Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências e Tecnologia

O Estudo da Circunferência - Abordagens dos Problemas de Tangências

Manuel Luiz Belem Fernandes

Juazeiro do Norte

2019

Manuel Luiz Belém Fernandes

O Estudo da Circunferências - Abordagens dos Problemas de Tangências

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^{a}. Dra. Érica Boizan Batista.

Juazeiro do Norte

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

F398e Fernandes, Manuel Luiz Belém.

O Estudo da Circunferência – Abordagens dos Problemas de Tangências/ Manuel Luiz Belém Fernandes. – 2019.

75f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

(Inclui bibliografia p. 75).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2019.

Orientação: Profª Dra. Érica Boizan Batista.

1. Geometria. 2. Tangência. 3. Circunferência. I. Perga, Apolônio de (262 a.C. - 190 a.C.) II. Título.

CDD 512.5

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O Estudo da Circunferência - Abordagens dos Problemas de Tangências

MANUEL LUIZ BELEM FERNANDES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 28 de junho de 2019.

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Érica Boizan Batista
Orientadora

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Coorientador UFCA

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
UFCA

Prof.ª Dr.ª Ingrid Sofia Meza Sarmiento
UFSCAR

Dedico este trabalho a minha esposa Lucy Lanna que foi quem mais acreditou que esse momento era possível.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, Criador e Pai Amoroso por tudo que tem realizado em minha vida. Uma gratidão eterna por todas as bençãos em sentido espiritual, pela orientação e equilíbrio em sentido secular e por sentir, em cada passo dado seu apoio, proteção e amor incondicional.

Aos meus pais, meus maiores professores. Seu exemplo de perseverança, determinação e dignidade foi inspirador. Mesmo diante de todas as circunstâncias desafiadoras de criar 11 filhos, vivendo do trabalho na roça, nunca nos deixaram faltar nada e fizeram todos os esforços para dar o bem mais valioso a cada um de nós: a educação. Reconheço que em toda essa jornada, o investimento emocional foi o "mais caro"e mais difícil pois significou abrir mão de parte de nossa convivência e nos enviar para longe de nosso lar, rumo a capital com o objetivo de estudar, crescer, amadurecer e sermos adultos instruídos e honestos. O sacrifício mútuo foi indescritível mas hoje posso dizer: acrescentem, com alegria, esse título de mestre na coleção de graduados, especialistas e doutores que compõe a formação de seus filhos. É o mínimo que podemos fazer para mostrar que todo esforço valeu a pena. Todo meu amor e minha gratidão a vocês, meus pais, minha base!

Aos meus irmãos e demais agregados da família pela torcida positiva e sincera de que essa trajetória do período de Mestrado fosse concluída com êxito.

À minha amiga e esposa Lanna pelo amor, companheirismo, apoio emocional e profissional. Obrigado por sempre acreditar em mim até mesmo quando eu, muitas vezes, duvidei. Por sempre enxergar em mim um potencial que eu desconhecia. Por me incentivar, muitas vezes de modo firme, que por horas pareciam "sermões exagerados"mas, na verdade, eram apenas uma vontade enorme que eu fosse ainda mais além e que sempre fizesse o meu melhor, em tudo. Por tudo que já passamos juntos e por todas as aventuras que ainda vamos viver. Foram meses de muitas emoções intensas:

das mais gratificantes as mais desgastantes. Mas enfim, compartilhamos cada capítulo dessa história e vencemos juntos mais essa etapa. Esse título é nosso!

À minha professora e orientadora Erica sobretudo por ter aceitado me orientar nesta admirável "viagem pelo Universo Geométrico". Seus direcionamentos foram essenciais para meu crescimento e amadurecimento em base intelectual. Agradeço por toda atenção, paciência, pelo suporte acadêmico, por todos os compartilhamentos de ideias e pelas correções importantes. A você minha sincera gratidão.

A todos os colegas de classe, por todos o companheirismo no decorrer do curso, em especial, aqueles que dividimos tantos quilômetros de estrada nas idas e vindas para as aulas.

A todos os professores da UFCA, que colaboraram direta ou indiretamente no compartilhamento de conhecimentos e experiências adquiridos ao longo do curso. Muito Obrigado!

"A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la."

(Johannes Kepler)

Resumo

A Geometria é considerada a ciência dos espaços pois através dela podemos visualizar conceitos abstratos com os olhos da mente. Ela é capaz de estimular uma grande capacidade de dedução e raciocínio. Além disso, através de uma análise de livros didáticos adotados no ensino básico poderemos ter noção de como tais obras apresentam e desenvolvem o estudo da circunferência. Em uma tabela comparativa, observaremos por meio de critérios relacionados ao estudo da circunferência, de que modo cada livro aborda o assunto. Evidenciando a abordagem geométrica, revisaremos alguns conceitos fundamentais como a construção da mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo, uma reta perpendicular a outra entre outros conceitos básicos. Faremos um estudo sobre Apolônio, o seu histórico e suas contribuições para o estudo da Geometria, e algumas soluções de seu problema para encontrar uma circunferência tangente a três objetos. O desenvolvimento deste trabalho demonstrará que diferentes abordagens, analítica ou geométrica, podem levar ao mesmo resultado, sendo importante ao estudante ter acesso e dominar ambas para seu maior aproveitamento escolar.

Palavras-chave

Geometria, Tangência, Circunferência, Apolônio

Abstract

Geometry is considered the science of spaces because through it we can visualize abstract concepts with the eyes of the mind. It is able to stimulate a big deduction and reasoning ability. In this work, we will focus on the study of tangent circumferences. For this, it is important to know how to find, in an analytical way, a point of tangency using its equations and how we can study the problem of circumference tangency using the geometric construction, based on its centers and by a common line. Moreover, through a brief analysis of textbooks used in basic education we can have an idea of how such works present and develop the study of circumference. In a comparative table, we will observe trough the criteria related to the study of the circumference, how each book approaches the subject. Focusing on the geometric approach, we will review some fundamental concepts such as the construction of the perpendicular bisector of a segment, the bisector of an angle, a line perpendicular to another and other basic concepts. We will make a study about Apollonius, his history and his contributions to the study of geometry, and some solutions of his problem to find a circumference tangent to three objects, we can work several different ways to construct it. The development of this work will demonstrate that different approaches, analytical or geometric, can lead to the same result and that it is important for the student to have access to and master both for greater achievement in school.

Keywords

Geometry, Tangency, Circumference, Apollonius

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Há anos a Geometria é uma ciência que vem sendo apreciada e estudada por sua beleza e complexidade. A Geometria é considerada a ciência dos espaços pois trabalha com formas e medições. Além disso, ela possibilita aos estudantes desenvolver sua capacidade de raciocinar, levantar hipóteses e de visualizar conceitos abstratos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais [7], o ensino da Geometria tem o objetivo de proporcionar aos estudantes uma primeira reflexão de situações problemas através da experimentação, dedução e construção. Deste modo, a compreensão de tais situações seriam mais autônomas e carregadas de significados.

Uma vez reconhecida a importância dos estudos geométricos, é vital analisar quais abordagens estão sendo ofertadas aos alunos da educação básica na atualidade. Problemas envolvendo situações abstratas dispõem de duas perspectivas quanto a sua resolução: analítica e construção geométrica. Não se pode destacar uma abordagem como sendo mais eficiente que a outra. Todavia, seria um grande prejuízo ter uma visão unilateral dessas resoluções e dar ênfase tanto no ensino como nos materiais didáticos, visto que o objetivo é um completo domínio do raciocínio lógico-matemático por parte dos estudantes.

Neste trabalho discutiremos de que maneiras a construção geométrica apresenta-se como uma proposta pedagógica eficiente no ensino de Geometria. Utilizaremos o problema de tangência de circunferência como referencial nesta análise. Para isso, apresentamos no Capítulo 2 as abordagens mais comuns para a solução de problemas de tangência no Ensino Básico.

No Capítulo 3, será apresentado um estudo comparativo de obras utilizadas nos sistemas de Educação Básica brasileiro na disciplina de matemática. Visto que o conteúdo referente ao estudo da circunferência e os problemas que envolvem sua tangência são avaliados no último ano do ensino médio, focalizou-se a atenção no volume 3 de cada coleção. Assim, por meio de uma análise dos livros didáticos pretendemos analisar de que forma cada autor apresenta o estudo da circunferência e qual abordagem é realizada no Ensino Básico.

No Capítulo 4, apresentaremos alguns conceitos básicos de Geometria que serão relembrados no decorrer do capítulo, a fim de auxiliar o entendimento geométrico das situações propostas no Capítulo 5, onde, após um breve histórico, apresentaremos dez soluções para os problemas de tangência de circunferências propostos por Apolônio.

Observamos que a solução dos problemas de Apolônio pode ser uma interessante opção de atividade para o exercício da construção de circunferências nas salas de aula.

Em suma, este trabalho visa apresentar o problema da tangência de circunferência sob diferentes primas. Este conhecimento possibilitará entender as situações não se restringindo apenas a uma visão analítica mas dando lugar também a abordagem de construção geométrica.

2 Abordagens para o problema de tangência de circunferências

Neste capítulo vamos analisar as principais abordagens do estudo da tangência de circunferências. Veremos as diferentes perspectivas que o problema da tangência de circunferência podem ser estudado, a saber, a abordagem analítica e a construção geométrica. Neste contexto, será apresentada a equação da circunferência como meio de representação dos elementos que a constituem. Em seguida, visualizaremos os mesmos elementos por meio da construção geométrica. A compreensão de tais abordagens nos permite perceber caminhos diferentes para se alcançar o mesmo resultado.

2.1 Abordagem analítica

A abordagem analítica do problema de tangência é extensamente utilizada no Ensino Básico e nos ajuda a estudar valores específicos da circunferência. Através das equações da circunferência podemos encontrar valores como: as coordenadas do ponto de tangência, o valor do comprimento do raio ou até mesmo a medida da distância entre os centros de duas circunferências.

Dizemos que duas circunferências são tangentes entre si, se possuem apenas um ponto em comum. Observe que, analiticamente, duas circunferências podem ser representadas pelas equações:

$$\lambda_1\colon\ (X-x_1)^2+(Y-y_1)^2=R_1^2 \quad \text{e} \quad \lambda_2\colon\ (X-x_2)^2+(Y-y_2)^2=R_2^2.$$

O ponto de tangência entre λ_1 e λ_2 é dado pela resolução do sistema:

$$\begin{cases} (X-x_1)^2+(Y-y_1)^2=R_1^2 \ \text{(I)} \\ (X-x_2)^2+(Y-y_2)^2=R_2^2 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo cada uma das potências de ambas as equações, (I) e (II) temos:

$$\text{(I)}\ X^2+Y^2-2Xx_1-2Yy_1+(x_1^2+y_1^2-R_1^2)=0$$

$$\text{(II)}\ X^2+Y^2-2Xx_2-2Yy_2+(x_2^2+y_2^2-R_2^2)=0$$

Subtraindo a equação (I) da equação (II), obtemos a equação da reta r:

$$(r)\ 2X(x_2 - x_1) + 2Y(y_2 - y_1) + (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + R_1^2 - R_2^2) = 0.$$

Fazendo novamente um sistema entre uma das equações das circunferências e a equação da reta encontrada temos:

$$\begin{cases} (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R_1^2 \\ \\ 2X(x_2 - x_1) + 2Y(y_2 - y_1) + (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + R_1^2 - R_2^2) = 0. \end{cases}$$

Fazendo a substituição da equação da reta na equação da circunferência encontramos uma equação quadrática em única variável. Esta equação terá solução única se, e somente se, o discriminante Δ for igual a zero.

Exemplo 1. *As equações $(x+1)^2 + y^2 = 1$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$ representam duas circunferências cujos centros estão sobre o eixo das abscissas.*

Se existir, o ponto de tangência das circunferências é obtido através da resolução do sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1, \\ \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0, \\ \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0, \\ \\ x = 0 \end{cases}$$

Tomando $x = 0$, temos a expressão:

$$x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \ \ e \ \ y = 0,$$

é o ponto de interseção.

A Figura 1 representa geometricamente a solução supracitada no plano cartesiano.

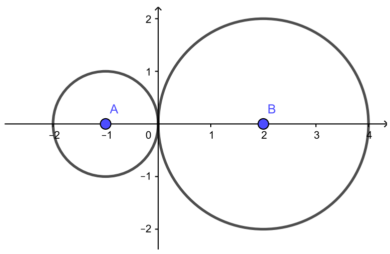


Figura 1: Representação geométrica da solução.

Exemplo 2. *(UNIFOR - CE) As circunferências de equações* $(x+2\sqrt{2})^2+(y-2\sqrt{2})^2 = 4$ *e* $x^2+y^2=4$ *são tangentes entre si. Com efeito, as coordenadas de seu ponto de tangência podem ser encontradas resolvendo o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} (x+2\sqrt{2})^2+(y-2\sqrt{2})^2 = 4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x\sqrt{2}-4y\sqrt{2} = -12 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

Usando o método da substituição, encontramos $x=-\sqrt{2}$ *e* $y=\sqrt{2}$*. Portanto o ponto de tangência tem coordenadas* $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$*. Na Figura 2, temos o ponto A que ilustra à solução.*

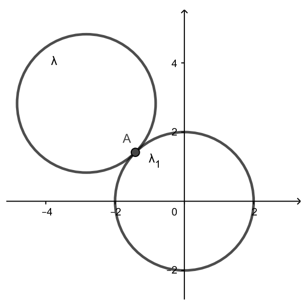


Figura 2: Representação geométrica.

2.2 Tangência entre duas circunferências usando uma reta tangente comum

Uma vez que se entende analiticamente a situação problema, é válido considerar a percepção através da construção geométrica. Esta abordagem permitirá a visualização das mesmas situações problema envolvendo a tangência de circunferências, por meio de figuras geométricas.

Seguindo este raciocínio, e o fato em que uma reta é tangente a uma circunferência quando ela toca em apenas um ponto da mesma, vamos ver algumas situações em que temos uma reta comum tangente a duas circunferências.

Definição 1. *Uma reta que é tangente a duas circunferências ao mesmo tempo é denominada de reta tangente comum. Essas retas podem ser: retas tangentes comuns internas e retas tangentes comuns externas.*

Perceba que quando temos duas circunferências distintas e que a distância entre seus centros é maior que soma dos raios, as retas podem ser comuns internas ou externas, como vemos nas Figuras 3 e 4.

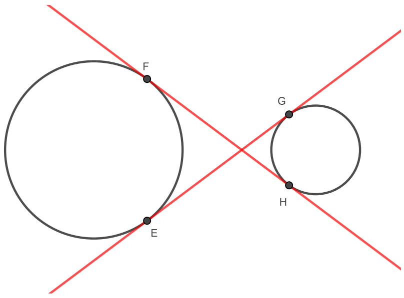


Figura 3: Retas tangentes comuns internas.

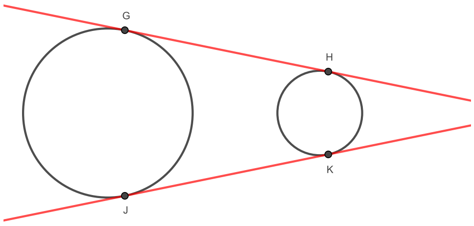


Figura 4: Retas tangentes comuns externas.

