UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ALINE RODRIGUES PEREIRA RIBEIRO

ESTUDO DE CASO: REVISANDO A MATEMÁTICA BÁSICA NO ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE
2019

ALINE RODRIGUES PEREIRA RIBEIRO

ESTUDO DE CASO: REVISANDO A MATEMÁTICA BÁSICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Profª. Drª. Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE
2019

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Estudo de Caso: Revisando a Matemática Básica no Ensino Médio

ALINE RODRIGUES PEREIRA RIBEIRO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 11 de julho de 2019.

Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Prof.ª Dr.ª Maria Silvana Alcântara Costa
Orientadora

Francisco Pereira Chaves

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves
UFCA

Valdir Ferreira de Paula Junior

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior
UFCA

Aos meus pais, a vocês dedico este trabalho, reflexo de quem me tornei.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ser uma fonte de luz e fortalecer minha fé para poder realizar este sonho.

Ao meu esposo Júlio César Segundo pelo carinho incondicional e que a todo momento acreditou no meu potencial.

Aos meus irmãos pelo amor e pela compreensão das ausências.

Ao meu tio Mariano que me apoiou nesta jornada.

Aos meus sogros que sempre me incentivaram.

Ao mestre Mário de Assis Oliveira, um professor ímpar, minha grande inspiração.

Aos grandes professores que me encorajaram a chegar aqui.

Aos colegas de mestrado que ajudaram a tornar essa caminhada possível. Em especial a Augusto, João Paulo, Wilton, Gilson e Leilyanne.

Agradeço também à professora Drª. Silvana Alcântara, pelo apoio, pela orientação e por quem eu tenho uma grande admiração.

Aos professores do programa, em especial ao Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.

À Sociedade Brasileira de Matemática e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada pela dedicação em aprimorar o docente em sua formação profissional.

Por fim, agradeço aos que não foram citados, mas que de alguma forma me ajudaram nessa trajetória.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota".
(Madre Teresa de Calcuta)

RESUMO

Dados atuais mostram a real situação brasileira na Educação de uma maneira geral e, em especial, no Ensino da Matemática. As avaliações nacionais e internacionais realizadas ressaltam as dificuldades dos estudantes em conteúdos básicos de Matemática. Diante deste cenário e visando contribuir com o Ensino de Matemática, neste trabalho, apresentamos um curso de fundamentação Matemática realizado em uma Escola Pública na cidade de Juazeiro do Norte. Sob uma ótica diferenciada e embasada na sequência do matemático húngaro George Polya, o curso foi desenvolvido em 20 aulas, onde abordamos conteúdos básicos da Matemática do Ensino Fundamental, com o intuito de proporcionar ao aluno, além de uma revisão, consolidação em sua formação Matemática.

Palavras-chave: Matemática Básica. Curso de Fundamentação. Sequência de Polya.

ABSTRACT

Current data show the real Brazilian situation in Education in general and, in particular, in Mathematics Teaching. The national and international assessments carried out highlight the students' difficulties in basic math content. Given this scenario and aiming to contribute to the Teaching of Mathematics, in this work, we present a Mathematics foundation course held in a Public School in the city of Juazeiro do Norte. From a different perspective and based on the Hungarian mathematician George Polya, the course was developed in 20 classes, where we covered basic contents of Elementary School Mathematics, in order to provide the student, in addition to a review, consolidation in their mathematical education.

Keywords: Basic Mathematics. Foundation course. Sequence of Polya

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma das áreas do conhecimento mais antigas e um instrumento que proporciona formas de resolver problemas, tendo um papel de destaque na vida das pessoas, desde situações simples como a de um cobrador de ônibus, ao fornecer o troco ao passageiro, até as mais complexas como a de um físico nuclear estudando o núcleo atômico para entender o fenômeno da radioatividade. Tais situações mostram que a Matemática permite figurar de maneira eficaz muitos aspectos do mundo real, criando estruturas que têm propriedades e atributos semelhantes aos fatos que representam.

Apesar dessa importância e mesmo os discentes tendo contato com a Matemática desde o início da vida estudantil, dados do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA) e do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), constantes no Capítulo 02 deste trabalho, mostram um baixo rendimento destes na disciplina, durante o Ensino Médio.

Diante desta realidade e com o intuito de contribuir com a Educação Básica, no Capítulo 03, apresentamos um Curso de Fundamentação proposto para alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Pública de Juazeiro do Norte, Ceará. Neste capítulo abordamos todas as aulas ministradas. O primeiro momento, onde verificamos, através de uma sondagem, o nível de conhecimento dos alunos nos conteúdos a serem ministrados; o desenvolvimento do curso, onde proporcionamos aos participantes um estudo dos principais conteúdos da Matemática Básica, até o último encontro, onde aplicamos novamente a sondagem. Concluímos o capítulo com a análise dos dados obtidos.

As aulas foram ministradas, através de uma ótica diferenciada, baseada nas propostas do matemático húngaro George Polya, descritas em seu livro "A arte de resolver problemas", onde ele descreve etapas práticas para a resolução de problemas em Matemática.

É importante ressaltar que o curso foi autorizado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Faculdade de Medicina do Cariri (CEP/MEDCARIRI/UFCA) e a documentação, bem como a sondagem aplicada no início e no término do curso e as questões trabalhadas em sala encontram-se nos Anexos deste trabalho.

2 AVALIAÇÕES NO BRASIL: PISA E SAEB

O interesse em estudar o nível de conhecimento em Matemática Básica dos alunos do Ensino Médio surgiu após levantamento de dados do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA). O PISA é uma avaliação aplicada de forma amostral à estudantes na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término do Ensino Fundamental. As avaliações do PISA acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento: Leitura, Matemática e Ciências. O objetivo desse programa é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes.

Destacando o desempenho em Matemática, o Brasil está em uma posição desfavorável em relação ao ranking mundial, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1: Desempenho em Matemática.

Ano	Pontuação	Colocação	Países participantes
2000	334	31°	32
2003	356	40°	41
2006	370	52°	57
2009	386	57°	61
2012	391	58°	65
2015	377	65°	70

Fonte: INEP.

Em 2000, ano da primeira edição da avaliação, 32 países participaram. O resultado do Brasil em Matemática foi o 31º, ou seja, penúltimo lugar. No ano de 2003, 41 países participaram e a colocação brasileira se manteve em penúltimo. A próxima avaliação acontece em 2006, com 57 países participando. Houve uma pequena melhora na pontuação brasileira, porém ainda continuava entre as últimas colocações. No ano de 2009, foram 61 países participantes e em 2012, 65 países. A pontuação brasileira aumentou em relação aos anos anteriores, mas ainda se manteve entre as últimas. No ano de 2015, com 70 países participantes, o Brasil obteve 377 pontos, ficando na 65º posição e foi a primeira vez em que diminuiu sua pontuação na avaliação de Matemática. Percebemos também, desde sua primeira participação, uma evolução no desempenho brasileiro, mas não o suficiente para melhorar sua classificação.

Na Tabela 2, a seguir, apresentamos a pontuação do Brasil, no ano de 2015, e as pontuações dos países que estão nas primeiras colocações. Observa-se a diferença de 187 pontos entre Cingapura, que está na 1º colocação com 564 pontos, e o Brasil, na 65º posição com 377 pontos.

Tabela 2: Desempenho em Matemática no ano de 2015.

País	Colocação	Pontuação
Cingapura	1°	564
Hong Kong (China)	2°	548
Macau (China)	3°	544
Taiwan (China)	4°	542
Japão	5°	532
BSJG (China)	6°	531
Coreia do Sul	7°	524
Suíça	8°	521
Estônia	9°	520
Canadá	10°	516
...	...	...
Brasil	65°	377

Fonte: INEP.

No processo avaliativo, os resultados dos estudantes são distribuídos em uma escala de seis níveis de proficiência (1, 2, 3, 4, 5 e 6). De acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o nível mínimo esperado é o nível 2. Essa colocação brasileira é resultado de 70% dos participantes estarem abaixo do nível desejado.

A cada edição, o caderno de teste é formado por uma unidade temática, ou seja, mesmo avaliando o conhecimento em Leitura, Matemática e Ciências, apenas uma dessas áreas recebe uma maior atenção. De acordo com os dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), em 2000 e 2009 o foco foi em Leitura, nos anos de 2003 e 2012, em Matemática, e 2006 e 2015 em Ciências.

As provas têm duração de até duas horas e as questões podem ser de múltipla escolha ou dissertativas. O PISA utiliza a Teoria de Resposta ao Item (TRI) na análise dos dados da avaliação. A TRI difere da Teoria Clássica de Medidas, que consiste em atribuir notas a partir do número de acertos, descontados os erros. A TRI não depende só do número de acertos, mas também do nível de dificuldade das questões que o aluno acertou e também dquelass que errou. Além das questões, os discentes respondem um questionário com detalhes sobre sua vida na escola e em família.

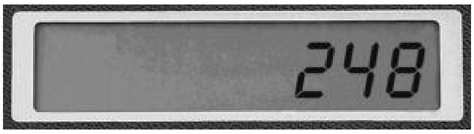
Em 2018, cerca de 13 mil estudantes brasileiros foram avaliados pelo Programa. A divulgação do resultado da prova aplicada em 2018 só acontecerá no segundo semestre de 2019.

Para o ex-ministro da Educação, José Mendonça Filho: “nos últimos 12 anos, o acesso ao ensino melhorou, mas não evoluímos em qualidade”. O que nos leva a questionar:

será que este estudante está realmente entendendo e aprendendo os conteúdos ministrados no Ensino Fundamental já que esta prova engloba os principais assuntos desta etapa?

