p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

então, considerando:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \psi^2 & \psi \\ \psi & \psi + 1 & \psi^2 \\ \psi^2 & \psi + \psi^2 & \psi + 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha + 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha + \alpha^2 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta + 1 & \beta^2 \\ \beta^2 & \beta + \beta^2 & \beta + 1 \end{pmatrix},$$

temos:

$$P_n = \frac{\psi^{n-1}}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)} \cdot A + \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)} \cdot B + \frac{\beta^{n-1}}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)} \cdot C.$$

Perceba que, como  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes da equação característica  $X^3 - X - 1 = 0$ , teremos  $\psi^3 = \psi + 1$ ,  $\alpha^3 = \alpha + 1$  e  $\beta^3 = \beta + 1$ , então, podemos escrever as matrizes acima como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \psi^2 & \psi \\ \psi & \psi^3 & \psi^2 \\ \psi^2 & \psi^4 & \psi^3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^3 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^3 & \beta^2 \\ \beta^2 & \beta^4 & \beta^3 \end{pmatrix}.$$

Substituindo em  $P_n$ , teremos:

$$P_n = \frac{\psi - 1}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)} \cdot A + \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)} \cdot B + \frac{\beta^{n-1}}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)} \cdot C.$$

Utilizando o Teorema 16,

$$\begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix} = \frac{\psi^{n-1}}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)} \cdot A + \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)} \cdot B + \frac{\beta^{n-1}}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)} \cdot C.$$

Por fim, ao analisarmos o termo da terceira linha e da segunda coluna na igualdade acima, concluímos que

$$P_{n-1} = \frac{\psi^{n+3}}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)} + \frac{\alpha^{n+3}}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)} + \frac{\beta^{n+3}}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)}.$$

□

## 4.8 Q-MATRIZ DE PADOVAN

Estudaremos nesta seção a matriz  $Q$  de Padovan. Uma matriz de ordem 3, cuja enésima potência gera uma matriz onde as entradas são termos da Sequência de Padovan.

**Definição 13.** *A  $Q$ -matriz de Padovan ou matriz geradora da Sequência de Padovan é dada por*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 19.** *Se  $(P_n)$  é a Sequência de Padovan, para todo  $n \geq 1$  com  $n \in \mathbb{N}$  temos*

$$Q^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n+2} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n+3} & p_{n+2} \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Por indução sobre  $n$ , para o caso  $n = 1$ , temos:

$$Q^{1+4} = Q^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = Q^{1+4} = Q^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Supondo que vale para  $n \in \mathbb{N}$ , provaremos que vale para  $n + 1$ . Para isso, perceba que

$$Q^{n+5} = Q^{(n+1)+4} = Q^{n+4} \cdot Q.$$

Pela hipótese de indução,  $Q^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n+2} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n+3} & p_{n+2} \end{pmatrix}$ . Como  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

então

$$\begin{aligned} Q^{n+5} &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n+1} & p_n \\ p_n & p_{n+2} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n+3} & p_{n+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} + p_n & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_n + p_{n+1} & p_{n+2} \\ p_{n+2} & p_{n+1} + p_{n+2} & p_{n+3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_n & p_{n+2} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n+3} & p_{n+2} \\ p_{n+2} & p_{n+4} & p_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{(n+1)-1} & p_{(n+1)+1} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{(n+2)+1} & p_{n+1} + 1 \\ p_{n+1} + 1 & p_{n+3} + 1 & p_{n+2} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Note que, ao mudarmos a ordem de algumas das entradas da matriz  $Q$ , obtemos um novo resultado, como mostra o teorema seguir:

**Teorema 20.** *Seja  $Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  daí,  $(Q')^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n+2} & p_n & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n-1} & p_n \\ p_{n+3} & p_{n+1} & p_{n+2} \end{pmatrix}$  para todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Para  $n = 1$ , temos:

$$(Q')^{1+4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_0 & p_1 \\ p_4 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1+2} & p_1 & p_{1+1} \\ p_{1+1} & p_{1-1} & p_1 \\ p_{1+3} & p_{1+1} & p_{1+2} \end{pmatrix}.$$