No entanto, temos uma outra situação em que as duas circunferências são tangentes entre si e podemos ter uma reta tangente a ambas no mesmo ponto de tangência, como podemos observar na Figura 5.

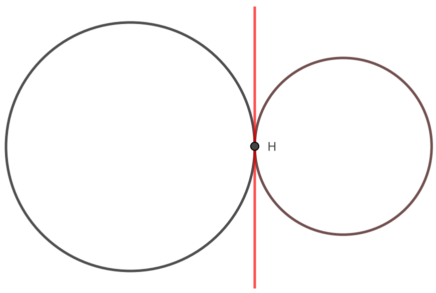


Figura 5: Reta tangente comum a duas circunferências tangentes.

Partindo deste último caso, vamos construir circunferências tangentes usando como base uma reta. Então, dada uma reta e um ponto qualquer pertencente a ela, podemos construir duas circunferências tangentes entre si tendo este ponto em comum.

Geometricamente as posições entre as duas circunferências podem ser tangentes externamente ou internamente.

(i) Circunferências tangentes externamente:

Tome f uma reta e B um ponto que pertence a esta reta, por B podemos traçar uma circunferência λ_1 tangente a f. O centro da circunferência está sobre a reta perpendicular a f passando por B. Observe que no outro semiplano em relação a reta f podemos traçar uma nova circunferência λ tangente a f passando por B. Assim temos que as duas circunferências λ_1 e λ possuem apenas o ponto B em comum ou seja elas são tangentes entre si. Note ainda que o raio de λ_1 é perpendicular a reta f em B e o raio de λ_1 é perpendicular a reta r em B. Portanto temos que os centros das circunferências tangentes e o ponto B são colineares, assim observamos na Figura 6.

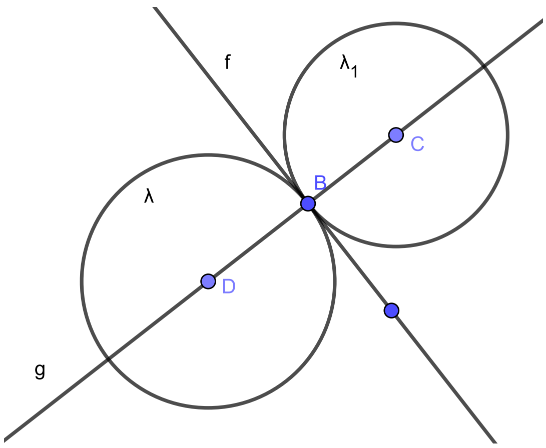


Figura 6: Circunferências tangentes externamente.

(ii) Circunferências tangentes internamente:

Tome uma reta f qualquer e B um ponto que pertence a esta reta, podemos traçar uma circunferência λ_1 tangente a f em B. Para se construir essa circunferência devemos primeiro construir uma reta g perpendicular a reta f no ponto B, o centro da circunferência λ_1 vai estar sobre a reta g visto que o raio da circunferência forma $90°$ com a reta tangente. Com centro em A e passando por

B temos a circunferência λ_1 tangente a reta f. Queremos construir uma nova circunferência λ tangente internamente a circunferência λ_1 no ponto B. Como a reta g forma $90°$ com f então o centro da circunferência λ pertence a reta g. Tomando um ponto C em g de modo que a distância de C a B seja menor que a distância de A a B, construímos a circunferência λ de raio CB. Como o ponto B é único que pertence as duas circunferências λ_1 e λ, logo elas são tangentes em B. Portanto, temos que os pontos A, B e C são colineares, como destaca a Figura 7.

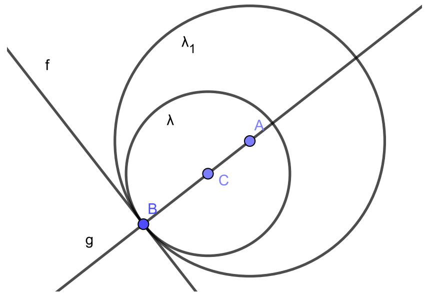


Figura 7: Circunferências internas tangentes a uma reta comum.

Exemplo 3. *Observe a circunferência de centro $A(-1, 3)$ e raio 2cm tangente a uma reta no ponto $B(1, 3)$, vamos determinar o contro C de uma outra circunferência de raio 1cm tangente a circunferência de centro A no ponto B.*

O centro C que queremos encontrar está sobre a reta que passa por A e B. Assim, partindo de B trançamos um segmento de comprimento 1cm externo a circunferência de centro A para encontrarmos o ponto C.

Partindo de C, traçamos a circunferência de raio 1cm tangente a circunferência de centro A no ponto B. Observe que os pontos A e B possuem a mesma ordenada e portanto o ponto C que está sobre a mesma reta também terá. Como a distância entre B e C é de 1cm concluímos que a abscissa de C é 2.

Portanto as coordenadas do centro da circunferência tangente a circunferência de centro A é C(2,3) como ilustrado na Figura 8.

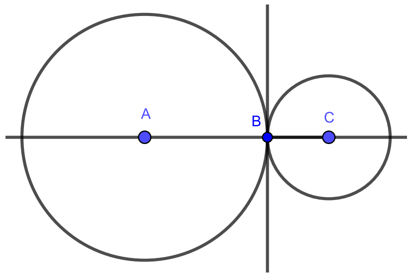


Figura 8: Circunferências tangentes a uma reta comum

Exemplo 4. *Dado um ponto $C(a,0)$ por onde passam duas retas tangentes a duas circunferências, poderemos determinar o valor de a, sendo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.*

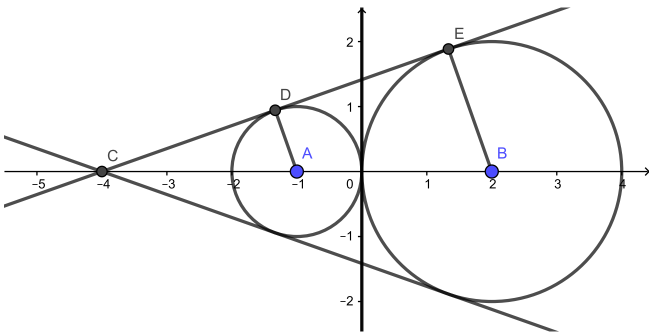


Figura 9: Retas passando por um ponto e tangentes a duas circunferência.

Como observamos na Figura 9, o segmento CE é tangente às duas circunferências nos pontos D e E respectivamente. Nessas condições, temos que os segmentos AD e BE são paralelos e os triângulos CDA e CEB são semelhantes. Portanto, utilizando a semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BE}} \Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CA}+3} = \frac{1}{2}$$

$$2\overline{CA} = \overline{CA} + 3 \Rightarrow \overline{CA} = 3.$$

Como $a = \overline{CA} + 1$, temos que $a = 4$.
Observe que o ponto $C(a,0)$ está a esquerda do eixo y, conforme observamos na Figura 9, logo $a = -4$.

2.3 Tangência de duas circunferências e a propriedade da colinearidade dos centros

Definição 2. *Dizemos que duas circunferências são tangentes externas quando possuem somente um ponto em comum e uma é exterior à outra.*

Definição 3. *Dizemos que duas circunferências são tangentes internas quando possuem apenas um ponto em comum e uma está no interior da outra.*

A propriedade a seguir apresenta uma melhor compreensão na construção de duas circunferências tangentes.

Propriedade 1. *Duas circunferências são tangentes, se e somente se, os centros delas são colineares com o ponto de interseção delas.*

Demonstração 1. *Seja λ_1 uma circunferência de centro A tangente externamente em B a outra circunferência λ de centro C. Note que por B podemos traçar uma reta g tangente às duas circunferências. Traçando o raio da circunferência λ_1 observamos que ele forma um ângulo de 90° com a reta g no ponto de tangência B. O mesmo acontece se traçarmos o raio da circunferência λ, o mesmo é perpendicular a reta g no ponto de tangência B. Portanto, os raios das circunferências λ_1 e λ pertencem a mesma reta f. Logo os pontos A, B e C são colineares, como na Figura 10.*

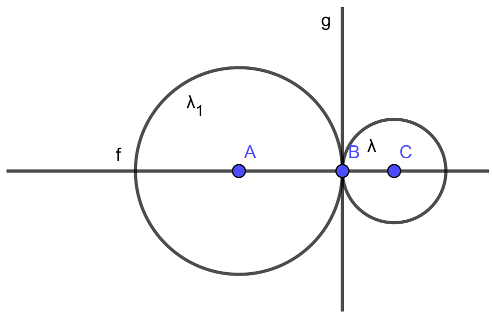


Figura 10: Tangentes externas.

Demonstração 2. *Seja λ_1 uma circunferência de centro A tangente internamente em B a outra circunferência λ de centro C. Note que por B podemos traçar uma reta f tangente às duas circunferências. Sabendo que o raio de uma circunferência é perpendicular a reta tangente no ponto de tangência, então os raios das circunferências λ_1 e λ são perpendiculares a reta f no ponto B. Como os raios das duas circunferências* *estão contidos no mesmo semiplano e são perpendiculares a reta f no mesmo ponto B, como vemos na Figura 11, então os pontos A, B e C são colineares, portanto A, B e C pertencem a mesma reta g.*

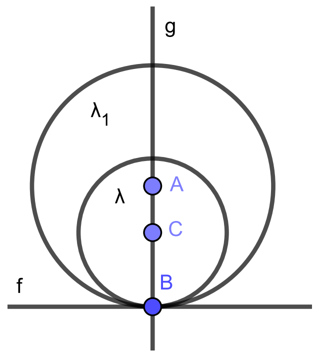


Figura 11: Tangentes internas.

Por outro lado, se duas circunferências tem um ponto em comum e seus centros são colineares a esse ponto, temos duas situações:

(i) O ponto de tangência está entre os dois centros:

Sejam λ_1 e λ, duas circunferências que possuem um ponto P em comum e colineares com seus centros, como na Figura 12. Como P está localizado entre os centros das circunferências e é o único ponto que pertence as duas, logo as duas circunferências λ_1 e λ são tangentes externamente no ponto P.

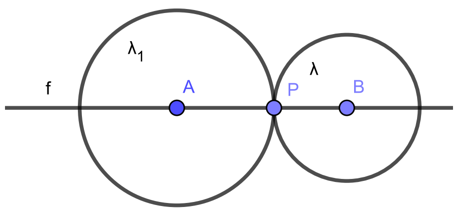


Figura 12: Circunferências com um ponto comum entre os centros.

Consequentemente, a distância entre os centros de duas circunferências λ_1 e λ tangentes externamente é a soma das medidas de seus raios.

(ii) O ponto de tangência não está entre os dois centros:

Sejam λ_1 e λ, duas circunferências que possuem um ponto P em comum e colineares com seus centros, como na Figura 13. Como P não está localizado entre os centros das circunferências e é o único ponto que pertence as duas, logo as duas circunferências λ_1 e λ são tangentes internamente no ponto P.

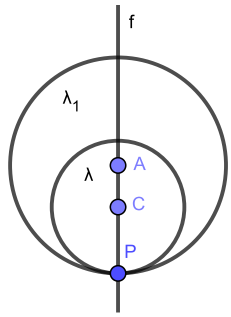


Figura 13: Circunferências em que o ponto comum não está entre os centros.

Consequentemente a distância entre os centros de duas circunferências λ_1 e λ tangentes internamente é a diferença das medidas de seus raios.

Os exemplos a seguir demonstram situações em que resolvemos problemas envolvendo tangência da circunferência abordagens juntamente com a propriedade de colinearidade dos centros.

Exemplo 5. *Seja λ, uma circunferência de centro B dada. Neste caso, encontraremos λ_1 de centro A tangente a λ.*

Seja λ uma circunferência dada de centro B e raio qualquer. Pela propriedade, se uma outra circunferência λ_1 de centro A é tangente a λ em um ponto, os centros das duas circunferências são colineares a esse ponto de tangência. Neste caso teremos duas possibilidades, λ_1 e λ são tangentes externas ou λ_1 e λ são tangentes internas.

A Figura 14 representa a primeira possibilidade, onde λ é a circunferência de centro B dada e λ_1 é a circunferência de centro A construída tangente a λ externamente.

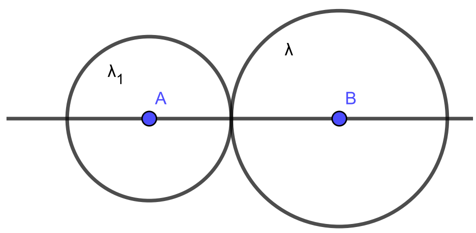


Figura 14: Situação em que o ponto de tangência está entre os centros.

A Figura 15 representa a segunda possibilidade, onde λ é a circunferência de centro B dada e λ_1 é a circunferência de centro A construída tangente a λ internamente.

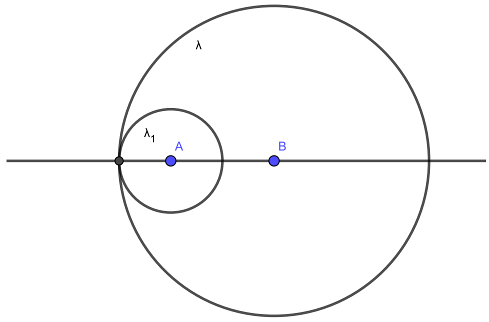


Figura 15: Situação em que o ponto de tangência não está entre os centros.

Exemplo 6. *A circunferência de centro $(0, 8)$ é tangente exteriormente à circunferência de equação $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 49$. Nesta situação, as coordenadas do ponto de tangência é obtido resolvendo o sistema abaixo.*

Observe que as circunferências são tangentes exteriormente, logo, a distância entre os centros é a soma das medidas dos raios. Chamando de A o centro da primeira circunferência e de B o centro da segunda temos que as coordenadas de A são, $A = (0, 8)$ e $B = (5, -4)$. Portanto, encontrando o raio da primeira circunferência podemos encontrar a sua equação.

Para determinarmos o raio da primeira circunferência, vamos primeiro determinar à distância d_{AB} entre seus centros.

$$d_{AB} = \sqrt{(0-5)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{25+144} = 13$$

Como a distância entre os centros é 13 e o raio da segunda circunferência é 7, temos que o raio da circunferência de centro A é $13 - 7 = 6$. Portanto, a equação da circunferência é $x^2 + (y-8)^2 = 6^2$.

Para resolver a segunda parte do problema devemos formar um sistema com as duas equações das circunferências dadas.

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y+4)^2 = 49, \\ x^2 + (y-8)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 8y = 8, \\ x^2 + y^2 - 16y = -28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 8y = 8, \\ \\ -10x + 24y = 36 \end{cases}$$

.

Tomando $y = \frac{18+5x}{12}$, *temos a expressão:*

$$x^2 + \left(\frac{18+5x}{12}\right)^2 - 10x + 8 \cdot \left(\frac{18+5x}{12}\right) = 8 \Rightarrow$$

$$x = 2,31 \text{ e } y = 2,46.$$

A Figura 16, ilustra a solução desse sistema.

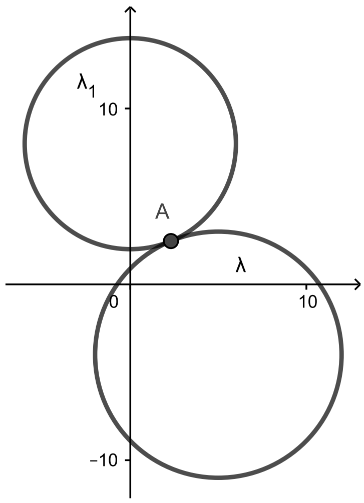


Figura 16: Circunferências tangentes externas.