Vejamos uma questão da prova aplicada em 2012:
(PISA -2012) TOCADORES DE MP3

Olívia somou o preço do tocador de MP3, do fone de ouvido e dos alto-falantes com a ajuda de sua calculadora. Ela obteve o resultado de 248.



O resultado obtido por Olívia está errado. Qual dos seguintes erros ela cometeu?

a) Ela somou um dos preços duas vezes.

b) Ela se esqueceu de contar um dos três preços.

c) Ela omitiu o último número de um dos preços.

d) Ela subtraiu um dos preços em vez de somar.

Observe que esta questão envolve apenas as operações básicas.

Ressaltamos que os resultados das avaliações do PISA serviram como base para propostas de melhoria na educação brasileira. Podemos citar a criação, em 2007, do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). O IDEB é um indicador educacional que relaciona as informações de rendimento escolar (aprovação, reprovação ou desistência) e desempenho (proficiências) em um exame padronizado.

O IDEB tem como objetivo a verificação do cumprimento das metas fixadas no Termo de Adesão ao Compromisso Todos pela Educação, eixo do Plano de Desenvolvimento da Educação, do Ministério da Educação, que trata da Educação Básica. A meta desejada é 6,0 e deverá ser cumprida até 2021. Esse valor 6,0 foi resultado da compatibilização entre a distribuição das proficiências observadas no PISA e no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

O SAEB, assim como o PISA, é um processo de avaliação amostral. Os testes e questionários aplicados têm por objetivo verificar o domínio dos estudantes do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio, em Língua Portuguesa e Matemática. As avaliações são realizadas a cada dois anos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP). Os testes aplicados são compostos por itens de múltipla escolha e são elaborados pelos professores das séries e disciplinas avaliadas. O questionário coleta informações sobre o contexto social, econômico e cultural do estudante. Assim, buscam relacionar os efeitos destes ao desempenho do discente na avaliação.

O SAEB oferece, portanto, dados para a elaboração e o aperfeiçoamento de políticas educacionais, permitindo ainda que o governo avalie a qualidade da educação.

Ressaltamos, no gráfico da Figura 1, os resultados da avaliação do SAEB, aplicada em 2017:

Figura 1: Nível de proficiência em Matemática.

Fonte: INEP.

Assim como o PISA, um resultado alarmante. O ex-reitor da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Mozart Neves Ramos, em entrevista ao G1 Educação, afirma que, de acordo com esses dados, o Brasil está aumentando a escolaridade, mas sem aprendizagem.

Conteúdos do Ensino Fundamental são conhecimentos necessários para um melhor desempenho no Ensino Médio, porém essa "bagagem" matemática nem sempre é trazida pelo estudante. E essa é uma realidade vista também em todo o Ceará. Segundo a manchete do Diário do Nordeste [11 agosto 2018], com o texto: "Elevar nível de aprendizagem matemática desafia Ceará":

> O Movimento Todos Pela Educação aponta que, em média, apenas dez em cada grupo de 100 alunos das escolas públicas aprendem o esperado para a disciplina em cada série concluída. [...] a maioria termina o Ensino Médio

> e não consegue resolver nem uma equação simples de 2º grau ou problema que envolva percentual. Na visão de especialistas, como o professor titular do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC) e cientista-Chefe do Estado em Educação Básica (Funcap/Seduc), Jorge Lira, as dificuldades no Ensino Médio remontam, de fato, ao Ensino Fundamental II, do sexto ao nono anos.

Com a experiência em sala de aula, é comum ouvirmos de alguns alunos que não aprenderam a base da Matemática, pois não gostaram do conteúdo ou não se sentem motivados em continuar estudando se estão obtendo notas insatisfatórias nas avaliações propostas pelos seus professores, ou ainda por não ver aplicação dos conteúdos no dia a dia. Soares (2002: 1) observa

> [...] que um número muito grande de alunos do Ensino Médio e Superior afirma que até determinado momento de sua escolarização não tinha a menor dificuldade na disciplina Matemática, relatando muitas vezes se tratar da matéria escolar da sua preferência. Por outro lado, também é fato que, no decorrer da sua caminhada escolar, esse prazer, para muitos alunos, vai se transformando em desprazer e torna-se um obstáculo para a aprendizagem.

Uma pergunta natural é o que podemos fazer para mudar essa realidade?

3 UM CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA NO ENSINO MÉDIO

A proposta de um curso de Fundamentação Matemática foi feita a uma Escola Pública de Ensino Médio de Juazeiro do Norte, Ceará. Devidamente autorizado pela direção do colégio, que assinou o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexo A.2), o curso foi realizado duas vezes por semana, com duração de duas horas cada aula, totalizando 20 horas. Foram estudados conteúdos dos 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, os quais estão apresentados na Tabela 3 a seguir.

Tabela 3: Conteúdos.

Assunto 1	Conjuntos dos números reais, operações matemáticas
Assunto 2	Razão, proporção, regra de três
Assunto 3	Porcentagem
Assunto 4	Produtos notáveis e fatoração
Assunto 5	Potenciação e radiciação
Assunto 6	Equação do 1º grau e resolução de problemas
Assunto 7	Reconhecimento de figuras planas e espaciais

Inicialmente, para seleção dos participantes do curso, foi realizada uma avaliação com três turmas do 1º ano do Ensino Médio, cada uma contendo 45 alunos, e a avaliação era composta por dez questões de múltipla escolha que contemplava os conteúdos citados na Tabela 3, totalizava dez pontos e a qual encontra-se no Anexo A.1 deste trabalho.

No horário das aulas de Matemática dos 1º anos, os professores cederam o seu horário, pela manhã, para aplicarmos a sondagem. A priori, explicamos o motivo e a importância da mesma e informamos que os alunos tinham cinquenta minutos para concluí-la.

Ao término, ainda pela manhã, corrigimos as avaliações. Feita a correção, observamos que nenhum aluno apresentou nota superior a quatro pontos. Então dividimos as notas em grupos: zero, um, dois, três, quatro pontos. Os alunos com as menores notas, seriam os selecionados.

Após o recreio, regressamos às salas e já lançamos o convite para os alunos participarem do curso de Fundamentação em Matemática Básica, que teria início no período da tarde, do mesmo dia. Explanamos como seria o curso: dez encontros com duração de duas horas, com início às 14 horas e término às 16 horas, nas terças-feiras e quintas-feiras. Os alunos também foram orientados que poderiam aceitar ou recusar o convite. Sem divulgar as notas em público, fomos chamando-os pelo nome. Muitos recusaram, alegando que já faziam um curso extra no horário citado. Outros, citaram a questão da distância da escola às suas residências, que seria difícil sair do colégio perto de meio dia e estar de volta às 14 horas. Outros, não justificaram.

Conseguimos, assim, formar nossa turma com vinte alunos. Os estudantes selecionados, receberam os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido e de Assentimento para Adolescente (Anexo A.2), estes documentos garantem que o aluno, bem como seu responsável, tenham ciência de todas as informações acerca do curso.

Procuramos junto à direção do Colégio, suporte quanto a sala que seriam realizadas as atividades. A direção do Colégio nos cedeu a sala de informática, que no horário das aulas, seria de uso exclusivo para o curso.

Ao iniciarmos os encontros semanais, trabalhamos questões fundamentadas nas propostas do matemático húngaro, George Polya. Em [15], Polya descreve quatro etapas fundamentais para se obter êxito em resolver problemas:

1. Compreensão do problema – compreender o problema até encontrar com precisão a incógnita. Nesta etapa devem identificar-se: o que é conhecido (os dados); o que é desconhecido (o objetivo); as condições apresentadas.

2. Elaboração de um plano – obtém-se um plano quando, de um modo geral, sabemos quais os cálculos para se obter a incógnita.

3. Execução do plano – o plano possibilita um roteiro geral. É necessário examinar todos os detalhes; executar o plano que se elaborou até chegar à solução.

4. Verificação dos resultados – revisão crítica do trabalho realizado, ou seja, verificação do resultado em função da situação inicial e do raciocínio.

Pontes (2007: 6) destaca que:

> “A resolução de problemas é uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Neste processo, os alunos devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospectiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm.”

Durante as aulas, procuramos estimular as estratégias de resolução dos problemas propostos. Aplicamos tarefas e exercícios que incentivavam o aluno a estudar em grupo. Trabalhamos problemas envolvendo interdisciplinaridade, isto é, a Matemática atuando em outras áreas do conhecimento. E assim, buscamos desenvolver no aluno o interesse pela Matemática.

No primeiro encontro, ainda no dia 26 de março, estudamos o conjunto dos números reais e trabalhamos as operações matemáticas. Nesta data, tivemos a presença de dezenove alunos. No início, os alunos apresentaram dificuldades de entender a dinâmica da aula. A mesma, foi dividida em apresentação teórica do conteúdo e a exposição de questões, levando em consideração as etapas propostas por Polya (1995: 24, 25, 26); leitura da questão para compreensão do problema; identificando o conteúdo e as formas de resolução.

No segundo encontro, realizado dia 28 de março, treze alunos compareceram. Na parte inicial da aula, procuramos fundamentar os conceitos estudados na aula anterior e lançamos questões para seriam desenvolvidas através do estudo em equipe.

No dia 02 de abril, iniciamos o estudo sobre razão, proporção e regra de três (simples e composta). Onze alunos participaram. Os alunos que faltaram alegaram, posteriormente, que ainda estavam adequando sua rotina ao curso ou que estavam na véspera de provas e preferiam direcionar seus estudos para as avaliações.