Supondo que vale para  $n \in \mathbb{N}$ , provaremos que vale para  $n + 1$ . Como vimos no teorema anterior,

$$(Q')^{n+5} = (Q')^{(n+1)+4} = Q^{n+4} \cdot Q.$$

Pela hipótese de indução,  $(Q')^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n+2} & p_n & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n-1} & p_n \\ p_{n+3} & p_{n+1} & p_{n+2} \end{pmatrix}$ . Como  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

então

$$\begin{aligned} (Q')^{n+5} &= \begin{pmatrix} p_{n+2} & p_n & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n-1} & p_n \\ p_{n+3} & p_{n+1} & p_{n+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_n + p_{n+1} & p_{n+1} & p_{n+2} \\ p_{n-1} + p_n & p_n & p_{n+1} \\ p_{n+1} + p_{n+2} & p_{n+2} & p_{n+3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_{n+3} & p_{n+1} & p_{n+2} \\ p_{n+2} & p_n & p_{n+1} \\ p_{n+4} & p_{n+2} & p_{n+3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_{(n+2)+1} & p_{n+1} & p_{(n+1)+1} \\ p_{(n+1)+1} & p_{(n-1)+1} & p_{n+1} \\ p_{(n+3)+1} & p_{(n+1)+1} & p_{(n+2)+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, como vale para  $n + 1$ , vale para todo  $n \geq 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . □

Assim como no teorema acima, o resultado a seguir mostra várias outras possibilidades para a matriz geradora  $Q$  e a matriz  $Q^{n+4}$ . Vejamos:



**Teorema 21.** Para  $n \geq 1$ , temos:

$$(i) \text{ Se } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ então } Q^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n+2} & p_{n+3} \\ p_n & p_{n+1} & p_{n+2} \end{pmatrix};$$

$$(ii) \text{ Se } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ então } Q^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n+2} & p_{n+3} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_{n+2} & p_n \\ p_n & p_{n+1} & p_{n-1} \end{pmatrix};$$

$$(iii) \text{ Se } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ então } Q^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n+2} & p_{n+1} & p_n \\ p_{n+3} & p_{n+2} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_n & p_{n-1} \end{pmatrix};$$

$$(iv) \text{ Se } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ então } Q^{n+4} = \begin{pmatrix} p_{n+2} & p_{n+1} & p_{n+3} \\ p_n & p_{n-1} & p_{n+1} \\ p_{n+1} & p_n & p_{n+2} \end{pmatrix}.$$

As demonstrações dos itens acima serão omitidas, pois todas são facilmente resolvidas por indução finita sobre  $n$ .

## 4.9 O NÚMERO PLÁSTICO

O Número Plástico, também conhecido como Constante Plástica, foi inicialmente estudado pelo matemático francês Gérard Cordonnier, em 1924, o qual não conseguiu concluir seu trabalho sobre as propriedades do Número Plástico. Porém, em 1928, Hans van Der Laan, ao estudar a Constante Plástica, foi o pioneiro em explicar a importância do número para a clareza da percepção em três dimensões, ou seja, havia sido descoberto um "Número de Ouro" para projetos tridimensionais. Vale ressaltar que há uma estreita ligação entre o Número de Ouro trabalhado por Fibonacci e o Número Plástico de Hans van Der Laan. Ambos são os únicos números que satisfazem certas propriedades interessantes, os quais levam a serem definidos como números mórficos<sup>1</sup>. O trabalho feito por [5] traz mais informações sobre tais números.