Exemplo 7. *São dadas duas circunferências, uma de centro* $(0,5)$ *e a outra de equação* $(x-6)^2+(y+3)^2 = 9$ *tangentes internamente. Calculando a distância entre seus centros obteremos a equação da circunferência de centro* $(0,5)$.

Como as duas circunferências são tangentes internas, a distância entre os centros é igual ao módulo da diferença entre os raios, como vemos na Figura 17. Assim devemos encontrar primeiro a distância entre os centros.

Sendo $A = (0,5)$ *e* $D = (3,2)$, *temos que:*

$$d_{AD} = \sqrt{(0-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

Observe que o raio de uma das circunferências é $2\sqrt{2}$ *e a distância entre os centros é* $3\sqrt{2}$*, logo o raio da outra circunferência é* $R = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Portanto, a equação da circunferência de centro $(0, 5)$ *e* $R = 7$ *é:*

$$x^2 + (y-5)^2 = 50.$$

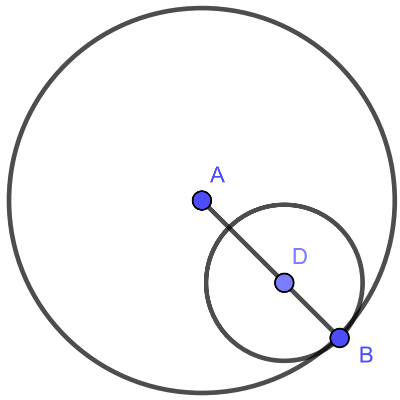


Figura 17: Circunferências tangentes internamente.

Sendo assim, vimos através das diferentes abordagens, caminhos distintos para se analisar o problema da tangência de circunferências. É vital apresentar aos estudantes todas as opções disponíveis a fim de ampliar o modo de acessar tais situações problema.

Posto isto, no capítulo que se segue analisaremos de que maneira o tópico que envolve o estudo da tangência de circunferências é inserido no currículo escolar da Educação Básica. Tal análise será apresentada através da avaliação dos materiais didáticos utilizados nas instituições de educação do sistema público de ensino brasileiro.

3 Uma análise das abordagens nos livros didáticos

A fim de perceber a recorrência e aplicabilidade do estudo da circunferência na Educação Básica, é essencial traçar um panorama dos materiais didáticos utilizados especialmente no Ensino Médio. Neste capítulo, analisaremos tais abordagens a fim de reconhecer metodologias atualmente utilizadas para o ensino da circunferência.

É digno de nota que as coleções que serão analisadas já foram ou estão sendo adotadas como material didático das instituições educacionais de ensino público no Brasil. Todas são compostas por 03 volumes básicos, os quais são direcionados a cada ano do Ensino Médio, respectivamente. Todavia, será focalizada a atenção para o volume 03 de cada obra onde pode-se identificar a abordagem do estudo de Geometria Analítica. Dentro dessa abordagem, observaremos, dentre outros aspectos, situações problemas nas quais se insere o estudo da circunferência.

3.1 Matemática: Ciência e Aplicações de Gelson Iezzi (2004)

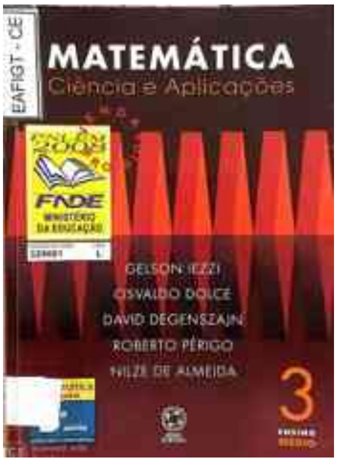


Figura 18: Matemática: Ciência e Aplicações.

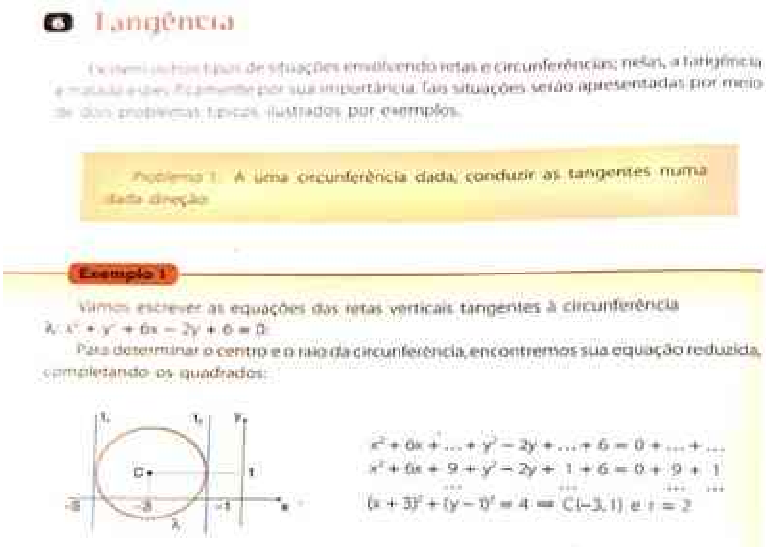
Nesta obra, Iezzi destina um capítulo apenas para o estudo da circunferência vide [3]. O autor, destaca: a equação reduzida da circunferência, a equação geral, tangências, posições relativas entre ponto e circunferência e posições relativas entre reta e circunferência. Após a abordagem dos tópicos citados por meio de exemplos e questões resolvidas, Iezzi complementa a fixação do conteúdo trazendo questões de vestibulares que envolvem o conteúdo do estudo das circunferências.

O livro *Matemática: Ciências e Aplicações* esclarece como podemos desenvolver a equação reduzida da circunferência usando a distância entre dois pontos, conforme o autor direciona o entendimento em capítulos anteriores. Em seguida, usando a distribuição dos produtos notáveis, se conduz o leitor ao entendimento da expressão que conhecemos como equação geral da circunferência.

Evidenciando a atenção nas posições relativas entre um ponto e uma circunferência, em [3] se faz um estudo detalhado das três possíveis posições existentes. O autor pontua que ao usar a distância entre dois pontos e o comprimento do raio como referencial, pode-se distinguir se um ponto é interno à circunferência, se pertence à circunferência ou se o ponto é externo a circunferência.

Ao longo do desenvolvimento do capítulo, o estudo é semelhante quando se trata da posição entre uma reta e uma circunferência. Nesse contexto, uma reta pode ser classificada como: externa, tangente ou secante. O autor destaca que ao calcularmos a distância do centro da circunferência a uma reta e compararmos com o comprimento do raio, poderemos concluir qual é a posição da reta em relação à circunferência.

No entanto, no tópico sobre tangência, Iezzi destaca apenas as situações em que uma circunferência é tangente a uma reta ou a mais de uma reta, como vemos nas Figuras 19 e 20.



Tangência

Problema 1: A uma circunferência dada, conduzir as tangentes numa dada direção.

Exemplo 1

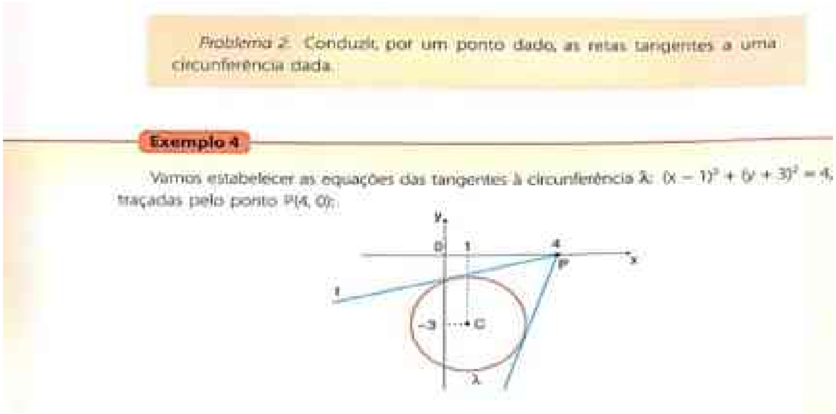
Vamos escrever as equações das retas verticais tangentes à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$.

Para determinar o centro e o raio da circunferência, encontremos sua equação reduzida, completando os quadrados:

$$x^2 + 6x + \ldots + y^2 - 2y + \ldots + 6 = 0 + \ldots + \ldots$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + 6 = 0 + 9 + 1$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow C(-3, 1) \text{ e } r = 2$$

Figura 19: Ciência e Aplicações, pág. 154.

Neste contexto, não temos uma apresentação da situação problema onde duas circunferências são tangentes. Por outro lado, analisando os exercícios complementares, encontramos uma grande quantidade de questões aplicadas em vestibulares as quais



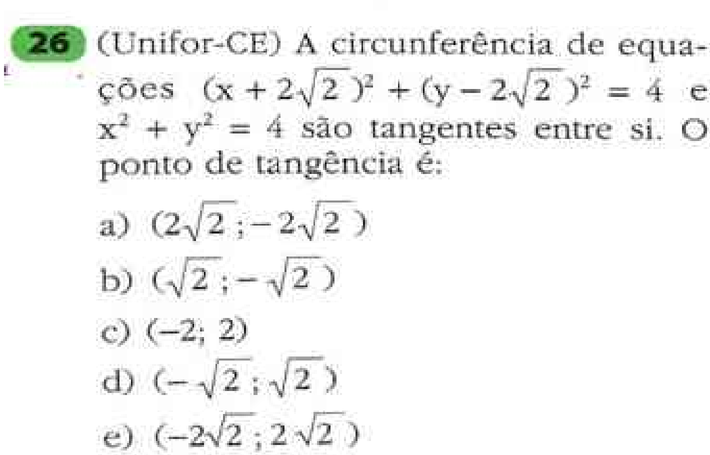
Problema 2: Conduzir, por um ponto dado, as retas tangentes a uma circunferência dada.

Exemplo 4

Vamos estabelecer as equações das tangentes à circunferência λ: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$, traçadas pelo ponto $P(4, 0)$:

Figura 20: Ciência e Aplicações, pág. 156.

abordam situações problemas envolvendo o referido tópico, a saber, tangências de circunferências, embora não tenha sido abordado ao longo do capítulo, veja a Figura 21.



26 (Unifor-CE) A circunferência de equações $(x + 2\sqrt{2})^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 4$ são tangentes entre si. O ponto de tangência é:

a) $(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$

b) $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

c) $(-2; 2)$

d) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

e) $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

Figura 21: Exercício 26, pág. 162.

Sendo assim, identifica-se na obra [3] uma abordagem tradicional. Embora apresente um bom embasamento teórico sobre as equações da circunferência, o autor não mostra uma aplicação prática da mesma no cotidiano. Além disso, o estudo está Focalizado apenas para as situações em que envolvem circunferências e retas, neste contexto não apresenta exemplos envolvendo duas circunferências tangentes.

3.2 Matemática Completa de Giovanni e Bonjorno (2005)

Figura 22: Matemática Completa.

Analisando a obra Matemática Completa de Giovanni e Bonjorno [5], observa-se que há uma divisão na abordagem da Geometria Analítica. O referido tópico é introduzido no volume 03 da coleção e estudada no terceiro ano do ensino médio em três capítulos: Pontos e Retas, Circunferências e Cônicas.

No capítulo sobre circunferências, os autores destacam quatro tópicos principais: as equações da circunferência, posições relativas de um ponto e uma circunferência, posições relativas de uma reta e uma circunferência e as posições relativas entre duas circunferências.

Quando se explica sobre a equação reduzida da circunferência, os autores destacam a distância entre dois pontos como base para chegar à mesma. Diferente de outras obras, em [5] se apresentam muitos exemplos resolvidos para trabalhar o assunto em diversas situações.

Partindo da equação reduzida e desenvolvendo os quadrados perfeitos existentes na mesma, tem como resultado a equação geral da circunferência. Os autores usam a técnica de completar quadrados para verificar se determinada expressão representa a equação de uma circunferência e para determinar o seu centro e o seu raio.

Com relação às posições relativas de um ponto e uma circunferência, existem três situações prováveis. As possibilidades são: o ponto pode ser interno, externo ou pertencer a circunferência. No entanto, para identificar em qual posição o ponto se encontra, este livro segue o mesmo princípio já destacado em outros: calcula a distância entre o centro da circunferência e o ponto e compara com a medida do comprimento do raio. Este é um exemplo claro de mais uma situação em que os autores exploram o uso de exercícios resolvidos para trabalhar cada uma das posições.

Para as posições entre uma reta e uma circunferência, o processo abordado no livro é o padrão, até então constatado: determina a distância do centro da circunferência à determinada reta e compara com o comprimento do raio da circunferência. Neste aspecto, se o raio for maior que a distância do centro à reta, a reta é chamada de reta secante à circunferência. Por outro lado, se a distância do centro a reta for igual ao raio, ela será tangente á circunferência. Finalmente, se a distância do centro à reta for maior que o raio, a reta será externa a circunferência.

Este livro também destaca outros problemas de tangências envolvendo uma circunferência e duas retas, nas quais essas retas são paralelas ou concorrentes.

No caso em que temos duas circunferências tangentes entre si, o livro [5] mostra que as circunferências podem ser externas ou internas. Esta obra destaca que se duas circunferências são tangentes externamente, a distância entre seus centros é igual à soma das medidas de seus raios. Já no caso em que as circunferências são tangentes internamente, a distância entre seus centros é o módulo da diferença entre seus raios. A Figura 23 destaca esta abordagem.

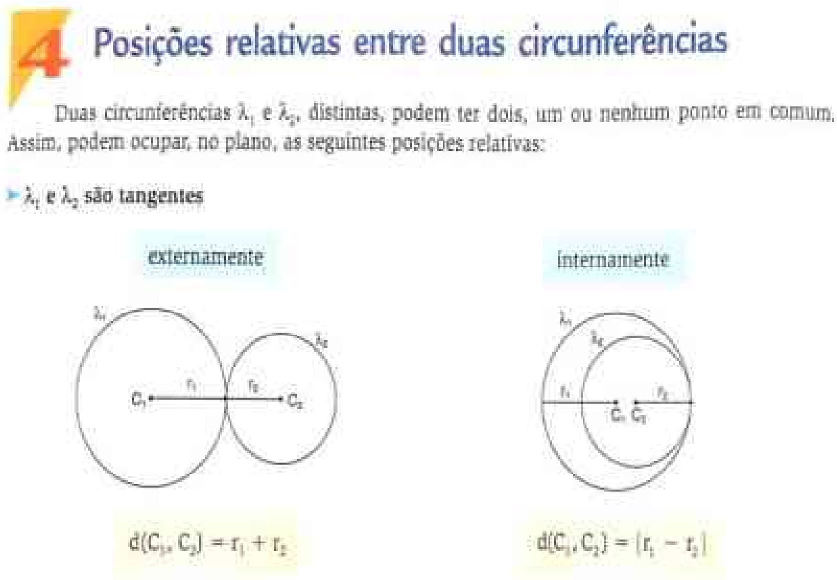
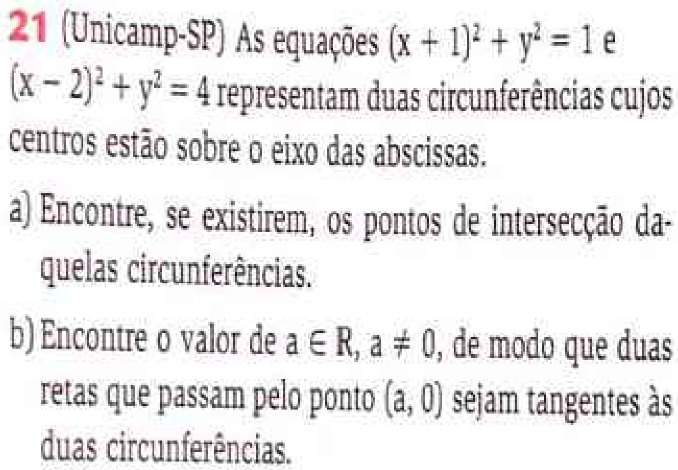


Figura 23: Posições relativas entre duas circunferências, pág. 98.