Antes de darmos prosseguimento ao curso, procuramos saber se os alunos que faltaram nas aulas anteriores iriam dar continuidade ou não. Cinco estudantes optaram por desistir. De imediato, buscamos convidar outros discentes, que fizeram a sondagem, para participarem das aulas.

No dia 04 de abril, aconteceu o nosso quarto encontro. Dezessete estudantes estiveram presentes. Começamos a aula, apresentando uma breve revisão dos assuntos estudados anteriormente. Solicitamos que os alunos tentassem resolver a questão 5 do TD Nº 02 (Anexo A.3). Aquele que conseguisse concluí-la corretamente, utilizando a sequência de Polya, ganharia um mimo. Logo em seguida, falamos sobre porcentagem.

Em 09 de abril, estudamos produtos notáveis e fatoração. Nesse momento, recebemos, dos quatorze discentes presentes, muitas perguntas e muitos pedidos para repetir as explicações.

Nossa Aula de Nº 06, realizada no dia 11 de abril, iniciou com uma solicitação direta dos quinze estudantes que compareceram. Que continuássemos exercitando produtos notáveis e fatoração. Somente, na segunda parte da aula, iniciamos o próximo assunto, potenciação.

O nosso encontro seguinte, realizado dia 16 de abril, foi diferente dos outros. Pois o colégio estava em um momento de gincana cultural. A direção nos avisou que nem todos os estudantes estavam participando da gincana e preferiam assistir a aula de fundamentação. Nesse dia, cinco alunos compareceram. Revisamos as principais propriedades de radiciação.

Em 23 de abril, iniciamos os trabalhos falando sobre equações do 1º grau e destacamos vários problemas que envolviam o assunto abordado. Nessa data, dava-se continuidade a gincana cultural. Tivemos, portanto, a presença de nove alunos.

Finalizamos o conteúdo, em 25 de abril, apresentando as principais figuras planas e espaciais. Estavam presentes sete discentes e informamos que a última aula ocorreria em 30 de abril.

A partir desta ideia, na seção seguinte, destacaremos os principais conteúdos que foram abordados durante o curso, os quais foram desevolvidos conforme as aulas ministradas. A linguagem simples apresentada, deve-se ao fato de que o curso é uma fundamentação de Matemática Básica para alunos do Ensino Médio, porém na estrutura do texto permanecemos com o formalismo matemático.

3.1 Abordagem teórica

O texto a seguir foi baseado nas referências [1], [2], [3], [4], [6], [8], [10], [12], [13] e [16].

3.1.1 Conjunto dos números reais e operações matemáticas

Em nosso cotidiano nos deparamos com a presença dos números em diferentes situações, como na contagem, na ordenação, nas medições. A ideia de contagem deu origem aos números naturais, cujo conjunto é denotado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

Giuseppe Peano ($1858 - 1932$), matemático italiano, responsável por uma das maiores contribuições para a teoria dos conjuntos, caracterizou o conjunto dos números naturais através de quatro axiomas, conhecidos como Axiomas de Peano:

1. Dado um número natural n, existe um único número natural $s(n)$, sucessor de n;
2. Dados os números naturais n e m, com $n \neq m$, existem $s(n)$ e $s(m)$, sucessores naturais, respectivamente de n e m, com $s(n) \neq s(m)$;
3. Existe um único número natural 0 (lê-se: zero) que não é sucessor de nenhum natural;
4. Se o número 0 pertence a um conjunto $\mathcal{A}$ e para todo todo $n \in \mathcal{A}$, tem-se que $s(n) \in \mathcal{A}$, então o conjunto $\mathcal{A}$ coincide com o conjunto dos números naturais.

Definimos em $\mathbb{N}$ duas operações: a operação de adição, que a cada par $a, b \in \mathbb{N}$, associa um número natural $a + b \in \mathbb{N}$ e a operação de multiplicação, que a cada par $a, b \in \mathbb{N}$, associa um número natural $a \cdot b \in \mathbb{N}$. As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ atendem as seguintes propriedades:

Dados os números naturais a, b e c, temos:

Propriedade 3.1 (Comutativa)**.**

1. $a + b = b + a$;
2. $a \cdot b = b \cdot a$.

Propriedade 3.2 (Associativa)**.**

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Propriedade 3.3 (Elemento neutro)**.**

1. $a + 0 = 0 + a = a$;
2. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Propriedade 3.4 (Distributiva)**.**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

As operações de adição e multiplicação dos números naturais permite trocar a simbologia $s(n)$, sucessor de um natural, por $(n + 1)$.

O leitor interessado em mais detalhes sobre o conjunto dos números naturais, poderá consultar a referência [10].

De posse dos números naturais, temos o conjunto dos números inteiros, o qual é formado pelos números naturais e seus opostos ou simétricos. O símbolo que representa o conjunto dos números inteiros é $\mathbb{Z}$, pois em alemão a palavra Zahl significa número ou algarismo. Abaixo temos a representação do conjunto dos inteiros e alguns de seus subconjuntos:

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
- Conjunto dos inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
- Conjunto dos inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$;
- Conjunto dos inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
- Conjunto dos inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$;
- Conjunto dos inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$.

Salientamos que as operações de adição e multiplicação estão definidas para os números inteiros e que as Propriedades 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 também são satisfeitas. Acrescentamos:

Propriedade 3.5 (Elemento oposto)**.** Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $b \in \mathbb{Z}$, denotado $b = -a$, tal que

$$a + b = a + (-a) = 0.$$

A partir dos inteiros, podemos definir o conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, devido à palavra quociente. Por definição, temos

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ ; \ a \ \in \ \mathbb{Z} \ \ e \ b \ \in \ \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Observe que se $a \in \mathbb{Z}$, então $a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$. Assim $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Vejamos, por exemplo, o número $5 \in \mathbb{Q}$, pois $5 = \frac{5}{1}$.

As operações de adição e multiplicação estão definidas no conjunto dos números racionais. De tal modo que, se p e q são números racionais, temos:

- $p + q \in \mathbb{Q}$;
- $p \cdot q \in \mathbb{Q}$.

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, a soma e o produto dos números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são obtidos, respectivamente, da seguinte forma:

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ab + bc}{bd}$;
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

Vejamos, por exemplo, os números $p = \frac{2}{7}$ e $q = \frac{1}{4}$. Para somarmos p e q, fazemos:

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 7 \cdot 1}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}.$$

E para multiplicarmos p e q,

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}.$$

As Propriedades 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 permanecem válidas para os números racionais.

Adicionamos a estas as seguintes propriedades:

Propriedade 3.6 (Elemento inverso)**.** Para todo $p \in \mathbb{Q}$, com $p \neq 0$, existe um número $q \in \mathbb{Q}$, denotado $q = \frac{1}{p}$, tal que

$$p \cdot q = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

Propriedade 3.7 (Lei do Corte ou a Lei do Cancelamento)**.**

Dados os números racionais a, b, c e $d \neq 0$, temos:

1. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$;
2. $a \cdot d = b \cdot d \Rightarrow a = b$.

Os números racionais podem ser escritos na forma decimal. Neste texto, os números decimais são números racionais não inteiros expressos por vírgulas e que possuem casas decimais. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. $\frac{3}{2} = 1,5$.

Exemplo 2. $\frac{4}{5} = 0,8$.

Exemplo 3. $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$.

◇

Nos Exemplos 1 e 2, percebemos que a quantidade de algarismo após a vírgula é finita, a eles chmamos de números decimais exatos. No Exemplo 3, o algarismo 3 continuará se repetindo infinitamente. O número decimal $0,333\ldots$ é conhecido como dízima periódica. O algarismo após a vírgula que se repete infinitamente é o 3, este número será chamado de período. As dízimas periódicas ainda podem ser classificadas em simples ou composta. As simples apresentam um período que aparece logo após a vírgula. Nas compostas, há um ou mais algarismos entre a vírgula e o período, como por exemplo os números $0,4333...$ e $3,45777....$

A fração que gera uma uma dízima periódica é chamada de fração geratriz. Observe os exemplos:

Exemplo 4. Determine a fração geratriz da dízima periódica: $x = 0,333....$
Solução: Temos

$$x = 0,333\ldots \tag{3.1}$$

Note que existe um algarismo que se repete infinitamente logo após a vírgula, teremos, portanto, uma dízima periódica simples de período 3. Assim, multiplicamos os dois membros da igualdade por 10, para obtermos:

$$10x = 3,333\ldots \tag{3.2}$$

Subtraímos, membro a membro, a Equação 3.1 da Equação 3.2:

$$\begin{aligned} 10x &= 3,333\ldots \\ \underline{-\ x} &\underline{= 0,333\ldots} \\ 9x &= 3 \\ x &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

◇

Após a resolução do Exemplo 4, sugerimos que os alunos determinassem a fração geratriz da dízima periódica: $x = 0,777....$

O próximo exemplo foi conduzido mediante a sequência de Polya.

Exemplo 5. Determine a fração geratriz da dízima periódica $x = 2,5757....$
Solução:

Etapa 1 - Compreensão do problema: os alunos foram orientados a contar a quantidade de algarismos depois da vírgula que se repetiam:

$$x = 2,575757\ldots \tag{3.3}$$

Etapa 2 - Elaboração de um plano: os estudantes observaram que dois algarismos se repetem infinitamente logo após a vírgula. E que a questão envolve uma dízima periódica simples, com período igual a 57.