Ao realizar suas pesquisas, Hans van Der Laan percebeu que, ao analisarmos um conjunto de objetos, relacionar suas dimensões entre si, tomar como referência o corpo humano era essencial. Então, ao tomarmos uma composição de objetos que tenham a mesma cor, textura e forma, com dimensões diferentes, parecia inevitável que o cérebro humano relacionasse as dimensões dos objetos, calculando a razão entre essas dimensões involuntariamente, mesmo sem que pudessemos perceber o que estávamos fazendo. Porém,

---

<sup>1</sup>Quando existem números naturais  $b$  e  $c$  tais que:  $a + 1 = a^b$  e  $a - 1 = a^{-c}$ , então o número real  $a > 1$  é chamado número mórfico.

isso só é possível quando não há uma diferença exagerada entre as dimensões do maior objeto e do menor. Neste caso, a comparação involuntária acaba não acontecendo, pois, quando um dos objetos está em foco, o outro parece desaparecer, [12].

A comparação desses objetos, tomemos por exemplo, cubos, ocorreria da seguinte forma, segundo os estudos de van Der Laan: nosso cérebro agruparia os objetos, selecionando os que possuíssem comprimento de aresta praticamente iguais, e, assim, vários grupos iriam se formando. Nesse processo, a separação seria por *tipos de tamanho*. Daí, surgiu a primeira indagação: tomando dois cubos de arestas  $x$  e  $y$ , com  $x > y$ , qual seria a menor proporção  $x : y$  pela qual os cubos pertenceriam a tipos de tamanho distintos?

É importante comentarmos a respeito da relação que deve existir entre os tipos de tamanho. Quando estes não diferem demais, são também agrupados em classes, que foram nomeadas por *ordens de tamanho*. Então, surgiu um novo questionamento: tomando os mesmos comprimentos  $x$  e  $y$ , com  $x > y$ , qual é a menor proporção  $y : x$  para que esses comprimentos se refiram a ordens de tamanho diferentes?

Figura 4.3: Agrupamento de objetos



Fonte: <https://www.abebbooks.com> [10]

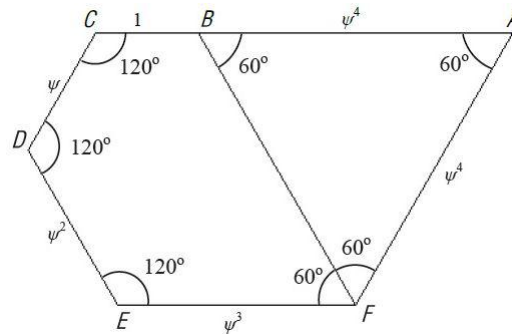
Através de análise estatística e experimentos feitos pelo monge beneditino, respondendo as duas questões acima, ele obteve, respectivamente, aproximações de  $\frac{4}{3}$  e  $\frac{1}{7}$ . Isso nos motiva a definir:

**Definição 14.** *Dois objetos pertencem a diferentes tipos de tamanho se a razão de seus comprimentos são cerca de  $\frac{4}{3} \simeq \psi$  (Número Plástico), enquanto pertencem a diferentes ordens de tamanho, se um objeto é cerca de sete vezes maior que o outro.*

#### 4.9.1 ESPIRAL DE CONVERGÊNCIA

**Teorema 22.** *Se colocarmos um triângulo equilátero em um dos lados do pentágono abaixo, obteremos um pentágono semelhante ao original.*

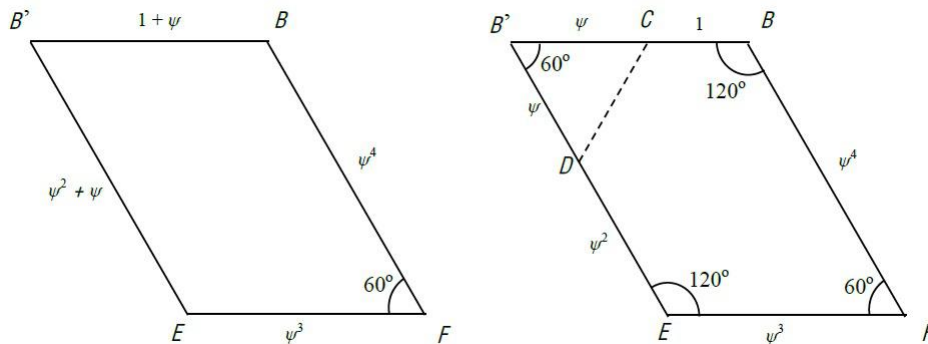
Figura 4.4: Pentágono Plástico



Fonte: <https://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mar13/9-maitre-Plastique-mars-2013.pdf> [2]