Vale ressaltar que este livro apresenta uma variedade de questões que abordam cada tópico do assunto. A Figura 24 representa um exemplo de como são algumas questões. Esta estratégia permite ao estudante um contato mais aprofundado com o conteúdo em questão.



21 (Unicamp-SP) As equações $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ representam duas circunferências cujos centros estão sobre o eixo das abscissas.

a) Encontre, se existirem, os pontos de intersecção daquelas circunferências.

b) Encontre o valor de $a \in R$, $a \neq 0$, de modo que duas retas que passam pelo ponto $(a, 0)$ sejam tangentes às duas circunferências.

Figura 24: Exercício 21, pág. 102.

3.3 Matemática de Manoel Paiva (2009)

Figura 25: Matemática Paiva.

Para um livro de ensino médio, Manoel Paiva ([9]) apresenta uma versão um tanto resumida sobre o estudo da circunferência. O capítulo que trata deste assunto, tem como título "Equações da circunferência". Ao deparar-se com esse título o leitor é introduzido ao foco do estudo que será as equações de uma circunferência, tanto a equação reduzida como a equação geral.

Com o objetivo de ir além da teoria, o autor inicia o capítulo sobre circunferências mostrando o exemplo de uma ponte elevadiça que se movimenta em torno de um eixo. A ideia transmitida é de que se a equação da circunferência, que se forma com o movimento da ponte, for encontrada, poderemos encontrar a altura máxima de um ponto fixo na extremidade da mesma no momento em que se eleva.

Apesar de ofertar uma versão mais direta e compacta do tópico sobre circunferências, Paiva faz uma demonstração da equação reduzida usando a distância entre dois pontos. Além disso, o autor também usa a técnica de completar quadrados para se chegar a equação geral. Paiva também destaca a importância de usarmos essas equações para identificar elementos como o centro e o raio da circunferência.

Este livro também aborda as posições relativas entre uma circunferência e um ponto e entre uma circunferência e uma reta. Com relação a posição relativa entre uma circunferência e um ponto, Paiva usa a distância entre o centro da circunferência a um determinado ponto dado, compara com o comprimento do raio e então identifica se o ponto é interno à circunferência, se ele pertence a circunferência ou se é externo.

A teoria é semelhante aos demais autores quando se trata da posição relativa entre uma circunferência e uma reta, calculando a distância do centro da circunferência a uma reta qualquer dada e comparando essa distância ao comprimento do raio. Com esses dados apresentados, Paiva identifica se a reta é exterior à circunferência, se é tangente ou secante à circunferência, como vemos na Figura 26.

Figura 26: Posições relativas entre reta e circunferência, pág. 84.

Além desta apresentação teórica, Paiva também trabalha muitos exercícios resolvidos para cada situação supracitada em relação a circunferência. Paiva oferta em sua abordagem exercícios propostos e exercícios complementares para estimular a fixação do assunto pelo aluno. No entanto, em [9] não são apresentadas as posições relativas entre duas circunferências. Sendo assim, por não apresentar o assunto em sua completude, fica uma lacuna no aprendizado do estudante.

3.4 Matemática Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante (2013)

Figura 27: Matemática: Contexto e Aplicações.

Em sua obra, Dante [2] divide a unidade de estudo da Geometria Analítica em três capítulos: um para ponto e reta, outro para circunferência e um terceiro para superfícies cônicas. O referido autor faz, inicialmente, uma breve apresentação da unidade contextualizando o conceito sobre Geometria Analítica dando como exemplo do quotidiano o uso do GPS (Global Positioning System: Sistema de Posicionamento Global).

A seguir, o livro apresenta um breve histórico sobre as contribuições de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) para o desenvolvimento de propriedades geométricas das curvas em um plano e equações algébricas com duas incógnitas. Por outro lado, é digno de nota nesta apresentação introdutória do capítulo as colaborações de Pierre de Fermat para o desenvolvimento da Geometria Analítica, associando equações a curvas e superfícies.

Após apresentar noções e aplicações sobre ponto e reta, Dante relembra, no capítulo seguinte, o conceito de circunferência. O autor inicia o capítulo destacando pontos altos sobre o estudo da circunferência vistos no Ensino Fundamental de forma superficial. Para facilitar a compreensão do leitor, Dante relaciona o uso da circunferência com elementos presentes no nosso dia a dia, tais como: a roda de um veículo ou mesmo a boca de um copo. Tais objetos representam circunferências e ilustram de forma clara a propriedade fundamental do estudo da circunferência, isto é, a equidistância dos seus pontos ao centro.

Em seguida, Dante inicia sua explanação sobre o estudo da circunferência começando pela definição básica:

Uma circunferência com centro $O(a, b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano equidistantes a O.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, o autor chega a equação reduzida da circunferência e, ao desenvolver a equação reduzida, obtém-se a equação geral. Através da equação geral Dante mostra dois métodos para se determinar o centro de uma circunferência e o seu raio, a saber, o método de completar quadrados e o método da comparação. Neste momento, o livro traz exemplos resolvidos utilizando os dois métodos.

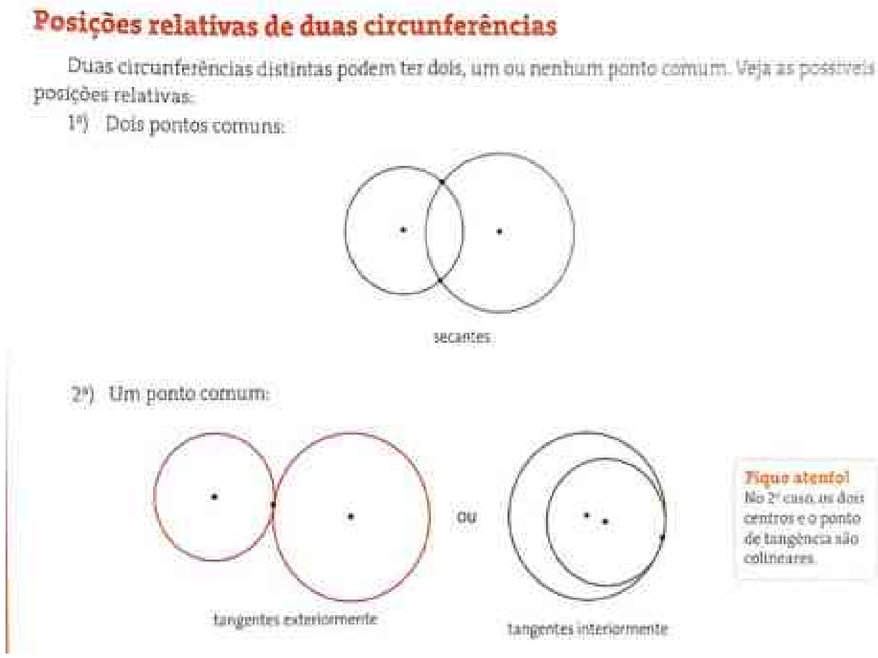
Vale salientar, em relação aos exercícios propostos, que estes são distribuídos de forma gradativa aumentando o seu grau de complexidade, que variam desde a aplicação direta da equação reduzida a questões contextualizadas envolvendo figuras. Nos exercícios resolvidos, por exemplo, o autor procura utilizar questões de vestibulares, adaptadas ao nível do conteúdo que foi abordado.

Outro fator interessante na coleção, é que quando o autor exercita tais questões resolvidas sobre a circunferência, ele também dá embasamento para que o aluno sinta-se capaz de solucionar as questões, através de exercícios denominados "Resolvido Passo a Passo". É um tópico que chama a atenção pois neste momento o autor interage com o leitor, trazendo à tona perguntas que estimulam o raciocínio do aluno dando sugestões de como seguir um padrão de resolução baseado nos pilares de: leitura, compreensão, planejamento, execução e solução.

Dante não limita-se a simples respostas mas estimula uma ampliação de raciocínio por levantar indagações hipotéticas em torno da questão-problema em torno da circunferência e por fazer uma conexão com a realidade. Um diferencial desta coleção é que Dante sempre propõe que tais reflexões e resoluções sejam feitas em duplas e em equipes, destacando dessa forma, a importância da construção do saber coletivo.

Na continuação do capítulo, o autor amplia as noções e conhecimentos sobre o estudo da circunferência por pontuar a posição relativa entre reta e circunferência, problemas de tangência e aplicação à Geometria Plana. Além disso, aprofunda mais o conhecimento por destacar tópicos sobre posições relativas de duas circunferências. Neste contexto, Dante apresenta uma propriedade importante sobre duas circunferências tangentes entre si, ou seja, se duas circunferências são tangentes entre si seus centros são colineares ao ponto de tangência, como pode ser visto na Figura 28.

É importante ressaltar que todo e qualquer assunto abordado em sala de aula deve



Posições relativas de duas circunferências

Duas circunferências distintas podem ter dois, um ou nenhum ponto comum. Veja as possíveis posições relativas:

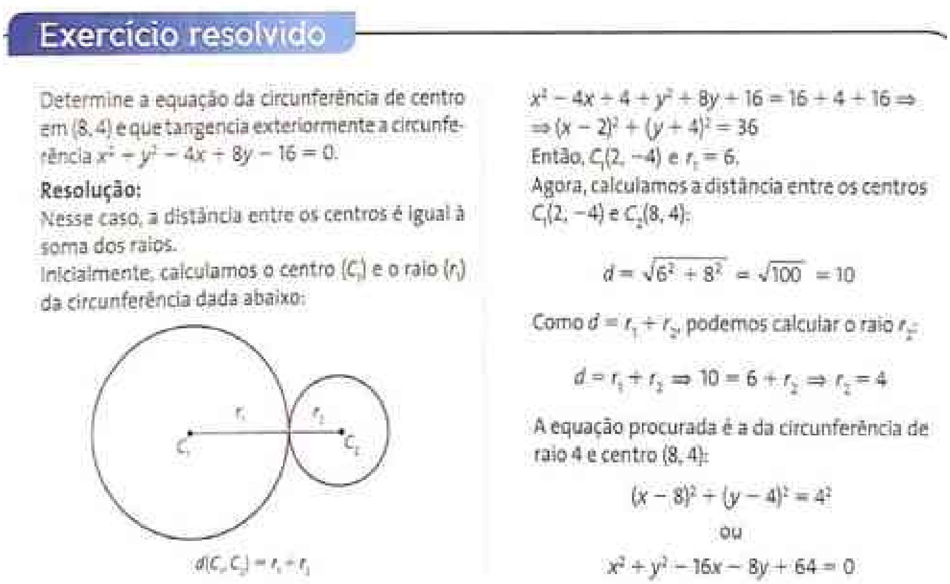
1ª) Dois pontos comuns:

2ª) Um ponto comum:

Fique atento! No 2º caso, os dois centros e o ponto de tangência são colineares.

Figura 28: Posições entre duas circunferências, pág. 105.

ter um valor prático bem esclarecido a fim que o aluno perceba a aplicabilidade dos conteúdos apresentados. Sendo assim, Dante, após concluir o embasamento teórico, bem como exercícios resolvidos, Figura 29, apresenta uma seção intitulada "Outros Contextos".



Exercício resolvido

Determine a equação da circunferência de centro em (8, 4) e que tangencia exteriormente a circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.

Resolução:

Nesse caso, a distância entre os centros é igual à soma dos raios.

Inicialmente, calculamos o centro (C_1) e o raio (r_1) da circunferência dada abaixo:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 16 + 4 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$

Então, $C_1(2, -4)$ e $r_1 = 6$.

Agora, calculamos a distância entre os centros $C_1(2, -4)$ e $C_2(8, 4)$:

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

Como $d = r_1 + r_2$, podemos calcular o raio r_2:

$$d = r_1 + r_2 \Rightarrow 10 = 6 + r_2 \Rightarrow r_2 = 4$$

A equação procurada é a da circunferência de raio 4 e centro (8, 4):

$$(x-8)^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$$

Figura 29: Exercício resolvido, pág. 107.

Neste momento, o livro faz aplicações da circunferência aos jogos olímpicos, como os símbolos da bandeira e esportes como tiro com arco, ciclismo entre outros. As ilustrações contidas no capítulo ajudam o leitor a visualizar a conexão do evento olímpico com a circunferência, fazendo as associações necessárias.

Dada a importância e existência no dia a dia, o autor enfatiza a abordagem do estudo da circunferência aplicando questões contextualizadas semelhantes as que são exigidas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Uma vez que a proposta deste exame é conectar conhecimentos através de questões interdisciplinares, Dante apresenta questões que utilizam o conteúdo programático sobre a circunferência interligado com as disciplinas de Geografia, História e Física.

Além disso, o autor sugere que o leitor confira uma seção, ao final do livro, com questões que já foram cobradas no ENEM em exames anteriores abordando aspectos interdisciplinares que exigem a apropriação da teoria em torno do estudo da circunferência para sua resolução. Por fim, Dante vai mais além ao selecionar questões já apresentadas em vestibulares ao redor do país. Diferente do ENEM, tais questões têm uma abordagem mais teórica, centrada e direta na aplicação de regras, equações que envolvem o estudo da circunferência.

3.5 Conexões com a Matemática de Fábio Martins (2016)

Figura 30: Conexões com a Matemática.

Neste livro [6] percebe-se uma divisão dos conteúdos do volume 3 em 9 capítulos. O capítulo que trata do estudo da circunferência é apresentado em dois tópicos gerais, a saber, equações da circunferência e posições relativas. Além disso, exercícios complementares são sugeridos como meio de fixação do conteúdo.

O capítulo destinado a abordagem do estudo da circunferência inicia fazendo uma contextualização através da apresentação do exemplo de um acelerador de partículas na forma de anel subterrâneo, localizado na fronteira Franco-Suiça, que possui 26659 metros de circunferência. Quando colocado em funcionamento as partículas percorrem a sua circunferência em alta velocidade. Ao propor esse quadro mental, auxiliado pelas ilustrações, o autor instiga no aluno a percepção da aplicação da Geometria Analítica em situações reais, presentes no dia a dia.

Algo que é notório, ainda na introdução do capítulo, é uma caixa suspensa denominada "Objetivos do capítulo". Neste quadro, o autor pontua os propósitos que são esperados que o leitor alcance ao final do estudo do conteúdo sobre circunferência. Deste modo, o aluno pode ativar seus conhecimentos prévios sobre o assunto e orientar seu estudo, levando em conta conceitos sobre a circunferência vistos em séries anteriores.