Etapa 3 - Execução do plano: como o período é 57, multiplicaram os dois membros da igualdade por 100:

$$100x = 257,575757\ldots \tag{3.4}$$

E subtraíram, membro a membro, a Equação 3.3 da Equação 3.4:

$$\begin{aligned} 100x &= 257,575757\ldots \\ -\ x &= 2,575757\ldots \\ \hline 99x &= 255 \\ x &= \frac{255}{99} = \frac{85}{33}. \end{aligned}$$

Etapa 4 - Verificação dos resultados: depois de simplificar o resultado da etapa anterior, notaram que:

$$x = \frac{255}{99} = \frac{85}{33} = 2,575757\ldots.$$

◇

Exemplo 6. Determine a fração geratriz do seguinte número decimal $x = 0,5777....$
Solução:

$$x = 0,5777\ldots \tag{3.5}$$

Observe que teremos, logo após a vírgula, um número que não se repete, e então visualizamos o algarismo 7 que se repete infinitamente. Assim poderemos classificar o número em dízima periódica composta. Multiplicamos os dois membros da igualdade por 10, a fim de obter uma dízima periódica simples:

$$10x = 5,777\ldots \tag{3.6}$$

Multiplicamos novamente os dois membros da igualdade por 10:

$$100x = 57,777\ldots \tag{3.7}$$

E subtraímos, membro a membro, a Equação 3.6 da Equação 3.7:

$$\begin{aligned} 100x &= 57,777\ldots \\ \underline{-\ 10x} &\underline{= 5,777\ldots} \\ 90x &= 52 \\ x &= \frac{52}{90} = \frac{26}{45}. \end{aligned}$$

◇

Vejamos uma questão sobre números racionais retirada da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), do ano de 2007 e como a mesma foi norteada pela sequência de Polya.

Exemplo 7. (OBMEP – 2007 – Nível 1) Qual dos números abaixo é maior que $0,12$ e menor que $0,3$?

a) $0,013$

b) $0,7$

c) $0,29$

d) $0,119$

e) $0,31$

Solução:

Etapa 1 - Compreensão do problema: os alunos foram orientados a fazerem uma leitura do enunciado destacando os valores.

Nesse momento, os discentes perceberam que o problema envolvia números racionais, porém estavam na forma de decimal exato (números do enunciado: $0,12$; $0,3$; números das alternativas: $0,013$; $0,7$; $0,29$; $0,119$ e $0,31$).

Etapa 2 - Elaboração de um plano: inicialmente os estudantes foram incentivamos a escrever os números em forma de fração.

- $0,12 = \frac{12}{100}$ e $0,3 = \frac{3}{10}$,
- $0,013 = \frac{13}{1000}; 0,7 = \frac{7}{10}; 0,29 = \frac{29}{100}; 0,119 = \frac{119}{1000}$ e $0,31 = \frac{31}{100}$.

Etapa 3 - Execução do plano: os discentes perceberam que precisavam trabalhar as frações com o mesmo denominador e, através da comparação com os números dados, determinar qual estaria entre eles.

- $0,12 = \frac{12}{100} = \frac{120}{1000}$;
- $0,3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$;
- $0,7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000}$;
- $0,29 = \frac{29}{100} = \frac{290}{1000}$ e
- $0,31 = \frac{31}{100} = \frac{310}{1000}$.

Os alunos foram orientados a colocar todos os números envolvidos em ordem crescente.

$$\frac{13}{1000} < \frac{119}{1000} < \frac{120}{1000} < \frac{290}{1000} < \frac{300}{1000} < \frac{310}{1000} < \frac{700}{1000}.$$

Etapa 4 - Verificação dos resultados: os estudantes transformaram as frações em decimais exatos e perceberam que $\frac{290}{1000}$ estava entre eles. Assim concluíram:

$$0,12 < 0,29 < 0,3 \text{ ou } \frac{120}{1000} < \frac{290}{1000} < \frac{300}{1000}.$$

◇

Existem números que não pertencem ao conjunto dos números racionais, ou seja, não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Eles terão representação decimal infinita e não periódica. Chamaremos esses números de *irracionais* e representaremos o seu conjunto por $\mathbb{I}$. Os números: $0,58791245\ldots, \pi = 3,14159265\ldots, \sqrt{2} = 1,4142136\ldots$, são exemplos de números irracionais.

Chamaremos de conjunto dos números reais, simbolizado pela letra $\mathbb{R}$, a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Note que:

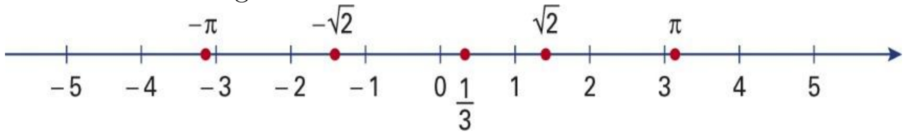
- $8 \in \mathbb{Q}$, assim $8 \in \mathbb{R}$
- $-5 \in \mathbb{Q}$, assim $-5 \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, assim $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$
- $2,7182818284\ldots \in \mathbb{I}$, assim $2,7182818284\ldots \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$, assim $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

Temos, então a representação dos números reais como

$$\mathbb{R} = \{x; x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}.$$

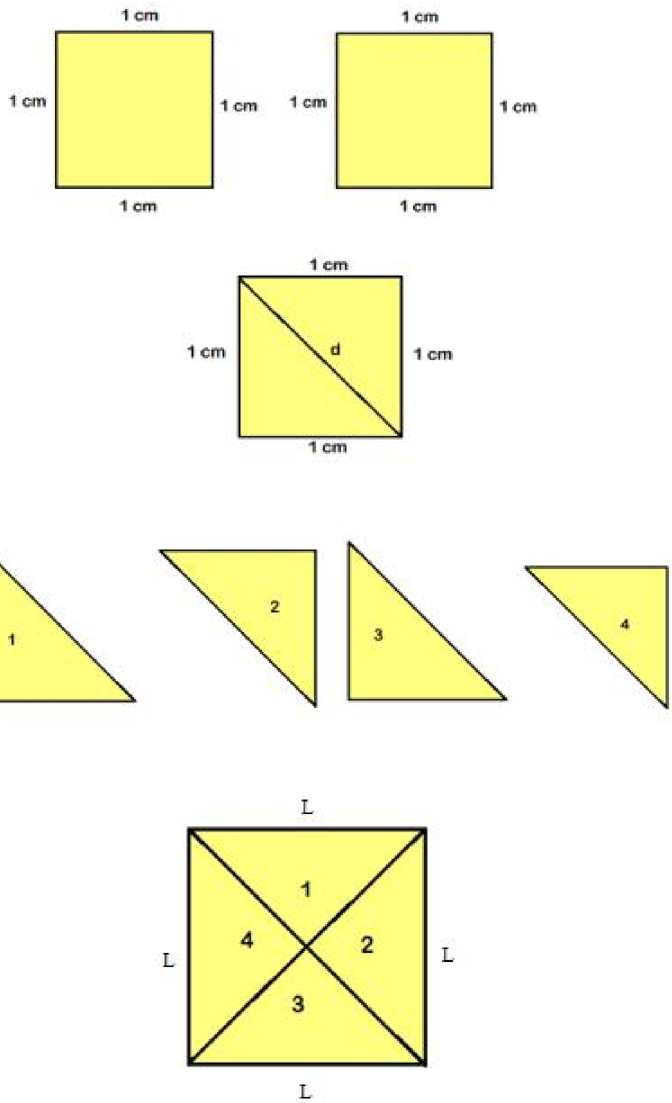
Os números racionais e irracionais podem ser representados em uma reta conhecida como reta real, que é o modelo geométrico dos números reais, conforme Figura 2.

Figura 2: Modelo de Reta Numérica



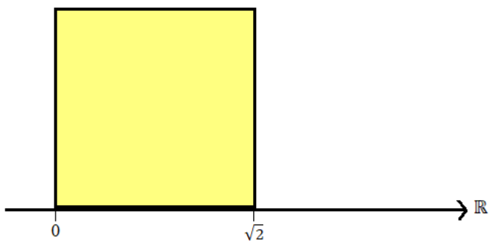
Vejamos como podemos representar o ponto correspondente a $\sqrt{2}$ na reta real por um processo geométrico. Dados dois quadrados de lado 1 cm cada um. A área de cada um é dada pelo produto de dois lados consecutivos, ou seja, igual a 1 cm^2. Recortando esses quadrados pela diagonal, obtemos 4 triângulos. Com esses triângulos podemos montar um novo quadrado com área igual a 2 cm^2.

Figura 3: Construindo a $\sqrt{2}$



Como a área de um quadrado é o produto de dois lados consecutivos e como o quadrado apresenta lados congruentes, teremos o produto do mesmo número resultando 2. Não existe um número racional cujo quadrado resulte 2. Logo, a medida do lado deste quadrado é igual ao número irracional $\sqrt{2}$. Podemos transportar com o auxílio de um compasso, a medida desse segmento para a reta real.

Figura 4: $\sqrt{2}$ na Reta



É possível mostrar que entre dois números reais sempre existem números racionais e números irracionais. Para maiores detalhes veja [8] e [13].

As operações de adição e multiplicação também estão bem definidas nos reais. E atendem as Propriedades 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7.

E assim encerramos nossa aula apresentando o conjuntos dos números reais, as operações matemáticas e os exemplos desenvolvidos em sala.

Na próxima seção, trabalharemos o conteúdo razão, proporção e regra de três.