*Demonstração.* Iniciaremos tomando o paralelogramo  $BB'EF$  de lados  $1 + \psi$ ,  $\psi^2 + \psi$ ,  $\psi^3 = 1 + \psi$ ,  $\psi^4 = \psi^2 + \psi$  e  $\angle BFE = 60^\circ$ . Daí concluímos que  $B' = 60^\circ$  e que  $B = E = 120^\circ$ . Agora vamos traçar o segmento  $CD$ , de modo que  $B'D = \psi$  e  $B'C = \psi$ , como mostra a figura abaixo. Observe que o triângulo  $CDB'$  é isósceles de base  $CD$  e como  $B' = 60^\circ$ , então, já que os ângulos da base de um triângulo isósceles possuem a mesma medida, isso obriga o triângulo  $CDB'$  ser equilátero. Então  $\angle BCD = \angle CDE = 120^\circ$  e, além disso, o segmento  $CD$  possui comprimento  $\psi$  (já que o triângulo  $CDB'$  é equilátero).

Figura 4.5: Construção do Pentágono Plástico



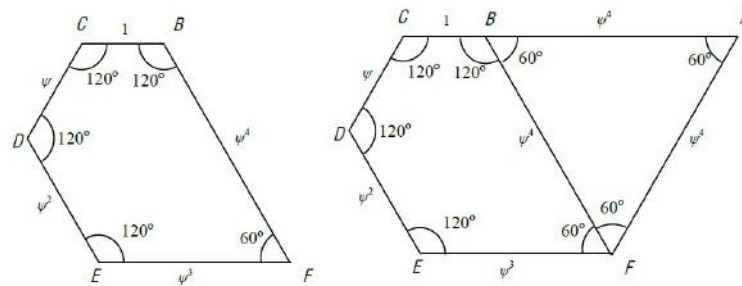
Fonte: <https://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mar13/9-maitre-Plastique-mars-2013.pdf> [2]

Traçando um ponto  $A$  externo ao pentágono  $BFEDC$ , de modo que,  $ABF$  forme um triângulo equilátero, como mostra a figura seguinte, podemos perceber que o novo polígono formado  $ABCDEF$  é, na verdade, o pentágono  $ACDEF$ , que, por sua vez, é semelhante ao pentágono  $FBCDE$ , já que ambos possuem um ângulo de  $60^\circ$  e todos os ângulos restantes medindo  $120^\circ$ . Além do mais, os pares de lados  $EF$  e  $FA$ ,  $DE$  e  $ED$ ,  $CD$  e  $DE$ ,  $BC$  e  $CD$  e  $FB$  e  $AC$  estão na razão  $\frac{1}{\psi}$ .

□

É importante perceber que, iniciando com um triângulo equilátero de lado 1 e, em seguida, sempre colocando um outro triângulo equilátero colado ao maior lado da figura

Figura 4.6: Pentágonos semelhantes

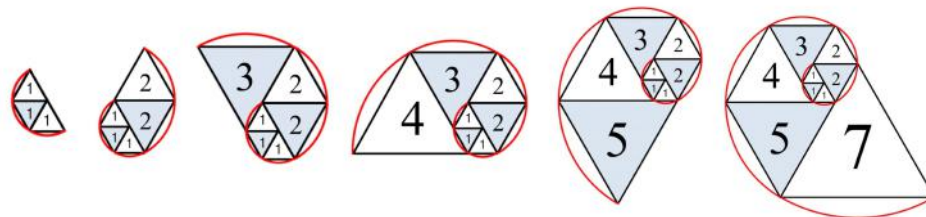


Fonte: <https://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mar13/9-maitre-Plastique-mars-2013.pdf> [2]

gerada, geramos o pentágono do teorema anterior todo formado por triângulos equiláteros onde o lado é cada termo da Sequência de Padovan.