Ao introduzir o tópico equações da circunferência, o autor faz um breve comentário sobre a contribuição de alguns matemáticos e filósofos da antiguidade, como Euclides (325-265) que escreveu a obra intitulada Elementos, na qual descreve construções com régua e compasso, ou seja, traçando retas e circunferências. Outra pessoa que colaborou de forma notória para o desenvolvimento da Geometria Analítica foi René Descartes (1596-1650), em que há outro enfoque para o estudo da circunferência.

Após fazer essa abordagem histórica, o autor apresenta algumas definições essenciais na Geometria Analítica. Primeiramente, define lugar geométrico e usa esse conceito para definir circunferência.

A partir do cálculo da distância entre dois pontos, o livro mostra a equação reduzida de uma circunferência de centro C e raio r. Em seguida, apresenta alguns exercícios resolvidos mostrando, inclusive, como fica a equação reduzida de uma circunferência que possui o seu centro na origem do plano cartesiano.

Continuando a explanação, o autor apresenta a equação geral da circunferência. Tal equação é obtida pelo desenvolvimento das operações contidas na equação reduzida, ou seja, desenvolvendo os quadrados perfeitos que a equação reduzida apresenta temos como resultado a equação geral ou equação normal da circunferência.

Neste mesmo capítulo, o livro destaca a posição relativa entre: um ponto e uma circunferência, uma reta e uma circunferência e entre duas circunferências como pode ser visto na Figura 31, exemplificando por meio de situações práticas cada uma das posições relativas.

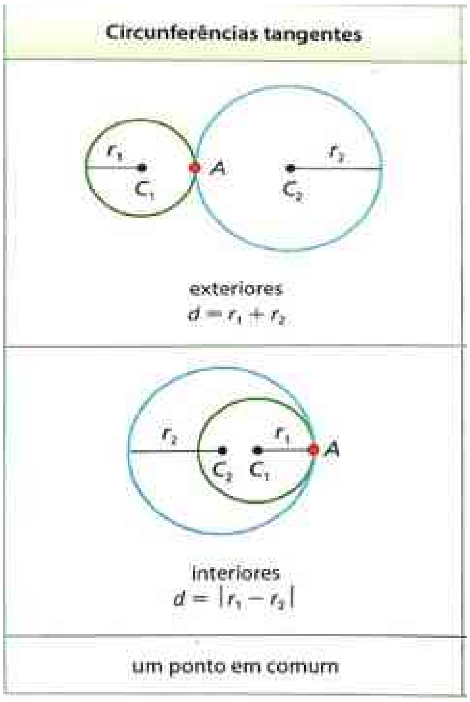


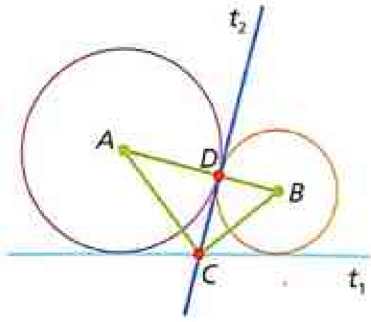
Figura 31: Posição relativa de duas circunferências tangentes, pág.147.

Em cada um desses contextos o autor ilustra fazendo referência a elementos do quotidiano, para que o aluno, ao fazer a associação, seja plenamente capaz de visualizar os conceitos de forma mais concreta. Além dessa variedade de exemplos apresentados, entre exercícios resolvidos e exercícios complementares, como mostra a Figura 32, nota-se que o autor demonstrou preocupação em, aos poucos, aumentar o nível de dificuldades para a resolução das questões.

Ao longo do capítulo, observa-se em sua estrutura, que o autor busca, a todo momento que o aluno seja autônomo na aquisição de seu conhecimento. Ao mesmo tempo em que dá o suporte teórico, o autor insere em quadros suspensos nas laterais, propostas que induzem a reflexão, autoavaliação, observações e desafios. Nesse molde que dialoga com o leitor, o passo a passo na construção do conhecimento apresenta-se como um processo mais acessível e natural.

Na conclusão do capítulo, há numa seção chamada "Pesquisa e Ação". A primeira parte tem como objetivo fazer uma conexão interdisciplinar com a arte. Neste momento o autor faz uma fusão da arte abstrata em contraposição com a arte figurativa, contexto no qual serão inseridas formas geométricas, dentre as quais podemos destacar a circunferência. Na segunda parte o foco é a interdisciplinaridade com a Física, atra-

10. (Fuvest-SP) A figura representa duas circunferências de raio R e r com centros nos pontos A e B, respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto D.



Suponha que:

a) as retas t_1 e t_2 são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto C.

b) a reta t_2 é tangente às circunferências no ponto D.

Calcule a área do triângulo ABC em função dos raios R e r.

Figura 32: Exercício complementar, pág. 149.

vés da leitura e compreensão de um texto chamado A Matemática do GPS. Seguindo essa linha, o autor demonstra as diversas ramificações e aplicabilidades dos estudos da circunferência.

3.6 Considerações a respeito da análise dos livros didáticos

Após meticulosa reflexão sobre a análise feita de todas as obras supracitadas, é possível ter um quadro geral de como a abordagem do estudo da circunferência é apresentado nos materiais didáticos adotados no nível médio da rede pública de ensino. Veja a Tabela 1.

Em base comparativa pôde-se perceber que cada um dos autores verificados nesta análise direcionam o estudo da circunferência para sua parte analítica. Isto significa dizer que o foco está na apresentação das equações, da posição relativa entre uma circunferência e um ponto ou a uma reta.

É importante salientar que apesar de não ser um assunto abordado por todos os autores, o estudo da posição relativa entre duas circunferências é imprescindível ao entendimento do estudo da circunferência em sua completude. Além disso, compreender

Tabela 1: Análise de livros didáticos

Autor	Iezzi (2004)	Giovanni (2005)	Paiva (2009)	Dante (2013)	Martins (2016)
Definição da circunferência	Sim	Sim	Não	Sim	Sim
Introdução da equação reduzida da circunferência	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Reconhecimento da equação geral circunferência	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Apresentação da posição relativa entre um ponto uma circunferência	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Apresentação da posição relativa entre uma reta e uma circunferência	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Construção de uma reta tangente a uma circunferência	Não	Não	Não	Não	Não
Apresentação da posição relativa entre duas circunferências	Não	Sim	Não	Sim	Sim
Propriedade de colinearidade dos centros com o ponto de tangência	Não	Não	Não	Sim	Não
Construção de circunferências tangentes entre si	Não	Não	Não	Não	Não
Questões envolvendo tangências	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

as propriedades de duas circunferências tangentes é essencial pois consta no conteúdo programático exigido em alguns processos seletivos que visam admissão nas Universidades.

Constatou-se também, que no Ensino Médio os estudantes não têm a oportunidade de estudar a circunferência e suas posições relativas utilizando a construção geométrica. Uma vez dada aos estudantes a oportunidade de uma imersão no conteúdo, aplicando a teoria na prática, eles serão capazes de visualizar e fixar melhor as relações entre a circunferência e suas posições relativas.

A formação continuada dos estudos rumo a Universidade constitui-se como a meta principal na formação do aluno do Ensino Médio. Sendo assim, é vital que conste nas obras de apoio ao processo de ensino-aprendizagem uma abordagem completa e eficaz do estudo da circunferência. Posto isto, o estudante ficará melhor preparado não só em nível teórico mas também em nível prático, uma vez que as obras contenham propostas que visem a reflexão e construção de desenhos geométricos.

Diante da análise dos livros didáticos que abordam problemas envolvendo a tangência entre circunferências, fica claro que os materiais em questão preocupam-se em fazer uma abordagem predominantemente analítica de tais problemas. Isto significa que é dado prioridade ao cálculo dos valores da equação da circunferência, das coordenadas do centro e do raio, enquanto que a análise da imagem para reflexão e dedução a fim de alcançar uma conclusão satisfatória, são deixados em segundo plano. Sendo assim, ao aluno fica excluída a oportunidade de entender geometricamente a situação.

4 Construções fundamentais no ensino de geometria

Como observamos na Tabela 1, os livros didáticos analisados não abordam tópicos sobre a construção de circunferências tangentes entre si. No entanto, sabemos que a construção geométrica pode ser considerada parte integrante das soluções analíticas, visto que ela pode revelar passos que não estão descritos nos enunciados dos problemas. Além disso, a construção geométrica também ajuda a desenvolver o raciocínio, contribui para a organização dos dados da situação problema e representa um importante fator para o desenvolvimento analítico da solução.

Sendo assim, nos próximos tópicos, serão apresentadas algumas construções fundamentais e resoluções de exemplos por meio de construções geométricas. As soluções desses exemplos proporcionam aos estudantes o exercício das construções fundamentais e contribui para que os mesmos ampliem seus conhecimentos sobre construções geométricas. No entanto, antes de começarmos a estudar a construção de circunferências tangentes, é importante relembrarmos alguns conceitos básicos como: mediatriz de um segmento, segmentos perpendiculares, retas tangentes a uma circunferência, bissetriz de um ângulo e centro de homotetia [4], [10].

4.1 Mediatriz de um segmento

Traçar a mediatriz de um segmento qualquer AB dado, equivale a encontrar um segmento que divide o segmento AB em duas partes iguais, com na Figura 33 . Podemos fazer esse processo seguindo os passos descritos abaixo:

1. Com o compasso centrado em A e com uma abertura maior que metade do segmento AB, traçamos um arco de um lado e um arco do outro lado do segmento;

2. Com o compasso centrado em B e com a mesma abertura repetimos o passo anterior;

3. A intercessão dos dois arcos determina os pontos C e D.

4. O segmento CD representa a mediatriz do segmento AB.

Observação 1. *Todo ponto da mediatriz de um segmento dista igualmente dos extremos desse segmento e reciprocamente, todo ponto que dista igualmente dos extremos de um segmento pertence à mediatriz desse segmento.*

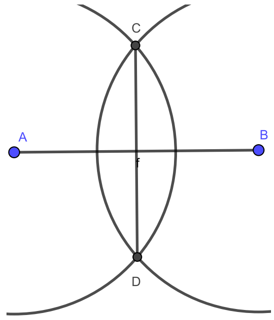


Figura 33: Mediatriz do segmento AB.

Observação 2. *Como a mediatriz de um segmento intersecta o mesmo em seu ponto médio, então podemos seguir esses mesmos passos para determinar o ponto médio de um segmento.*

4.2 Bissetriz de um ângulo

Traçar a bissetriz de um ângulo, equivale a dividir o ângulo em duas partes iguais. Para encontrar essa reta que divide um ângulo dado em dois, basta seguir os passos abaixo:

1. Seja O o vértice de um ângulo de lados OA e OB.

2. Com centro no vértice O, e abertura qualquer, trace um arco que contém os pontos C e D na interseção com os lados do ângulo.

3. Com centro em C e depois em D e mesmo raio obteremos o ponto E.

4. A reta que contém o segmento OE representa a bissetriz do ângulo dado, como vemos na Figura 34.

4.3 Retas perpendiculares

Traçar uma reta perpendicular a outra equivale a traçar duas retas concorrentes em um determinado ponto, no qual as retas formam 4 ângulos de 90°, conforme Figura 35.

Seja r uma reta qualquer, e P um ponto que não pertence a r, queremos construir uma reta t perpendicular a r passando por P. Os passos a seguir nos ajudam a encontrar tal reta t.

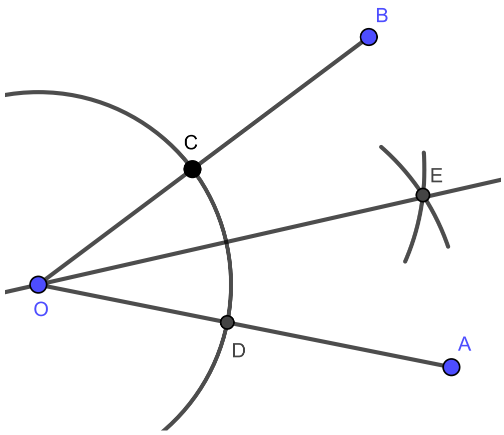


Figura 34: Bissetriz de um ângulo.

1. Com o compasso centrado em P e uma abertura maior que a distância de P a reta r, traçamos um arco de circunferência que intercepta r nos pontos A e B.

2. Agora, com o compasso centrado em A e com abertura igual ao comprimento do segmento AP, traçamos um arco fora de r e repetimos o processo, com a mesma abertura e centro em B. Assim encontramos o ponto Q.

3. Trançamos a reta t, passando por P e Q, que é a reta perpendicular a r.

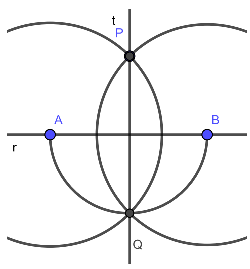


Figura 35: As retas r e t são perpendiculares.

4.4 Retas tangentes a uma circunferência

Traçar retas tangentes a uma circunferência, equivale a construir retas que passam por apenas um ponto que pertence a circunferência, como podemos ver na Figura 36.

Seja A o centro de uma circunferência dada e B um ponto fora dessa circunferência. Vamos construir as retas que passam em B e são tangentes a essa circunferência.

1. Trace uma reta que liga o ponto A e B.
2. Encontre o ponto médio M do segmento AB.
3. Com centro em M e raio MA, trace uma circunferência que intersecta a circunferência de centro A nos pontos P e Q.
4. Trace uma reta que liga BP e outra que liga BQ.
5. As retas que contém os segmentos BP e BQ são tangentes a circunferência dada.
6. Seguem os mesmos passos quando o ponto M é interno a Circunferência.

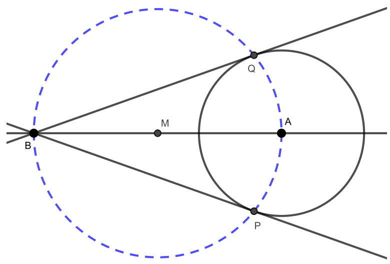


Figura 36: Retas tangentes a uma circunferência.

4.5 Centro de homotetia

Definição 4. *Dadas duas circunferências distintas, seus centros de homotetia são as interseções das retas tangentes comuns internas (centro de homotetia inversa) e das retas tangentes comuns externas (centro de homotetia direta)*

Os passos abaixo descrevem como podemos encontrar o centro de homotetia inversa.

1. Trace duas circunferências distintas, tais que a distância entre os centros seja maior que a somo dos raios.
2. Trace o segmento de reta que liga os centros das duas circunferências.
3. Encontre o ponto M que é ponto médio do segmento que liga os centros.

4. Com centro em M, trace uma circunferência auxiliar que passa pelos centros das circunferências dadas.

5. Usando o centro de uma das circunferências, trace uma nova circunferência auxiliar de modo que seu raio seja a soma dos raios das circunferências dadas inicialmente.

6. Marque os pontos C e D que representam as interseções das circunferências auxiliares.

7. Trace os segmentos AC e AD respectivamente.

8. Encontre os pontos E e F que são as interseções dos segmentos AC e AD com a circunferência dada.

9. Trace os segmentos BC e BD.

10. Trace uma reta paralela ao segmento BC passando por E.

11. Trace uma reta paralela ao segmento BD passando por F.

12. Essas retas representam as tangentes internas comuns as duas circunferências distintas. Como podemos ver na Figura 37, o ponto G de interseção das mesmas representa o centro de homotetia inversa.