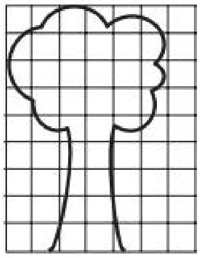
3.1.2 Razão, proporção e regra de três

A palavra razão vem do latim *ratio* e significa divisão. Assim chamamos *razão* entre dois números reais a e b, com $b \neq 0$, o quociente $\frac{a}{b}$. Na razão $\frac{a}{b}$ o número a é chamado de *antecedente* e b de *consequente*.

A razão entre dois números pode ser representada de várias formas. A razão entre 1 e 5 poderá ser escrita $1 : 5$ ou $\frac{1}{5}$. Como estudado anteriormente, ainda podemos dizer que $\frac{1}{5}$ é igual a $0,20$, um número decimal. Mais adiante veremos outra notação para razão.

A escala é uma razão entre a medida de comprimento que se apresenta na representação gráfica e a medida correspondente do comprimento real, expressos em uma mesma unidade de medida.

Exemplo 8. Sabendo que a figura abaixo foi feita na malha quadriculada em centímetros (cm). Ela está representada na escala $1 : 100$. Isto significa que 1 cm do desenho corresponde a 100 centímetros do comprimento real.



1:100

A razão é, assim, utilizada para comparação de grandezas. No Exemplo 8, a razão foi feita entre grandezas de mesma natureza. Porém podemos ter razões com grandezas de naturezas diferentes. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 9. Uma pedra tem $64,2$ g de massa e ocupa um volume de 3 cm^3. Qual a razão entre a medida da massa e o volume dessa pedra?
Solução: Veja que deve ser feita a razão entre grandezas de naturezas diferentes, a massa do corpo (em gramas) e do volume (em centímetros cúbicos). Esta razão é conhecida como densidade de um corpo.

$$\frac{64,2 \text{ g}}{3 \text{ cm}^3} = 21,4 \text{ g/cm}^3.$$

◇

A igualdade entre duas razões é uma proporção. A palavra proporção, do latim *proportionis*, significa a relação entre as partes de uma grandeza. Por definição, dados quatro números reais não nulos, a, b, c e d, dizemos que eles formam uma proporção quando

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Os termos a e d são denominados extremos e b e c, meios.

Considere a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d, representando os 1º, 2º, 3º e 4º termos, respectivamente. Destacaremos algumas propriedades das proporções:

Propriedade 3.8. A soma dos dois primeiros termos está para o segundo (ou primeiro) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o quarto (ou terceiro).

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Propriedade 3.9. A diferença dos dois primeiros termos está para o segundo (ou primeiro) termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o quarto (ou terceiro).

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Propriedade 3.10. A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para seu consequente.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Propriedade 3.11. A diferença dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para seu consequente.

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Propriedade 3.12. O produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado de seu consequente.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$$

Uma sequência de números proporcionais pode ser direta ou inversamente proporcional.

Dizemos que os números reais não nulos x, y e z são diretamente proporcionais aos números reais não nulos a, b e c se vale a igualdade:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k,$$

onde k é o fator de proporcionalidade.

Os números racionais não nulos x, y e z são inversamente proporcionais aos números racionais não nulos a, b e c se vale a igualdade:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = k \text{ ou } x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c = k,$$

onde k é o fator de proporcionalidade.

Vejamos um exemplo da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, no ano de 2018.

Exemplo 10. (UERJ – 2018)

Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que $0,4$ onças é igual a x libras. O valor de x é igual a:

a) $0,0125$

b) $0,005$

c) $0,025$

d) $0,05$

Solução: Utilizamos a regra de três simples para resolução de questões envolvendo duas grandezas direta ou inversamente proporcionais. A regra de três simples envolve quatro valores, dos quais conhecemos apenas três. Devemos determinar o quarto valor com base nos outros já conhecidos.

Onças	Libras
16	1
0,4	x

Para verificarmos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais, observamos que, diminuindo as onças, a libra diminuirá na mesma proporção. Segue que as grandezas são diretamente proporcionais. Podemos montar a proporção e resolver a equação.

$$\frac{16}{0,4} = \frac{1}{x} \Rightarrow 16x = 0,4 \Rightarrow x = 0,025.$$

◇

Quando encontramos problemas com mais de duas grandezas, utilizaremos a regra de três composta. Poderemos, por exemplo, ter seis valores, dos quais conhecemos cinco e devemos achar o sexto valor com base nos outros.

A seguir apresentamos mais uma questão aplicada em sala e como conduzimos mediante a sequência de Polya.

Exemplo 11. (ENEM – 2009) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg

b) 800 kg

c) 720 kg

d) 600 kg

e) 570 kg

Solução:

Etapa 1 - Compreensão do problema: os alunos foram orientados a fazerem uma leitura do enunciado destacando os dados relevantes.

Nesse momento, os discentes perceberam que envolvia quatro grandezas (alunos, dias, horas e alimentos) e que um dos oito valores era desconhecido.

Etapa 2 - Elaboração de um plano: os estudantes montaram, mediante explicação de outros exemplos feitos em sala, os quadros seguintes:

Alunos	Dias	Horas	Alimentos
20	10	3	$12 \cdot 10$
$20 + 30$	20	4	x

Alunos	Dias	Horas	Alimentos
20	10	3	120
50	20	4	x

Etapa 3 - Execução do plano: os alunos precisaram analisar se as grandezas eram direta ou inversamente proporcionais.

Questionamos se para aumentarmos a quantidade de alimentos arrecadados, precisaremos aumentar ou diminuir as horas e os dias trabalhados, e ainda a quantidade de pessoas que estarão trabalhando. A resposta dos estudantes foi aumentar. Concluímos que as grandezas são diretamente proporcionais. Montamos a proporção e resolvemos a equação.

$$\frac{120}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{20}{50} \Rightarrow \frac{120}{x} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3x = 2400 \Rightarrow x = 800 \text{ kg}.$$

Etapa 4 - Verificação dos resultados: neste momento alguns alunos queriam encerrar a resolução marcando a alternativa *b*. Porém perguntamos se o valor 800 kg era referente a quantos dias de coleta. Os participantes pensaram um pouco e responderam vinte dias.

Assim eles releram a situação inicial e perceberam que a quantidade de alimentos que deveria ser encontrada era para trinta dias. Assim concluíram a questão: 800 kg + 120 kg = 920 kg.

◇

Mais um conteúdo foi estudado. Apresentaremos, na próxima seção, porcentagem.

3.1.3 Porcentagem

Observe que na subseção 3.1.2 falamos sobre razão. Quando uma razão apresenta um consequente igual a 100, ela será denominada *razão centesimal*. Vejamos a razão centesimal $\frac{5}{100}$, podemos representá-la de outras formas:

$$\frac{5}{100} = 0,05 = 5\%.$$

A expressão 5% é conhecida como taxa percentual ou taxa centesimal. Quando aplicamos uma taxa percentual a um valor, o resultado é chamado de porcentagem.

A aplicação de porcentagem acontecerá em situações diversas, como mostra os exemplos seguintes.

Exemplo 12. Jonas é um estagiário e ganha mensalmente $R\$$ 800. Ele gastou 10% de seu salário com transporte público. Quanto ele gastou?
Solução: Utilizaremos a regra de três simples.

Salário	Porcentagem
R$ 800	100%
x	10%

$$\frac{800}{x} = \frac{100}{10} \Rightarrow 100x = 8000 \Rightarrow x = 80 \text{ reais.}$$

◇

Exemplo 13. (ENEM – 2010) Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.
Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

a) 16%

b) 24%

c) 32%

d) 48%

e) 64%

Solução:

Etapa 1 - Compreensão do problema: os alunos foram orientados a fazerem uma leitura do enunciado destacando os valores citados.

Os estudantes observaram que apenas 40% foram curados. Logo em seguida, acharam a porcentagem dos que não foram curados.

$$100\% - 40\% = 60\%$$

Etapa 2 - Elaboração de um plano: os estudantes utilizaram do dado anterior para dar continuidade a questão. E entenderam que a distribuição em dois grupos seria uma divisão:

$$\frac{60\%}{2} = 30\%$$

Etapa 3 - Execução do plano: do resultado da etapa anterior aplicaram as porcentagens indicadas:

$$30\% \cdot 35\% = \frac{30}{100} \cdot \frac{35}{100} = \frac{1050}{10000} = 0,105 = 10,5\%$$

$$30\% \cdot 45\% = \frac{30}{100} \cdot \frac{45}{100} = \frac{1350}{10000} = 0,135 = 13,5\%$$

Etapa 4 - Verificação dos resultados: perguntamos o que deveria ser feito com os valores encontrados ($10,5\%$ e $13,5\%$). Depois da releitura do problema, eles concluíram que deveriam somá-los. Assim chegaram ao seguinte resultado:

$$10,5\% + 13,5\% = 24\%.$$

◇

E assim mais um conteúdo foi concluído. Desenvolveremos, na próxima seção, produtos notáveis e fatoração.

3.1.4 Produtos notáveis e fatoração

As expressões algébricas são expressões matemáticas cujos termos são constituídos de variáveis e constantes, ou seja, letras e números.

Alguns produtos de expressões algébricas são denominados produtos notáveis. A seguir, destacamos alguns produtos notáveis, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Produto da soma pela diferença de dois termos: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.
   Perceba que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + ab - ba + b^2 = a^2 - b^2$.