Veja o esquema abaixo:

Figura 4.7: Espiral de Padovan formada por triângulos equiláteros com suas respectivas medidas dos lados



Fonte: Construída pela autora

## 5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência Didática pode ser vista como um conjunto de etapas que orientam o ensino de determinado conteúdo. Nesse aspecto, cada fase do processo de aprendizagem tem seu grau de cognição e dificuldade ampliado, promovendo a consolidação do tema.

Utilizar esta técnica permite ao educador procurar suporte interdisciplinar, sondando, assim, em outras áreas, a melhor maneira de abordar o conteúdo desejado.

O embasamento da Sequência Didática é a didática francesa que, por sua vez, era apoiadora da prática ativa do aluno e da contextualização no processo de ensino-aprendizagem. Dessa maneira, o educador deve adequar ao nível cognitivo do aluno aplicações práticas do tema trabalhado, intercaladas com a parte abstrata do conteúdo, para que a aprendizagem não seja prejudicada.

O objetivo desta atividade é levar a Sequência de Padovan para a sala de aula com a finalidade dos alunos a conhecerem. Tal sequência se tornou negligenciada pelos livros didáticos, uma vez que poderia ser trabalhada como um complemento do estudo da Sequência de Fibonacci, já que a convergência de  $(p_n)$  para  $\psi$  é uma resposta tridimensional à proporção áurea.

Para isso, a seguir temos etapas de como funcionaria essa atividade.

**Etapas 1:** Conhecendo a Sequência de Padovan.

**Objetivo:** Conduzir o aluno à construção dos  $n$  termos iniciais da Sequência de Padovan através da soma dos antecessores de ordem  $n - 2$  e  $n - 3$ .

**Procedimentos:** No início desta etapa, é relevante que o professor comente sobre o contexto histórico que envolve a atividade. Como, por exemplo, falar sobre Hans van Der Laan e sobre a importância das traduções de Richard Padovan.

**Etapas 2:** Convergência de  $(p_n)$

**Objetivo:** Conjecturar a convergência da Sequência de Padovan para o Número Plástico.

**Procedimentos:** Construir uma tabela como a que segue abaixo para que, com o auxílio de uma calculadora, os alunos possam perceber que a razão  $\frac{P_{n+1}}{P_n}$  se aproxima do número 1,324717957244746....

**Etapas 3:** Segmentos proporcionais

**Objetivo:** Conceituar proporção e seus termos, proporção múltipla e proporção contínua.

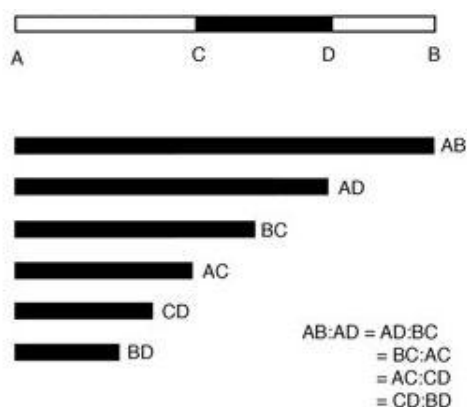
**Procedimentos:** O professor construirá com os alunos o segmento AB e traçará os pontos C e D:

Tabela 5.3: Aproximações de  $\psi$ .