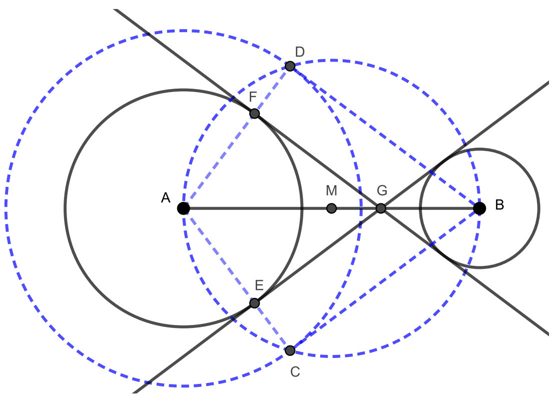


Figura 37: Centro de homotetia inversa.

Agora vejamos os passos que descrevem a construção do centro de homotetia direta.

1. Trace duas circunferências distintas, tais que a distância entre os centros seja maior que a soma dos raios.

2. Trace o segmento de reta que liga os centros das duas circunferências.

3. Encontre o ponto M que é ponto médio do segmento que liga os centros.

4. Com centro em M, trace uma circunferência auxiliar que passa pelos centros das circunferências dadas.

5. Usando o centro de uma das circunferências, trace uma nova circunferência auxiliar de modo que seu raio seja o módulo da diferença dos raios das circunferências dadas inicialmente.

6. Marque os pontos D e E, que é interseção entre as duas circunferências auxiliares.

7. Trace a reta que passa pelos pontos A e D e a reta que passa pelos pontos A e E.

8. Encontre os pontos G e J.

9. Trace os segmentos BD e BE respectivamente.

10. Trace uma reta paralela ao segmento BD passando por J.

11. Trace uma reta paralela ao segmento BE passando por G.

12. O ponto L é a interseção das duas retas e representa o centro de homotetia direta, como observamos na Figura 38.

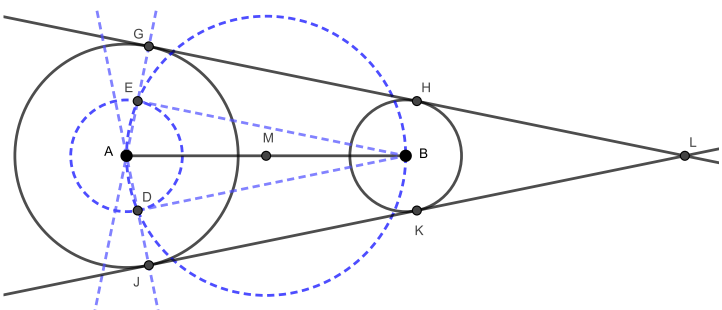


Figura 38: Centro de homotetia direta.

4.6 Exemplos

Uma vez que relembramos conceitos fundamentais no que se refere à construção geométrica, observaremos a seguir exemplos resolvidos que nos ajudarão a fixar a solução de alguns problemas de tangências. Consequentemente tais exemplos serão base para as soluções do problema de Apolônio que será abordado no próximo capítulo.

Exemplo 8. *Construir uma circunferência de centro D tangente a uma reta em um ponto $A(3,2)$ e passando por um ponto $C(5,3)$ que não pertence a reta.*

Se a circunferência de centro D é tangente a reta dada em A, então o ponto D está sobre a reta perpendicular à reta dada. Sendo assim, o centro D é o ponto de interseção entre a reta perpendicular e a mediatriz do segmento AC, o raio da circunferência que queremos tem o comprimento do segmento AD como observamos na Figura 39.

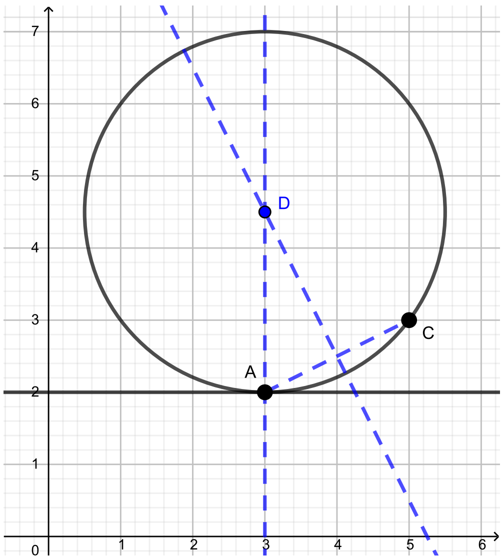


Figura 39: Tangente a uma reta em um ponto A.

Exemplo 9. *No plano cartesiano trace uma reta tangente a uma circunferência, de centro $A(6,2)$, em um ponto $B(7,3)$ pertencente a mesma.*

Sendo o ponto A o centro da circunferência e B um ponto que pertence a mesma, traçamos uma reta que contém o segmento AB. Nesta mesma reta encontramos o ponto D de modo que o ponto B é ponto médio do segmento AD. Por B, traçamos uma reta perpendicular ao segmento AD. Esta reta perpendicular representa a reta tangente que queremos traçar, conforme vemos na Figura 40.

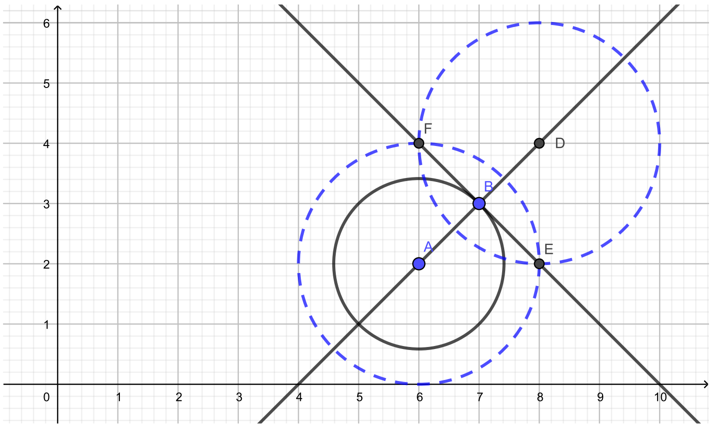


Figura 40: Reta tangente a uma circunferência.

Exemplo 10. *Observe a circunferência de centro $B(8,2)$ e raio $2cm$. Construir duas retas tangentes esta circunferência passando por um ponto $A(5,2)$ externo a mesma.*

Sendo A e B dois pontos dados, vamos traçar o segmento AB e em seguida encontramos o ponto C que representa o seu ponto médio. Com centro em C, traçamos uma circunferência auxiliar que passa por A e B. Marcamos os pontos D e E que representam as interseções das circunferências. Observe que os pontos A, B, D e E pertencem a circunferência de centro C e que os triângulos ABD e ABE são retângulos em D e E respectivamente. Portanto, as retas que contém os segmentos AD e AE representam as retas tangentes a circunferência de centros B, como mostra a Figura 41.

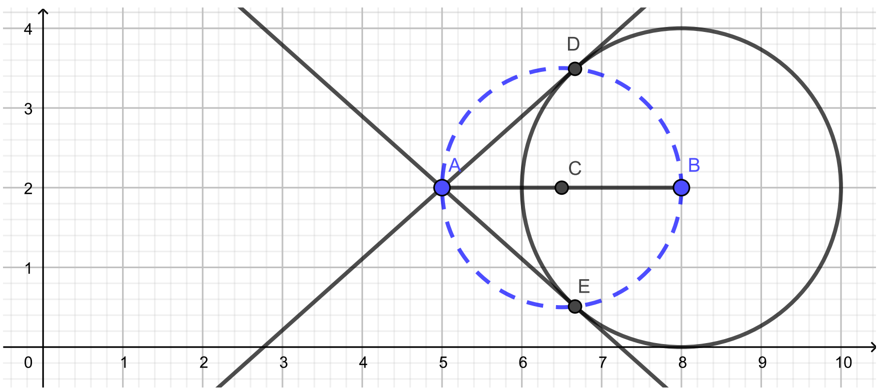


Figura 41: Retas tangentes a uma circunferência.

Exemplo 11. *Dado um triângulo ABC de vértices $A(6,4)$, $B(4,2)$ e $C(8,1)$. Traçar uma circunferência inscrita a esse triângulo.*

Seja ABC um triângulo dado. Traçando as mediatrizes de seus respectivos lados, encontramos o ponto D que representa a interseção das mesmas. Visto que, uma circunferência inscrita em um triângulo possui seu centro na interseção das mediatrizes de seus lados, temos que o ponto D representa o centro da circunferência que queremos traçar. Para determinar o raio da circunferência, traçamos uma reta passando por D e perpendicular a um dos lados do triângulo em E. O comprimento do segmento DE representa o raio da circunferência, como descreve a Figura 42.

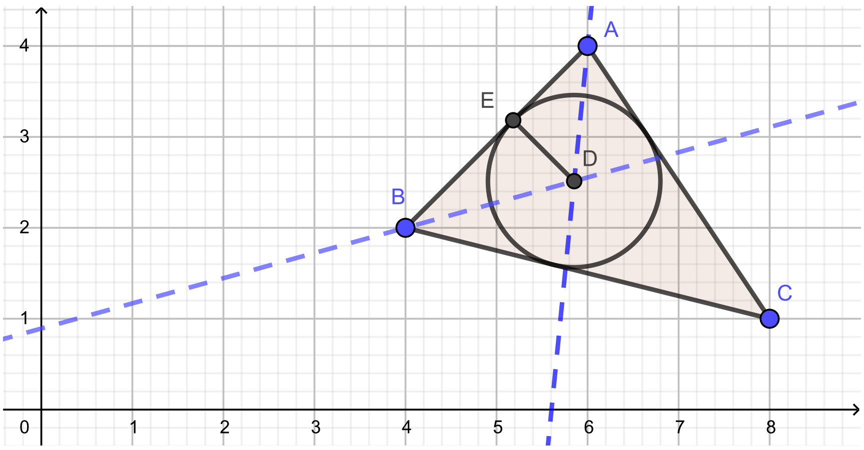


Figura 42: Circunferência inscrita em um triângulo.

5 O Problema de Apolônio

O problema de Apolônio representa um grande marco na história da Geometria. Este problema despertou o interesse de vários matemáticos ao longo dos séculos, cada qual buscando soluções segundo as mais diversas abordagens que refletiam o instrumental matemático disponível em cada época. Neste capítulo, apresentamos o problema de Apolônio como uma sugestão de atividades para o exercício da construção de circunferências.

5.1 Breve Histórico

Durante o primeiro século, aproximadamente, da idade Helenística, são dignas de notoriedade as contribuições de Apolônio de Perga para a matemática grega. Apolônio foi um matemático e astrônomo que viveu, provavelmente, entre os anos 262 e 190 A.C.. É provável que Apolônio tenha estudado em Alexandria, onde posteriormente, também chegou a atuar como professor. De acordo com registros, foi especificamente nessa época, que Apolônio desenvolveu seus melhores estudos, resultando em trabalhos que foram destaque, o que lhe rendeu uma excelente reputação que o tornou conhecido como "O Grande Geômetra".

Pouco se sabe sobre a vida de Apolônio. Todavia, um fato que chama a atenção é que quando ainda era jovem, Apolônio estudou sob a orientação dos seguidores de Euclides. E, apesar de alguns relatos surgirem que Apolônio tenha sido considerado rival de Arquimedes, devido as suas obras, Euclides, Arquimedes e Apolônio, formaram uma tríade que contribuiu de modo extremamente positivo para a matemática grega a ponto de que o período de 300 a 200 A.C., fosse denominado a "Idade Áurea".

Devido a perda de suas muitas obras, o conteúdo deixado por Apolônio pode ser analisado apenas por meio de pontuações e referências desenvolvidas por outros. Exemplificando, alguns casos escritos por Apolônio são conhecidos devido a uma breve descrição feita por Papus. É digno de nota que, no século XVII, o costume de reconstruir livros de Geometria perdidos estava no auge, os tratados de Apolônio estavam entre os favoritos.

Entre os tratados de Apolônio restaurados, o tratado sobre Tangências foi um dos que ganhou mais destaques, pois da forma como Papus descreve, vemos o problema conhecido hoje como "problema de Apolônio", que diz: *"Dadas três coisas, cada uma das quais podem ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar uma circunfe-*

rência que é tangente a cada uma das três coisas". Não temos as soluções de Apolônio mas elas podem ser reconstruídas com base em informação dada por Papus.

Apesar de sua produtividade científica, só dois dos muitos tratados de Apolônio se preservaram em grande parte: *Dividir Segundo Uma Razão* e *As Cônicas*. Embora todas as versões gregas de *Dividir segundo uma razão* tenham se perdido, foi feita uma tradução árabe que está na base da tradução latina produzida no ano de 1706, por Edmund Halley. A obra em questão é constituída por dois livros. Por outro lado, sua obra de maior relevância *As Cônicas*, chegou até nós quase completa e ficou classificada como uma das melhores obras, uma verdadeira obra-prima.

5.2 Algumas soluções do problema de Apolônio

Como vimos no tópico anterior, o problema de Apolônio diz que: *Dados sucessivamente três elementos quaisquer entre pontos, retas e circunferências, com certas posições, traçar uma circunferência que seja tangente a cada um desses elementos.*. Neste caso, a complexidade da solução depende do tipo de objeto que estamos considerando, desde traçar uma circunferência tangentes (passando) a três pontos a traçar uma circunferência tangente a três circunferências.

Neste contexto, o problema de Apolônio pode ser dividido em dez situações (vide [8]), as quais são:

1. **Três pontos distintos:**

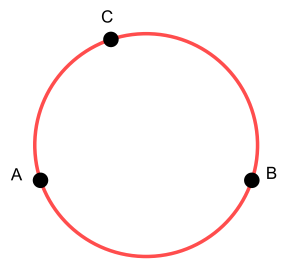


Figura 43: Três pontos não colineares.

2. **Três retas distintas:**

(i) Concorrentes duas a duas em pontos distintos:

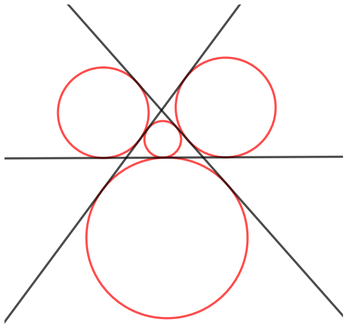


Figura 44: Três retas concorrentes duas a duas.

(ii) Duas retas paralelas entre si e concorrentes com uma transversal:

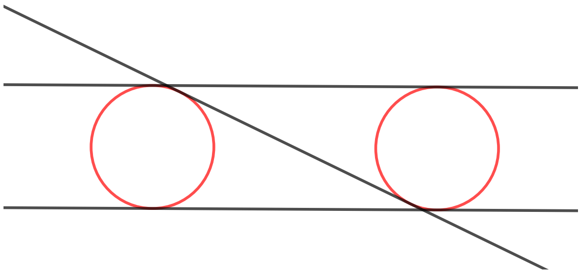


Figura 45: Duas retas paralelas e uma transversal.

3. **Uma reta e dois pontos não pertencentes a essa reta:**

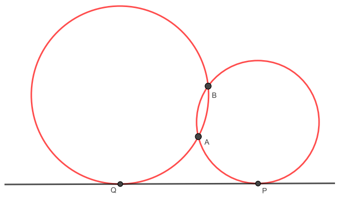


Figura 46: Uma reta e dois pontos fora dela.