2. Quadrado da soma de dois termos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   Observe que $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3. Quadrado da diferença de dois termos: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
   Observe que $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

4. Cubo da soma de dois termos: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   Veja que este item é obtido dos anteriores. De fato:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2\cdot(a+b) \\ &= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

5. Cubo da diferença de dois termos: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
   Novamente podemos obter este item dos anteriores:

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a-b)^2\cdot(a-b) \\ &= (a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b) \\ &= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Ao escrevermos um produto de duas ou mais expressões algébricas estamos utilizando fatoração. Segue abaixo alguns exemplos:

Quando os fatores forem comuns a todos os termos de uma expressão, podemos colocá-los em evidência. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 14. Fatore a expressão $3x^2 + 6x$.
Solução: Observe que $3x^2 = 3x \cdot x$ e $6x = 3x \cdot 2$, assim teremos um fator multiplicativo $3x$ que é comum a ambos os termos e o outro será o resultado da divisão de cada termo da expressão pelo fator multiplicativo.

$$3x^2 + 6x = 3x(x+2).$$

◇

Exemplo 15. Fatore a expressão $49 - y^2$.
Solução: Como $49 = 7^2$, então utilizando o produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos

$$49 - y^2 = 7^2 - y^2 = (7+y)\cdot(7-y).$$

◇

Concluímos mais uma aula apresentando produtos notáveis e fatoração. Nas próximas seções, trabalharemos potenciação e radiciação.

3.1.5 Potenciação

Dados os números a e n, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n , de *base* a e *expoente* n, é definida como o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a.$$

Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, teremos:

Propriedade 3.13. Produto de potências de mesma base.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Veja que nos dois membros desta igualdade, temos o produto de $m+n$ fatores iguais a a.

Exemplo 16. Reduza a uma só potência $2^5 \cdot 2^3$.
Solução: Veja que $a = 2$, $m = 5$ e $n = 3$. Logo $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$.

◇

Propriedade 3.14. Potência de potência.

$$a^{m.n} = (a^m)^n$$

Propriedade 3.15. Se $m > 0$, então $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, com $a \neq 0$.

Exemplo 17. Determine o resultado da potência 5^{-3}.
Solução: Perceba que $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$.

◇

Propriedade 3.16. Produto de potências com mesmo expoente.

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m.$$

Propriedade 3.17. Quociente de potências de mesma base.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ com } a \neq 0.$$

Exemplo 18. Aplique as propriedades das potências de um produto na expressão $5^7 \cdot 2^7$.
Solução: Veja que $5^7 \cdot 2^7 = (5 \cdot 2)^7 = 10^7$.

◇

3.1.6 Radiciação

Dados os números $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $a > 0$ e $n \geq 2$, o único real b, com $b > 0$, tal que $b^n = a$ é indicado por $\sqrt[n]{a}$ (lê-se: raiz n-ésima de a, de *radicando* a e *índice* n). Assim, definimos:

$$b^n = a \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}.$$

Dados os números $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $a < 0$ e n ímpar, também teremos um único real b, com $b < 0$, tal que $b^n = a$.

Quando $n = 2$, omitimos o índice da raiz, assim para $\sqrt[2]{a}$, escrevemos $\sqrt{a}$. Destacamos alguns exemplos:

- $8^2 = 64 \Rightarrow 8 = \sqrt{64}$;
- $3^3 = 27 \Rightarrow 3 = \sqrt[3]{27}$;
- $(-2)^5 = -32 \Rightarrow -2 = \sqrt[5]{-32}$.

A partir da definição acima, podemos apresentar a definição de uma potência com expoente racional.

Dados os números $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, com $a > 0$ e $n \neq 0$. Definimos

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

De acordo com as propriedades de potência, vistas anteriormente, podemos apresentar as principais propriedades dos radicais.

Sejam a e b números reais, com $a > 0$, $b > 0$, m, n e p números naturais, com $m \geq 1$, $n \geq 1$ e $p \geq 1$.

Propriedade 3.18. Produto de radicais de mesmo índice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Propriedade 3.19. Quociente de radicais de mesmo índice. Se $b > 0$, então

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Propriedade 3.20. Raiz de raiz.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}.$$

Propriedade 3.21. Simplificação de radicais.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Exemplo 19. Determine o valor das expressões:

a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$.

b) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

c) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{4^{15}}}$.

Solução: Para o item *a*) perceba que os radicias possuem mesmos índices. Logo, $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$.
Para o item *b*) note que $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$.
No item *c*) observe que $\sqrt[5]{\sqrt[6]{4^{15}}} = \sqrt[5\cdot 6]{4^{15}} = \sqrt[30]{4^{15}} = \sqrt[30]{(2^2)^{15}} = \sqrt[30]{2^{30}} = 2^{\frac{30}{30}} = 2$.

◇

Exemplo 20. Simplifique o radical $\sqrt[15]{7^{20}}$.
Solução:

Etapa 1 - Compreensão do problema: depois de praticar todas as propriedades citadas anteriormente, os estudantes foram questionados sobre que propriedade poderia ser aplicada nesse exemplo.

Etapa 2 - Elaboração de um plano: os participantes perceberam que o índice 15 e o expoente 20 poderiam ser simplificados. E assim, poderiam aplicar a propriedade de simplificação de radicais.

Etapa 3 - Execução do plano: eles desenvolveram

$$\sqrt[15]{7^{20}} = \sqrt[5\cdot 3]{7^{5\cdot 4}} = 7^{\frac{5\cdot 4}{5\cdot 3}}.$$

Etapa 4 - Verificação dos resultados: depois de simplificar a etapa anterior, notaram que:

$$7^{\frac{5\cdot 4}{5\cdot 3}} = 7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4}.$$

◇

Aqui concluímos mais um conteúdo. Apresentaremos a seguir a equação do 1º grau, a resolução de problemas e o reconhecimento de figuras planas e espaciais.

3.1.7 Equação do 1° grau e resolução de prolemas

Uma sentença matemática expressa por uma igualdade entre duas expressões algébricas é uma *equação*. As operações de adição e multiplicação de números reais e suas Propriedades estabelecidas na Subseção 3.1.1 serão utilizadas para resolução de uma equação.

Uma equação do 1º grau em x é aquela escrita na forma $ax + b = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Estaremos utilizando a letra x, como incógnita. Porém, podemos utilizar qualquer letra do alfabeto como variável.

Para resolver uma equação em x, precisamos encontrar todos os valores de x para os quais a equação é verdadeira.

Exemplo 21. Resolva a equação $x - 2 = 10$.
Solução: Adicionamos (2) aos dois membros da igualdade.

$$x - 2 + 2 = 10 + 2 \Rightarrow x = 12.$$

◇

O exemplo seguinte foi apresentado para resolução de acordo com a sequência de Polya.

Exemplo 22. Resolva a equação $5x = 16 + 3x$.

Etapa 1 - Compreensão do problema: os discentes foram questionados sobre o que deveria ser feito nos dois membros para que a variável x permanecesse apenas no primeiro membro.

Etapa 2 - Elaboração de um plano: os participantes perceberam que $(3x)$ deveria "sumir" do segundo membro e assim fizeram, subtraíram $(3x)$ dos dois membros da igualdade.

$$5x - 3x = 16 + 3x - 3x \Rightarrow 2x = 16.$$

Etapa 3 - Execução do plano: ainda sem o valor final de x, foram questionados do que deveriam fazer para que $2x$ tornasse x. Assim, dividiram por (2) os dois membros da igualdade.

$$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$

Etapa 4 - Verificação dos resultados: depois de simplificar a etapa anterior, observaram que

$$x = 8.$$

◇

3.1.8 Reconhecimento de figuras planas e espaciais

Para iniciarmos nossa abordagem sobre figuras planas, devemos destacar que ponto, reta e plano são conceitos primitivos, isto é, não são passíveis de definições. Assumimos os axiomas de determinação da reta e do plano. A reta é determinada por dois pontos distintos e o plano, por três pontos não colineares.

Definição 1. Considere em um plano uma sequência de n pontos não colineares (três a três) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, com $n \geq 3$. Definimos *polígono* como uma figura formada pela união dos segmentos consecutivos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$.

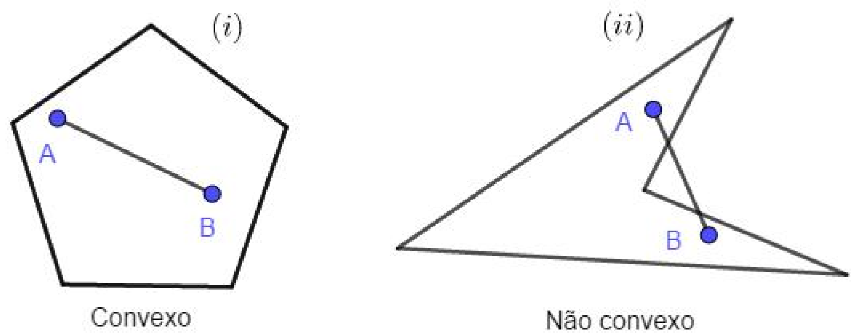
Os *pontos* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ chamaremos de *vértices* do polígono e os *segmentos de retas* $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$, de *lados* do polígono. Algumas condições são necessárias para existência de um polígono:

- $A_n = A_1$;
- Os lados se interceptam somente em suas extremidades;
- Cada vértice é extremidade de dois lados;
- Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

A região determinada pela união do polígono com os pontos de sua região interior é chamada *região poligonal*. Os polígonos podem ser convexos e não convexos. Quando a região poligonal é convexa, o polígono será *convexo*, caso contrário, *não convexo*.