$p_{n+1}$	$p_n$	$\frac{p_{n+1}}{p_n}$
1	1	1
1	1	1
2	1	2
2	2	1
3	2	1,5
4	3	1,3333...
5	4	1,25
7	5	1,4
9	7	1,2857...
12	9	1,3333...
16	12	1,3333...
21	16	1,3125
28	21	1,3333...
37	28	1,3214...
49	37	1,3243...

Fonte: Construída pela autora

Figura 5.8: Segmentos que obedecem à Razão Plástica



Fonte: [https://bib.irb.hr/datoteka/628836.Plastic\\_Number\\_\\_Construct.pdf](https://bib.irb.hr/datoteka/628836.Plastic_Number__Construct.pdf) [12]

de modo que:

$$\psi = \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BD}.$$

Através disso, será possível explicar os seguintes conceitos:

**Proporção:** Uma igualdade entre duas razões.

**Exemplo 9.**  $\frac{AB}{AD} = \frac{CD}{BD}$  formam uma proporção onde os extremos são  $AB$  e  $BD$  e os meios são  $AD$  e  $CD$ .

**Proporção Contínua:** É a proporção que possui meios iguais.

**Exemplo 10.**  $\frac{AD}{BC} = \frac{BC}{AC}$  representa uma proporção contínua, pois possui meios iguais.

**Proporção Múltipla:** É uma proporção simultânea entre três ou mais razões.

**Exemplo 11.**  $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BD}$  é uma proporção múltipla.

**Etapa 4:** Propriedade Fundamental das Proporções.

**Objetivo:** Neste momento, o professor enunciaria a Propriedade Fundamental das Proporções (Numa proporção, o produto entre os meios é igual ao produto entre os extremos.) e traria como aplicação os seguintes exemplos:

**Exemplo 12.** Tomando  $AB = 1$  e sabendo que  $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BC}$ , temos, pela Propriedade Fundamental das Proporções, que:  $BC = AD^2$ .

**Exemplo 13.** Tomando  $AB = 1$  e sabendo que  $AC = 1 - BC$  e  $BD = 1 - AD$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AD}{BC} &= \frac{1 - BC}{CD} \cdot \frac{CD}{1 - AD} \\ \Rightarrow \frac{AB}{BC} &= \frac{1 - BC}{1 - AD} \\ \Rightarrow \frac{1}{BC} &= \frac{1 - BC}{1 - AD}. \end{aligned}$$

Como  $BC = AD^2$ :

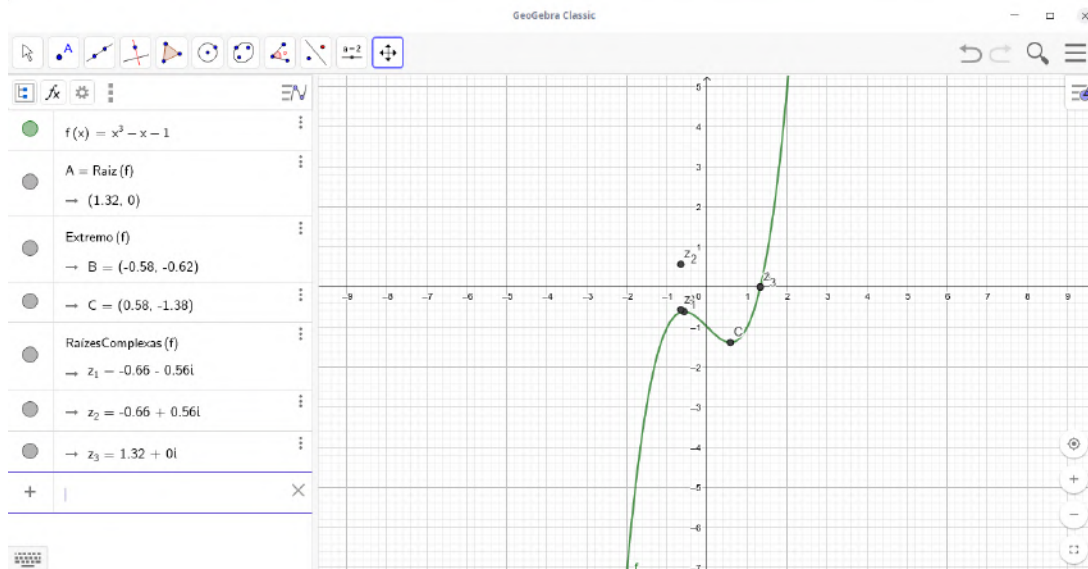
$$\begin{aligned} \frac{1}{AD^2} &= \frac{1 - AD^2}{1 - AD} \\ \Rightarrow \frac{1}{AD^2} &= \frac{(1 - AD)(1 + AD)}{1 - AD} \\ \Rightarrow \frac{1}{AD^2} &= 1 + AD \\ \Rightarrow 1 &= AD^2 + AD^3 \\ \Rightarrow 1 &= \left(\frac{1}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\psi}\right)^3 \\ \Rightarrow \psi^3 &= \psi + 1, \end{aligned}$$