4. **Duas retas e um ponto fora das duas:**

(i) As retas são paralelas com o ponto interno:

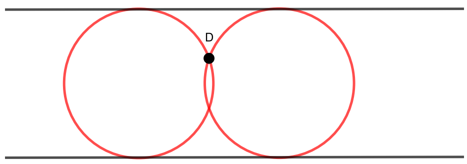


Figura 47: Duas retas paralelas e um ponto interno.

(ii) As retas são concorrentes com o ponto interno:

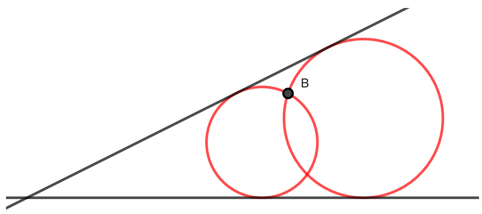


Figura 48: Duas retas concorrentes e um ponto.

5. **Uma circunferência e dois pontos não pertencentes a ela:**

(i) Os dois pontos são externos à circunferência:

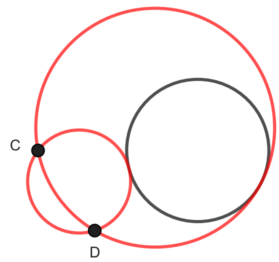


Figura 49: Dois pontos externos a circunferência.

(ii) Os dois pontos são internos à circunferência:

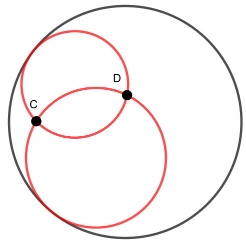


Figura 50: Dois pontos internos a circunferência.

6. **Duas circunferências e um ponto:**

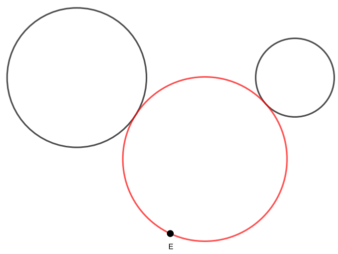


Figura 51: Duas circunferências e um ponto.

7. **Duas retas e uma circunferência:**

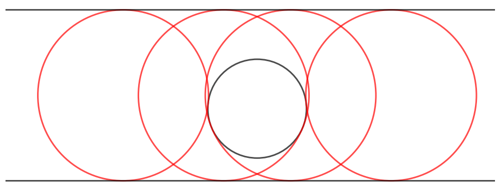


Figura 52: Duas retas e uma circunferência.

8. **Duas circunferências e uma reta:**

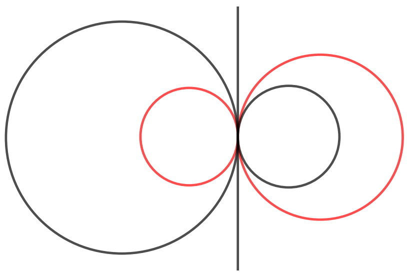


Figura 53: Duas circunferências e uma reta.

9. **Um ponto, uma reta e uma circunferência:**

(i) Uma reta, uma circunferência e um ponto pertencente à circunferência:

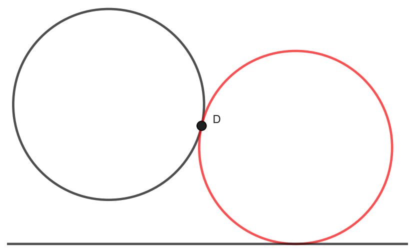


Figura 54: Um poto, uma reta e uma circunferência.

(ii) Uma reta, uma circunferência e um ponto não pertencente as duas:

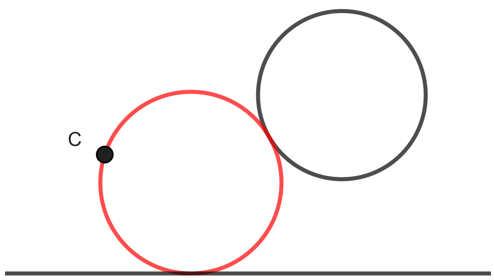


Figura 55: Um ponto, uma reta e uma circunferência.

10. **Três circunferências:**

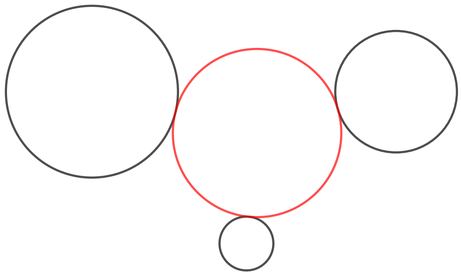


Figura 56: Três circunferências.

5.3 Construção das soluções apresentadas

Veremos o passo a passo como podemos construir cada uma das soluções parentadas.

1. **Três pontos distintos:**

   Dados três pontos A, B e C distintos e não colineares, existe uma única circunferência que perpassa por eles. Para determinar a circunferência que passa por estes três pontos distintos, devemos seguir os passos:

   - Trace os segmentos AC e BC.
   - Trace a mediatriz desses dois segmentos.
   - Encontre o ponto D formado pela interseção das mediatrizes.
   - O ponto D determinado pela interseção das mediatrizes é o centro da circunferência desejada, como podemos ver na Figura 57.

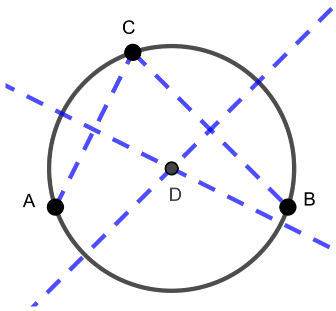


Figura 57: Três pontos não colineares.

2. **Três retas distintas:**

   Quando temos três retas distintas, vamos analisar os casos em que as retas são concorrentes duas a duas em pontos distintos e o caso em que temos duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

(i) Concorrentes duas a duas em pontos distintos:

- Se três retas são concorrentes duas a duas em pontos distintos, então elas formam um triângulo ABC, conforme a Figura 58.
- O ponto D de encontro das bissetrizes dos ângulos internos desse triângulo representa o centro da circunferência que é tangente aos seus lados, ou seja, as três retas dadas.
- Traçando um segmento passando por D e perpendicular a AC, determinamos o raio da circunferência.
- Em seguida, traçamos as bissetrizes externas do pontos A, B e C.
- Com as interseções das bissetrizes externas, determinamos os pontos F, G e H.
- Esses pontos representam os centros de três circunferências que também são tangentes às retas inicialmente dadas.
- Os raios dessas respectivas circunferências são determinados pela construção de um segmento passando pelos seus respectivos centros e perpendiculares a uma das retas.
- Portanto, neste caso podemos visualizar quatros soluções.

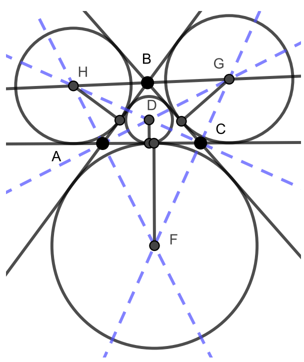


Figura 58: Três retas concorrentes duas a duas.

(ii) Duas retas paralelas entre si e concorrentes com uma transversal:

Quando duas retas são paralelas e cortadas por uma transversal a solução é mais simples.

- Marcamos o ponto médio, M, do segmento AB.
- Por M, traçamos uma reta auxiliar paralela as outras duas retas paralelas.
- Trace as bissetrizes dos ângulos internos A e B.
- A interseção das bissetrizes dos ângulos A e B com a reta auxiliar, determinam respectivamente os centros D e E das circunferências que são tangentes as três retas.
- Para determinar o raio das circunferências, traçamos duas retas auxiliares perpendiculares as paralelas e passando por D e E.
- Como mostra a Figura 59, temos duas soluções distintas.

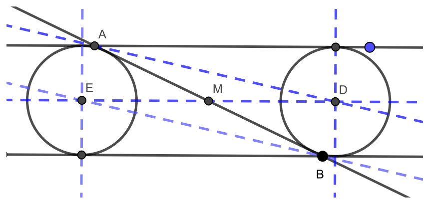


Figura 59: Duas retas paralelas e uma transversal.

3. **Uma reta e dois pontos não pertencentes a essa reta:**

   Para uma reta e dois pontos que não pertencem a ela, vamos mostrar o caso em que os dois pontos pertencem ao mesmo semiplano determinado pela reta.

   Sejam A e B dois pontos que pertencem ao mesmo semiplano em relação a uma reta dada. Para encontrar a circunferência que passa por A e B e é tangente à reta daremos os seguintes passos.

   - Trace uma reta auxiliar passando por A e B e marque o ponto M que representa a interseção das duas retas.
   - O ponto médio do segmento AB representa o centro de uma circunferência auxiliar que passa por A e B.
   - Do ponto M trace as retas tangentes a referida circunferência nos pontos G e H.
   - Em seguida trace uma nova circunferência auxiliar com centro em M e passando por G e H.
   - Neste caso ficam determinados os pontos P e Q na reta dada.
   - Como vimos anteriormente, por três pontos distintos podemos traçar uma circunferência que passa por eles. Portanto, podemos construir uma circunferência passando por P, A e B e outra passando por Q, A e B. Como visualizamos na Figura 60, podemos construir duas circunferências como solução.

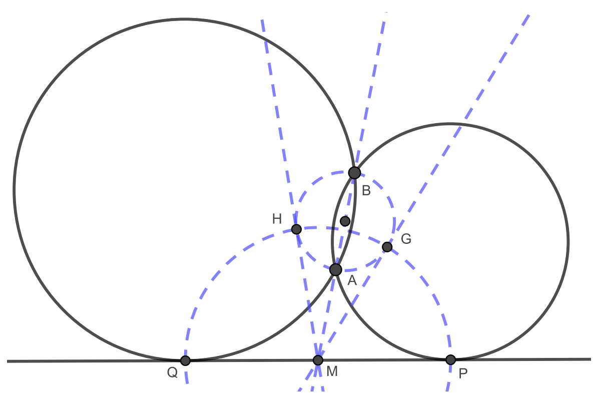


Figura 60: Dois pontos e uma reta.

4. **Duas retas e um ponto fora das duas:**

Perceba que, quando temos duas retas e um ponto, teremos solução apenas quando as retas forem paralelas e o ponto interno e quando as retas forem concorrentes com o ponto entre elas.

(i) As retas são paralelas com o ponto interno:

- São dadas duas retas paralelas e um ponto D interno as mesmas.
- Vamos construir uma circunferência tangente as retas passando por D.
- Trace um segmento AE qualquer perpendicular as retas paralelas.
- Em seguida determine a mediatriz desse segmento. Com centro em D e raio igual ao comprimento do segmento AF.
- Construa uma circunferência auxiliar e então marque os pontos G e H na interseção com a mediatriz traçada.
- Os pontos G e H representam os respectivos centros das circunferências que passam por D e são tangentes as retas dadas. Veja a Figura 61.

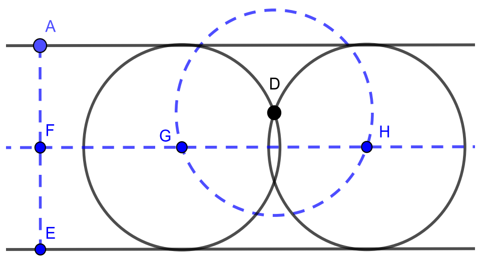


Figura 61: Duas retas paralelas e um ponto interno.

(ii) As retas são concorrentes com o ponto interno:

- Dadas duas retas concorrentes em um ponto A e um ponto B interno às duas retas.
- Existem duas circunferências que passam por B e são tangentes às duas retas dadas. Os centros dessas circunferências estão sobre a bissetriz do ângulo A.
- Por isso, trace a bissetriz de A.
- Por B trace uma reta auxiliar perpendicular a bissetriz de A.

- Seja o ponto de interseção da perpendicular com a bissetriz o centro de uma circunferência auxiliar que passa por B.
- Observe que B_1 é simétrico a B em relação a Bissetriz.
- Seguindo os passos da construção anterior podemos determinar os pontos P e Q.
- Assim, as circunferências que satisfazem o problema são as que passam por P, B e B_1 e B, B_1 e Q respectivamente, como mostra a Figura 62.

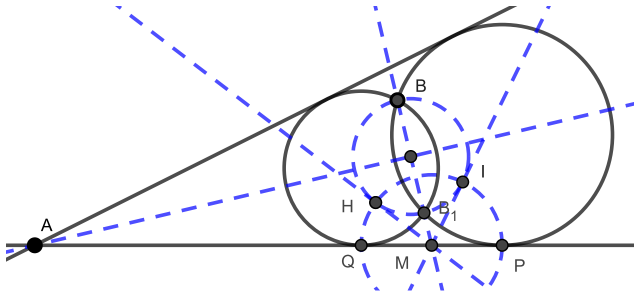


Figura 62: Duas retas concorrentes e um ponto.

5. **Uma circunferência e dois pontos não pertencentes a ela:**

   Veja que, quando temos dois pontos e uma circunferência, a solução será apenas nas condições em que os pontos são ambos internos ou ambos externos a circunferência.

(i) Os dois pontos são externos à circunferência:

- Sejam C e D, dois pontos externos a circunferência de centro A dada.
- Para determinar a solução deste problema devemos inicialmente traçar uma reta que passa por C e D.
- Depois trace a mediatriz do segmento CD. Os centros das circunferências que desejamos encontrar vão estar sobre a mediatriz.
- Com o centro sobre a mediatriz, trace uma circunferência auxiliar secante à circunferência dada.
- Pelos pontos de interseção das duas circunferências, trace uma reta concorrente no ponto I com a reta que contém o segmento CD.
- Do ponto I trace as tangentes a circunferência dada nos pontos J e K.

- Por K trace uma reta que contém o ponto A (centro da circunferência dada) e é concorrente a mediatriz de CD no ponto L.
- Por J trace uma reta que contém A e concorre com a mediatriz de CD no ponto M.
- Os pontos L e M são os centros das circunferências que passam pelos pontos C e D e é tangente a circunferência de centro A, como na Figura 63.

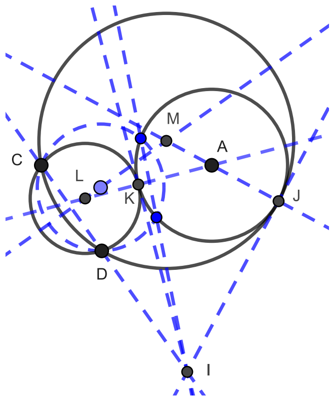


Figura 63: Dois pontos externos a uma circunferência.

(ii) Os dois pontos são internos à circunferência:

Sejam C e D, dois pontos internos a uma circunferência de centro A dada. Para construir uma circunferência passando pelos pontos C e D e tangente a circunferência de centro A, devemos seguir os seguintes passos:

- Trace uma reta que contém os pontos C e D.
- Trace a mediatriz do segmento CD.
- Por um ponto qualquer na mediatriz, construa uma circunferência secante a circunferência de centro A.
- Trace uma reta passando pelos pontos de interseção das duas circunferências e concorrente a reta que contém o segmento CD em H.
- Por H trace duas retas tangentes a circunferência de centro A, encontrando assim os pontos I e J.
- De I trace uma reta que contém A e intercepta a mediatriz de CD em L.
- Por J trace uma reta que contém A e intercepte a mediatriz de CD em K.

- Os pontos L e K representam os centros das circunferências que queremos encontrar.