Vejamos um dispositivo prático para identificarmos quando uma figura é convexa ou não convexa. Observe que na Figura 5 (i) foi traçado um segmento de reta $\overline{AB}$, onde todos os pontos de $\overline{AB}$ pertencem a região poligonal. Neste caso dizemos que o polígono é convexo. Na Figura 5 (ii), percebemos que, nem todos os pontos do segmento de reta $\overline{AB}$ pertencem a região poligonal, assim, teremos uma figura não convexa.

Figura 5: Convexo/Não convexo.

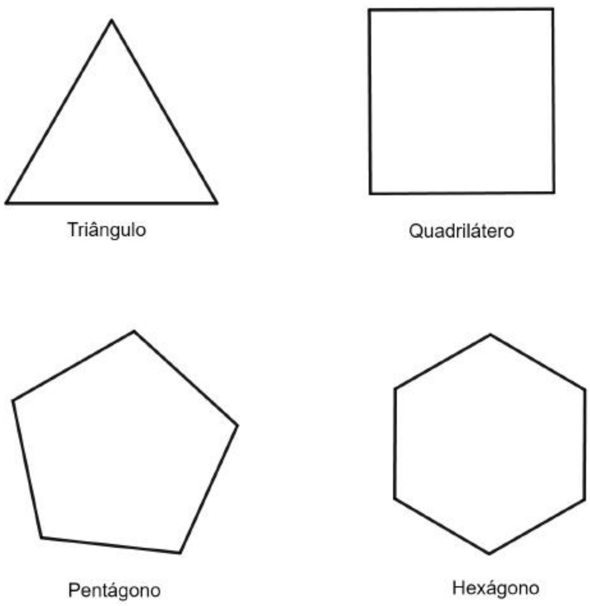


Estudaremos alguns polígonos convexos, os quais recebem denominações de acordo com o seu número de lados.

Tabela 4: Polígonos convexos.

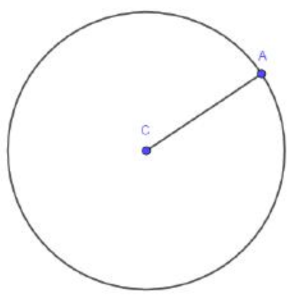
Nome do polígono	Número de lados
triângulo	3
quadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono	8
eneágono	9
decágono	10

Figura 6: Polígonos.



Acrescentamos ainda ao nosso estudo, o círculo. Sejam $C = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$. O conjunto dos pontos $A \in \mathbb{R}^2$ tais que $d(A, C) = r$ é chamado de círculo de centro C e raio r.

Figura 7: Círculo.



Além de ponto, reta e plano, o espaço também é considerado na Geometria, como conceito primitivo.

Iniciamos nosso estudo na Geometria Espacial com os poliedros. Considere *poliedro* como um conjunto fechado e limitado no espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste na união de um número finito de polígonos e que satisfazem as condições a seguir:

- Dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano;
- Se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado comum.

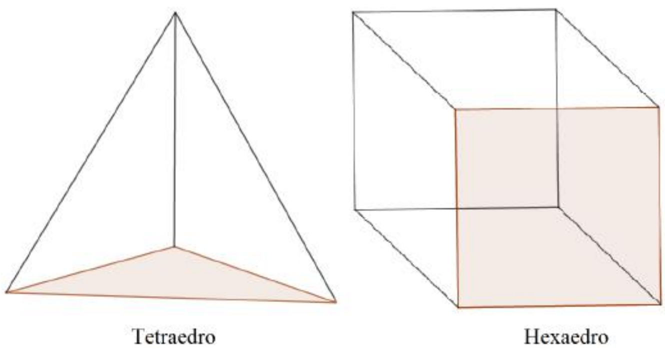
Os elementos que compõe um poliedro são: vértices, arestas e faces. Os vértices coincidem com os vértices dos polígonos; arestas, com os lados dos polígonos e as faces, com os polígonos. Os poliedros podem ser classificados em convexos e não convexos. Quando o plano de cada polígono, que compõe o poliedro, deixa todos os demais em um mesmo semiespaço, ele é convexo, caso contrário, é não convexo.

Destacaremos alguns poliedros convexos.

Tabela 5: Poliedros convexos.

Nome do poliedro	Número de faces
tetraedro	4
pentaedro	5
hexaedro	6
heptaedro	7
octaedro	8
eneaedro	9
decaedro	10

Figura 8: Poliedros.



Vale ressaltar que a ideia foi apenas o reconhecimento das figuras planas e espaciais.

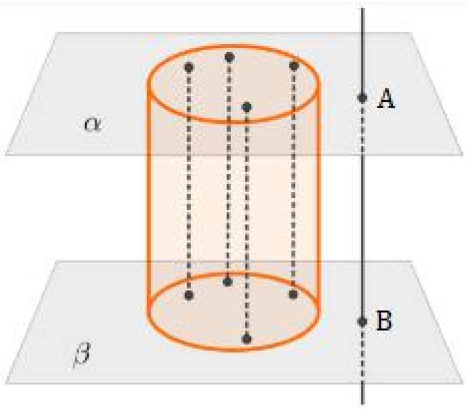
Os prismas e as pirâmides são exemplos de poliedros convexos. O *prisma* de bases $A_1A_2A_3...A_n$ e $A'_1A'_2A'_3...A'_n$, situadas em planos paralelos, é um conjunto limitado no espaço, delimitado pelos polígonos $A_1A_2A_3...A_n$, $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ e pelos paralelogramos

$A_1A_2A'_1A'_2$, $A_2A_3A'_2A'_3$, ..., $A_{n-1}A_nA'_{n-1}A'_n$. O hexaedro, da Figura 8, também conhecido como cubo é um caso especial de prima.

Dado um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano que contém o polígono, definimos *pirâmide* de vértice V e base $A_1A_2A_3...A_n$, como o conjunto limitado no espaço, delimitado pelos planos $A_1A_2A_3...A_n$, e pelos triângulos $VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_{n-1}A_n$. O tetraedro, da Figura 8, é caso especial de pirâmide.

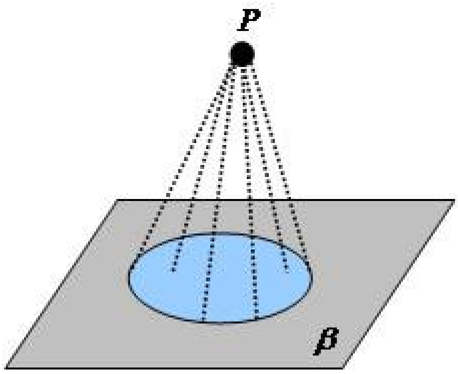
Ainda destacaremos os corpos redondos, cilindro, cone e esfera. Considere dois círculos (C_1 e C_2) de mesmo raio e contidos em planos paralelos (α e β). Dado o segmento $\overline{AB}$, com A pertencente ao plano α e B, ao plano β. A união de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$ que ligam os círculos C_1 e C_2 forma uma figura espacial, chamada *cilindro circular*.

Figura 9: Cilindro circular.



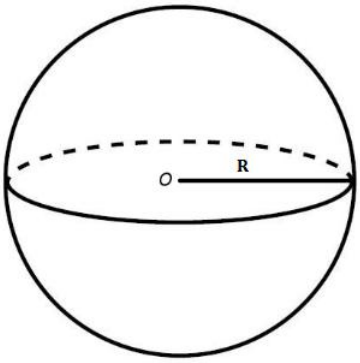
Considere um plano β, um círculo de centro O e raio r contido em β e um ponto P não pertencente ao plano β. A reunião de todos os segmentos que unem cada ponto do círculo ao ponto P é um sólido chamado *cone*.

Figura 10: Cone.



A *esfera* de centro O e raio R, com $R > 0$, é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância igual a R do ponto O.

Figura 11: Esfera.



Assim, finalizamos o conteúdo ministrado nas aulas. Na seção seguinte faremos uma análise dos resultados obtidos na sondagem aplicada no início e no término do curso.

3.1.9 Análise dos dados

Após conclusão do conteúdo, em 30 de abril realizamos nosso último encontro. Nos primeiros minutos de aula destacamos os principais conteúdos estudados e conversamos sobre as principais dúvidas apresentadas. Os dez estudantes presentes levaram suas avaliações de matemática (a parcial e a bimestral) e mostraram o quanto já estavam evoluindo nas notas. Na segunda parte da aula, aplicamos uma avaliação final, na verdade a mesma feita por eles, como sondagem. Os resultados da sondagem aplicada no início e no término do curso serão apresentados na Tabela 6 a seguir.

Tabela 6: Comparação entre as notas da sondagem e da avaliação final.

Aluno	Nota da Sondagem	Nota da Avaliação Final	Frequência
A	1,0	4,5	6 aulas
B	3,0	9,0	6 aulas
C	0,0	1,0	7 aulas
D	1,0	8,0	10 aulas
E	1,0	3,0	6 aulas
F	2,0	6,5	10 aulas
G	1,0	5,0	7 aulas
H	4,0	6,0	8 aulas
I	2,0	9,0	10 aulas
J	1,0	4,0	8 aulas

Fonte: Autor.

Conforme os dados apresentados, verifica-se uma evolução de todos os participantes. Vale destacar que os alunos A e B começaram o curso a partir do quarto encontro, pois tivemos a desistência de alguns estudantes, e assim disponibilizamos vagas para outros alunos que se encontravam dentro do critério de seleção.