pois  $\psi = \frac{1}{AD}$ .

**Etapa 5:** Encontrar as raízes da equação cúbica acima.

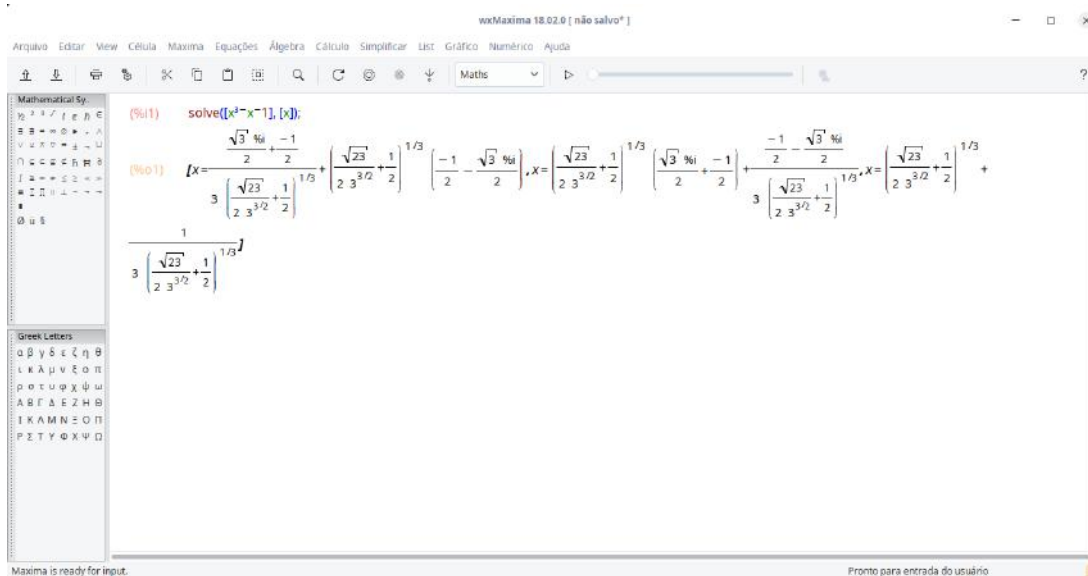
**Objetivo:** Incentivar o uso de programas computacionais educativos, como o Geogebra e o Maxima, que possam auxiliar os alunos em situações adequadas. Perceba que, nesse caso, os alunos não teriam pré-requisito para calcular as raízes da equação, devido ainda estarem no Ensino Fundamental. Observe as imagens abaixo acerca das raízes e da representação gráfica no plano cartesiano.

Figura 5.9: Gráfico no plano cartesiano e raízes da equação com o software Geogebra



Fonte: Construída pela autora

Figura 5.10: Raízes da equação utilizando o software Maxima



Fonte: Construída pela autora



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos a importância da Sequência de Padovan para a Arquitetura e para o Ensino de Proporções através do Número Plástico.