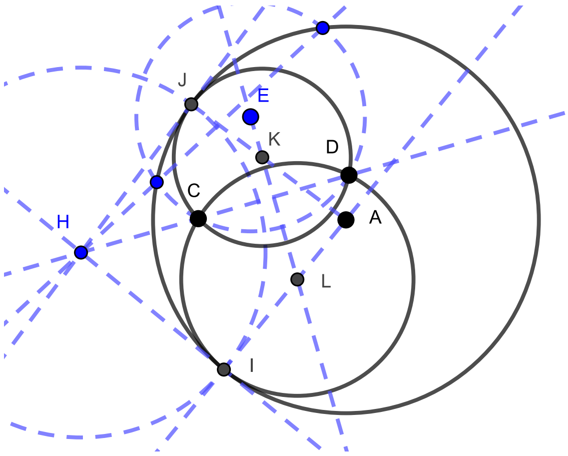


Figura 64: Dois pontos internos a uma circunferência.

6. **Duas circunferências e um ponto:**

Para determinar uma solução neste caso, é importante primeiro encontrar o centro de homotetia entre duas circunferências. Aqui faremos apenas o caso em que temos duas circunferências distintas e um ponto externo a ambas.

Uma vez conhecendo a construção do centro de homotetia, então seguiremos para o desenvolvimento da solução.

Vejamos a construção de uma circunferência que é tangente a duas circunferências de centros A e C e passa por um ponto E fora delas.

- Trace uma reta que passa pelos centros A e C das duas circunferências.
- Encontre os pontos I e J na interseção da reta com as respectivas circunferências, de modo que os pontos I e J estejam entre os pontos A e C.
- Trace uma circunferência auxiliar que passa pelos pontos I, J e E.
- Encontre o ponto G, que representa o centro de homotetia direta das circunferências dadas.
- Trace uma reta auxiliar que liga o ponto G ao ponto E.
- Encontre o ponto M que está na interseção da circunferência que contém os pontos I, J, E e a reta quem contém os pontos G e E.

- Trace a mediatriz do segmento ME.
- Trace uma nova circunferência auxiliar que contém os pontos M e E e intersecta a circunferência de centro A, formando os pontos P e Q.
- Trace uma reta passando por P e Q e encontre o ponto R com a reta que contém o segmento ME.
- Do ponto R trace uma reta tangente a circunferência de centro A e marque o ponto S.
- Trance uma reta que passa por A e R e intersecta a mediatriz de ME no ponto T.
- Com centro em T trace a circunferência que passa por E e é tangente as circunferências de centro A e C simultaneamente. Assim, podemos ver na Figura 65.

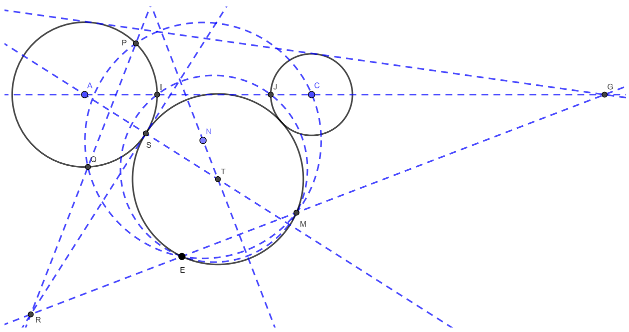


Figura 65: Duas circunferências e um ponto.

7. **Duas retas e uma circunferência:**

   Uma das possibilidades pra essa solução é quando as duas retas são paralelas e a circunferência de centro A dada está contida na região interna das retas.
   Como encontrar essa solução?

   - Trace uma reta que contém o segmento EF perpendicular às retas paralelas.
   - Trace a mediatriz do segmento EF.
   - Com centro em A, trace uma circunferência de raio igual a soma do segmento FI com o raio da circunferência de centro A.
   - Os pontos J e K são respectivamente as interseções da circunferência com a mediatriz.

- Com centro em J e depois em K, trace duas circunferências com raios iguais ao segmento FI.
- Essas circunferências são simultaneamente tangentes às retas paralelas e à circunferência de centro A.
- Repetindo o processo, agora subtraindo do raio da circunferência de centro A do segmento FI, encontramos mais duas circunferências que satisfazem essa solução.

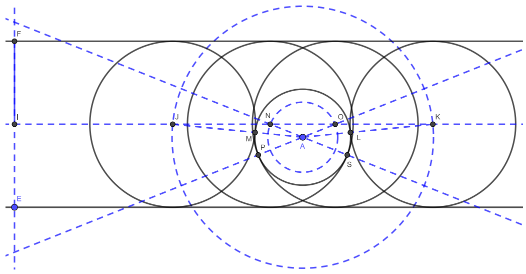


Figura 66: Duas retas e uma circunferência.

8. **Duas circunferências e uma reta:**

   Vamos mostrar o caso em que temos duas circunferências tangentes a uma reta comum.

   - São dadas duas circunferências de centros E e F respectivamente tangentes em A.
   - Seja r uma reta comum as duas circunferências e tangentes a ambas em A.
   - A reta que passa pelos centros das circunferências dadas também passa pelo ponto A.
   - Marque o ponto D na reta que contém os centros das circunferências dadas.
   - Com raio igual ao comprimento do segmento AD, traçamos uma circunferência tangente as circunferências de centros E e F e a reta r.
   - Repetido os passos com o ponto C encontramos uma nova circunferência nas mesmas condições. Assim podemos construir infinitas circunferências, conforme a Figura 67.

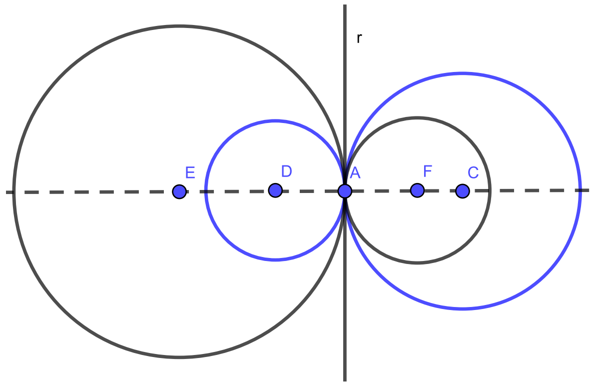


Figura 67: Duas circunferências e uma reta.

9. **Um ponto, uma reta e uma circunferência:**

   Para este caso, vamos analisar duas possibilidades; a primeira possibilidade é quando temos uma reta, uma circunferência e um ponto pertencente à circunferência, a segunda possibilidade é quando o ponto não pertence à circunferência nem à reta dada.

(i) Uma reta, uma circunferência e um ponto pertencente à circunferência:

   Dada uma circunferência de centro C, um ponto D pertencente a mesma e uma reta f externa a esta circunferência.

   - Trace por C uma reta auxiliar perpendicular a reta dada.
   - Encontre o ponto F de interseção da reta auxiliar com a circunferência, como mostra Figura 68.
   - De F trace uma outra reta auxiliar passando pelo ponto D.
   - Encontre o ponto G de interseção da reta auxiliar com a reta dada.
   - Do ponto G trace uma reta perpendicular a reta dada.
   - Trace uma nova reta auxiliar que contém os pontos C e D.
   - O ponto H que representa a interseção das duas retas auxiliares representa o centro da circunferência tangente a reta f, a circunferência de centro C e passa pelo ponto D.

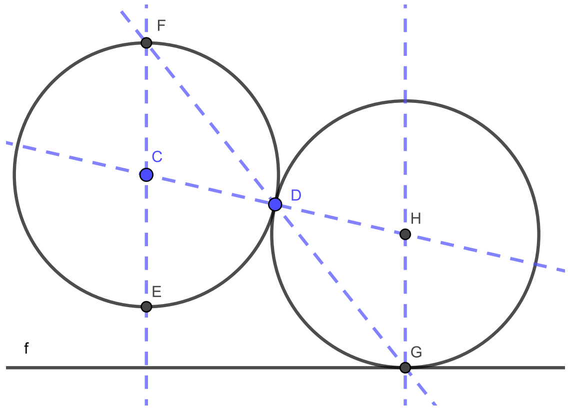


Figura 68: Um ponto, uma reta e uma circunferência.

(ii) Uma reta, uma circunferência e um ponto não pertencente as duas:

Dada uma circunferência de centro D, um ponto C e uma reta f, tais que C não pertence a reta f nem a circunferência dada e f é externa a esta circunferência. Para traçar uma nova circunferência tangentes a circunferência e à reta dada respectivamente e passando pelo ponto C, seguiremos os passos abaixo:

- Trace pelo ponto D uma reta auxiliar perpendicular a reta f em J.
- Encontre os pontos G e F de interseção da reta auxiliar com a circunferência.
- Do ponto G, trace uma nova reta auxiliar passando por C e encontrando f em M.
- Construa uma circunferência auxiliar passando pelos pontos J, F e C.
- Seja L o ponto de interseção do segmento MG com a circunferência auxiliar.
- Observe que com os pontos C e L e a reta f e seguindo os passos descritos na construção de uma circunferência que passa por dois pontos e é tangente a uma reta, encontramos a circunferência que passa por C e é tangente a reta f e a circunferência de centro D simultaneamente, como podemos ver na Figura 69.

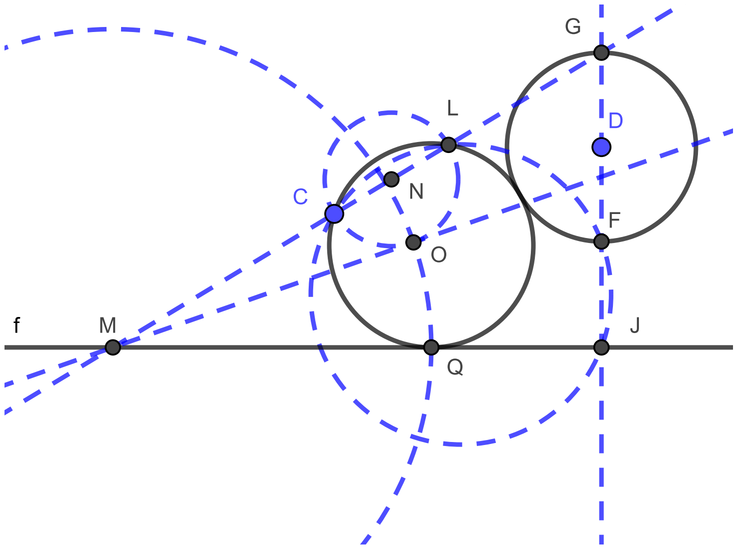


Figura 69: Um ponto, uma reta e uma circunferência.

10. **Três circunferências:**

    Dadas três circunferências distintas e externas entre elas. Uma solução pra esse caso podemos ter por reduzir as três circunferências ao caso em que temos duas circunferências e um ponto.

    - Sejam f, j e h, com $f > h > j$, os raios da circunferências de centros A, C e E, respectivamente.
    - Com centro em A, construa uma circunferência auxiliar de raio $f - j$.
    - Com centro em C, trace outra circunferência auxiliar com raio $h - j$.
    - Assim, temos duas circunferências auxiliares de centros A e C e um ponto E.
    - Seguindo os passos para a construção de uma circunferência que contém um ponto e é tangente a duas circunferências, encontramos a circunferência de centro U, que passa por E e é tangente as circunferências auxiliares de centro A e C.
    - Seja i o raio da circunferência de centro U.
    - Ainda com centro em U trace uma circunferência de raio $i - j$.
    - A circunferência de centro em U e raio $i - j$ é a circunferência tangente as três circunferências de centro em A, C e E simultaneamente, como mostra a Figura 70

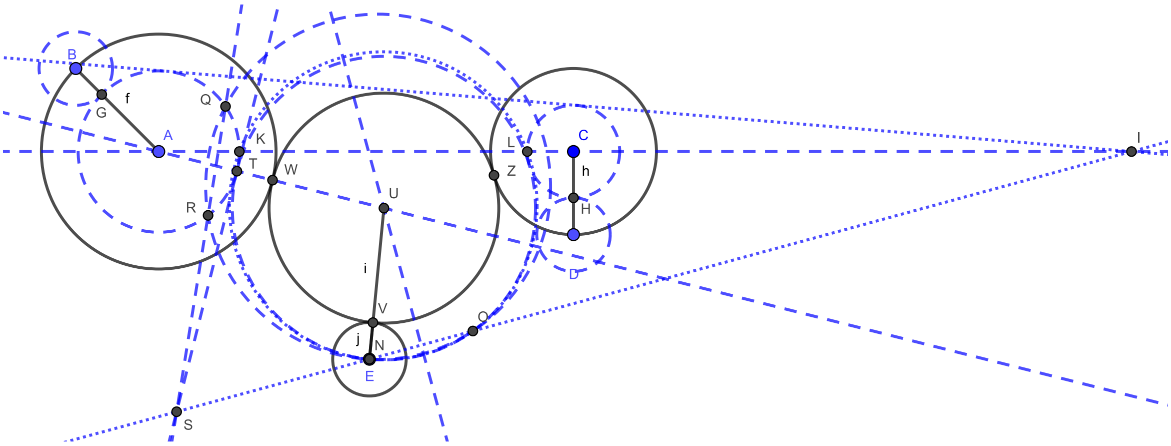


Figura 70: Três circunferências.

6 Considerações Finais

De uma forma geral este estudo teve como objetivo demonstrar que dado um problema existem diversas formas diferentes de chegar à sua solução, e que é interessante permitir que o aluno entre em contato com essas estratégias. Mais que isso, é primordial que aos alunos sejam possibilitadas experiências diversas de contato com o conteúdo para que estes possam amadurecer as ideias matemáticas e tenham sua capacidade de raciocínio estimulada.

Este trabalho abordou especificamente o estudo da circunferência, pois percebemos que além da forma analítica, que é a mais tradicional, excelentes resultados podem ser obtidos também com a construção geométrica, que por sua vez é pouco abordada no Ensino Básico.

Conforme observado, o assunto de tangência de circunferências por si só é complexo e podemos notar a ausência de uma abordagem mais completa na maioria dos materiais didáticos utilizados no Ensino Básico. Diante de tais obstáculos, o professor, por vezes precisará reorganizar seu planejamento didático com o intuito de suprir a carência das obras utilizadas. Com o objetivo de ajudar o professor nessa tarefa, apresentamos neste texto uma sequência de problemas, conhecidos como Problemas de Apolônio, que acreditamos ser uma boa oportunidade para o professor estimular no aluno a percepção geométrica envolvendo os problemas de tangência.

Referências

[1] Boyer, C.B., ***História da Matemática*** : trad. Gomide, E.F, São Paulo: Edgard Blucher, 1974

[2] Dante, L.R., ***Matemática: contexto e aplicações*** : 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[3] Gelson, I., ***Matemática: ciência e aplicações*** : 2. ed. São Paulo: Atual, 2004

[4] Giongo, A.R., ***Curso de Desenho Geométrico*** : Juiz de Fora - MG, Livraria Nobel, 1977.

[5] Giovanni, J.R. e Bonjorno, J.R., ***Matemática completa***: 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

[6] Martins, F. L., ***Conexões com a Matemática*** : 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016

[7] MEC, Ministério da Educação. ***Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*** . Brasília: MEC/SEF, 1998.

[8] Ortega, I. e Ortega, T., ***Los diez problemas de Apolonio***: 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

[9] Paiva, M., ***Matemática - Paiva*** / Manoel Paiva - 1. ed - São Paulo: Moderna, 2009.

[10] Wagner, E., ***Construções Geométricas*** : 6ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.