Trouxemos, inicialmente, as sequências numéricas como objeto de estudo abstrato, com definições e teoremas. Após termos adquirido o embasamento preliminar necessário, perpassamos pelas Sequências de Fibonacci, Pell, Jacobsthal e Lucas, exibindo aplicações de cada uma delas. Além disso, procuramos mostrar as relações existentes entre a Sequência de Fibonacci e as demais, através das suas relações de recorrência.

Com o intuito de entendermos melhor o nosso capítulo principal, o Capítulo 4, estudamos as Recorrências Lineares de 1ª e 2ª ordens e a equação característica gerada por uma relação desse tipo.

Trabalhamos a Sequência de Padovan sob duas perspectivas: a definição comum, utilizando números naturais (com índices naturais e com extensão para os inteiros); e a definição na forma matricial. Várias propriedades utilizando ambas as definições foram provadas, sendo nosso principal recurso de demonstração a indução finita.

Através da convergência da Sequência de Padovan para o Número Plástico, exibimos a relevância desse número irracional para a clareza de percepção em três dimensões.

Por fim, utilizando a proposta pedagógica da Sequência Didática, propusemos contextualizar o ensino de Proporções no 7º ano do Ensino Fundamental com aulas que trouxessem a Sequência de Padovan e o Número Plástico como aplicação.

# REFERÊNCIAS

- [1] ALVES, F. R. V. **Sequência generalizada de Pell - SGP: Aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo** - Revista Thema. n°. 2. Rio de Janeiro, 2016.
- [2] AUDET, D. **Le nombre plastique, cousin négligé du nombre d'or**, Association Mathématique du Quebec. Vol. LIII-01, pp. 29-36, Mars (2013).
- [3] BORGES, F. P. **A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações**. 2017. 99 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2017.
- [4] CRAVEIRO, I. M. **Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal**. 2004. 117 f. Tese de doutorado - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2004.
- [5] FERREIRA, R. de C. **Números Mórficos**. 2015. 99 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.
- [6] GOMES, A. N. **Proposta de Sequência Didática com Secção Áurea: Geometria dinâmica e arquitetura**. 2009. 88 f. Universidade do Estado do Pará, Belém, 2009.
- [7] [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em 26 de maio de 2019.
- [8] <https://www.gaussianos.com/algumascuriosidadessobrelosnumerosdefibonacci/>. Acesso em 14 de dezembro de 2018.
- [9] <https://gizmodo.uol.com.br/mitosproporcaoaurea/>. Acesso em 14 de dezembro de 2018.
- [10] <https://www.abebooks.com/servlet/BookDetailsPL?bi=30013084612>. Acesso em 20 de junho de 2019.
- [11] KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications** Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 2001.

- [12] Luka MAROHNIC, L; STRMECKI, T. **Plastic Number: Construction and Applications**. 2012. 6 f. Croácia, Advanced Research in Scientific Areas, 2012.
- [13] MORGADO, A. C; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- [14] NORONHA, W. F. R. **Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas** - Revista Eletrônica Paulista de Matemática. nº 13. São Paulo, 2018.
- [15] LIMA, E. L. **Análise Real**. vol.1. 11. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.
- [16] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. vol.1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.
- [17] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, SBM, 2013.
- [18] SEENUKUL, P; NETMANEE, S; PANYAHUN, T; AUISEEKAEN, R; MUANQ-CHAN, S. **Matrices which have similar properties to Padovan Q-Matrix and its generalized relations**. Tailândia: Sakon Nakhon Rajabhat University - SNRU Journal of Science and Technology, 2015.
- [19] SILVA, B. A. e **Números de Fibonacci e Números de Lucas**. 2012. Dissertação de mestrado - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Paulo, 2012.
- [20] YILMAZ, N; TASKARA, N. **Matrix Sequences in Terms of Padovan and Perrin Numbers**. Journal of Applied Mathematics, Volume 2013, 2013.