Vejamos os discentes 'A', 'E', 'G' e 'J': iniciaram com a nota $1,0$ e concluiram o curso com notas $4,5$, $3,0$, $5,0$ e $4,0$, respectivamente. A frequência nas aulas destes quatro alunos foi, em média, 74%. Os estudantes 'D' e 'I' obtiveram na sondagem notas inferiores a $3,0$, porém concluíram as atividades com notas superiores a $7,0$. Tais estudantes estiveram presentes em todas as aulas. O participante 'F' iniciou o curso com nota $2,0$ e o participante 'H' com nota $4,0$, e na avaliação final obtiveram, respectivamente, $6,5$ e $6,0$. A média da frequência dos mesmos foi de 90%. O discente 'B', com presença de quase 86% das aulas, conseguiu uma evolução de 6 pontos, obteve nota $3,0$ na sondagem e $9,0$ na avaliação final. O aluno 'C' foi aquele que alcançou a menor pontuação, começou o curso com $0,0$ e concluiu com $1,0$, mesmo frequentando 70% das aulas. O mesmo apresentou dificuldades em todas as aulas e mesmo depois de diversas explicações, não obteve êxito e nem entendimento das quatro etapas, fundamentadas nas propostas de Polya, de resoluções de questões.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados do PISA e SAEB, apresentados neste trabalho, mostram a realidade da educação básica no Brasil.

Como professores de Matemática, devemos nos questionar sobre quais mudanças devem ser implantadas para reverter este quadro, ou pelo menos, produzir uma melhora no mesmo.

Tendo ciência de que o problema é bem complexo e exige um estudo simultâneo de um conjunto de variáveis, esperamos contribuir com o que estaria ao nosso alcance: um curso de fundamentação, em Matemática Básica no Ensino Médio e que o mesmo sirva de base e inspiração para a elaboração de outros projetos em todas as áreas da educação.

É importante ressaltar que as atividades desenvolvidas durante o curso foram diferenciadas e centradas no processo de aprendizagem proposta pelo matemático húngaro George Polya.

Conforme os dados apresentados na sondagem aplicada, o resultado foi significativo para aqueles que concluíram o curso. Percebemos um crescimento em suas notas, porém, com um pouco mais de participação, ou maior duração do curso, os discentes poderiam obter um melhor rendimento.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] BIANCHINI, E. **Matemática: 5ª, 6ª, 7ª e 8ª Séries**. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006.

[3] CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[4] DEMANA, F. D; et al. **Pré-cálculo**. 2 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

[5] DIÁRIO DO NORDESTE. **Elevar nível de aprendizagem matemática desfia Ceará**. Disponível em: http://diariodonordeste.verdesmares.com.br/editorias/metro/elevar-nivel-de-aprendizagem-em-matematica-desafia-ceara-1.1983343. Acesso: 09 nov. 2018.

[6] DOMINGUES, J. S.; BENTO, F. S.; SILVA, T. H. **Introdução à álgebra elementar**. 1. ed. revisada. Formiga: IFMG Campus Formiga, 2016.

[7] G1 – Educação. **7 de cada 10 alunos do ensino médio têm nível insuficiente em português e matemática, diz MEC**. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2018/08/30/7-de-cada-10-alunos-do-ensino-medio-tem-nivel-insuficiente-em-portugues-e-matematica-diz-mec.ghtml. Acesso: 28 jan. 2019

[8] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: vol. 01**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2001.

[9] INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes http://portal.inep.gov.br/web/guest/pisa. Acesso: 02 jan. 2019.

[10] LIMA, E. L. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[11] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Média em matemática está entre as menores do Pisa. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33571. Acesso: 02 jan. 2019.

[12] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[13] MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais – Vol. 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] PONTE, J. P; et al. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Ministério da Educação, 2007.

[15] POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático** / G. Polya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. - Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[16] SILVEIRA, E.; MARQUES, C. **Matemática: compreensão e prática: 6º, 7º, 8º e 9º anos**. São Paulo: Moderna, 2017.

[17] SOARES, F. G. E. P. **As atitudes de alunos do ensino básico em relação à matemática e o papel do professor**. Disponível em: www.anped.org.br/reunioes/27/gt19/t194.pdf. Acesso: 20 set. 2018.

ANEXOS

A. 1. Sondagem

SONDAGEM - MATEMÁTICA

Nome: ______________________________ Série: ________

1) (UFC) Considere os seguintes números: $a = 1,017; b = 1,0051$ e $c = 1,00504$. Dispondo-os em crescente, obteremos:

   a) $a < b < c$
   b) $a < c < b$
   c) $b < a < c$
   d) $c < a < b$
   e) $c < b < a$

2) (ENEM) Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4.800 kWh consome $4,8$ kW por hora.
   Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?

   a) $0,8$
   b) $1,6$
   c) $5,6$
   d) $11,2$
   e) $33,6$

3) (UNIFOR) Em uma escola, o número de estudante do sexo masculino representa $\frac{9}{16}$ do total de alunos. Nessa escola, a porcentagem de estudantes do sexo feminino é:

   a) $40,75\%$
   b) $41,25\%$
   c) $41,5\%$
   d) $43,75\%$
   e) $45,5\%$

4) (PUCMG) Se a e b são números reais inteiros positivos tais que $a-b=7$ e $a^2b-ab^2=210$, o valor de ab é:

   a) 7
   b) 10
   c) 30
   d) 37

5) (UECE) O valor da expressão numérica $1^{-2}-2^{-1}+8^{\frac{1}{3}}-0,2+2^0$ é:

   a) $2,1$
   b) $2,3$
   c) $3,1$
   d) $3,3$

6) (CESGRANRIO) Se $(2+3)^2-x=12$, então x vale:

   a) -2
   b) -1
   c) 1
   d) 9
   e) 13

7) (ENEM - 2011) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

   Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

   a) pirâmide.
   b) semiesfera.
   c) cilindro.

d) tronco de cone.

e) cone.

8) (UFC) Três irmãos, Maria, José e Pedro receberam, respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ de uma determinada herança. A fração desta herança que não foi distribuída entre estes irmãos foi de:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{8}{9}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{18}$

e) $\frac{5}{6}$

9) (UNIFOR) Efetuando-se $\frac{7}{9} \cdot \frac{27}{21} : \frac{9}{8} + \frac{1}{4}$, obtém-se:

a) $\frac{8}{11}$

b) $\frac{64}{85}$

c) $\frac{333}{324}$

d) $\frac{41}{36}$

e) $\frac{6}{5}$

10) (URCA) Calcule o valor da expressão $\dfrac{\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{192} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 5\sqrt{75} - 2\sqrt{48}}$.

a) $\frac{4}{25\sqrt[3]{3}}$

b) $\frac{4}{25\sqrt[6]{3}}$

c) $\frac{4}{25\sqrt{3}}$

d) $\frac{4\sqrt[6]{3}}{25}$

e) $\frac{4\sqrt[3]{3}}{25}$

A. 2. Termos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que a Escola (NOME DA ESCOLA), através da sua direção, em participar do Projeto intitulado: (NOME DO PROJETO), com duração (PERÍODO). Desenvolvido pelo (NOME DO PESQUISADOR) cujo orientador é (NOME DO ORIENTADOR), no qual os dados coletados serão utilizados na Dissertação do mestrando.

Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do Projeto, que, em linhas gerais é o fortalecimento da Matemática Básica de uma turma de alunos do 1º ano do Ensino Médio, os quais foram escolhidos através de uma avaliação feita pela pesquisadora.

Afirmo que a Escola aceita participar, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus. Sabendo da importância do mesmo, pretendemos incentivar a participação dos alunos desta instituição no referido curso.

Estou ciente que, durante a execução do projeto, possam surgir alguns riscos para os participantes, pois podem se sentir constrangidos por não obterem bom desempenho no curso, ou entediados, tendo em vista que os conteúdos abordados durante as aulas são referentes ao Ensino Fundamental e que a matemática é um desafio para os estudantes.

Fui também esclarecido(a) de que as informações oferecidas pelos participantes serão submetidas às normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos, da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

O acesso e a análise dos dados coletados se farão pelo pesquisador responsável e seu orientador. O pesquisador se compromete a tornar públicos, nos meios acadêmicos e científicos, os resultados obtidos de forma consolidada sem qualquer identificação de indivíduos participantes. Caso concorde, assine ao final deste documento, que possui duas vias, sendo uma delas sua, e a outra, do pesquisador responsável.

Qualquer dúvida, pedimos a gentileza de entrar em contato com o pesquisador responsável pelo projeto, telefone: (CONTATO), e-mail: (ENDEREÇO ELETRÔNICO), e/ou com o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Faculdade de Medicina do Cariri (CEP/MEDCARIRI/UFCA), telefone: (88) 3221-9606, e-mail: cep@ufca.edu.br.

Juazeiro do Norte, ____ de __________ de _______.

____
Assinatura do Diretor da Escola (NOME DA ESCOLA)

____
Assinatura do pesquisador

____
Assinatura do coordenador do curso

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Seu filho(a) está sendo convidado(a) a participar do Projeto intitulado: (NOME DO PROJETO), que será oferecido aos alunos de 1º ano do Ensino Médio da Escola (NOME DA ESCOLA), com duração (PERÍODO). Desenvolvido pelo professor (NOME DO PESQUISADOR) cujo orientador é o professor (NOME DO ORIENTADOR). Leia o texto abaixo e, caso concorde com os termos, assine-o juntamente com o pesquisador, no local indicado no final da folha.

Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do Projeto, que, em linhas gerais é o fortalecimento da Matemática Básica para uma turma de alunos do 1º ano do Ensino Médio, os quais foram escolhidos através de uma avaliação feita pelo pesquisador.

A participação dele(a) não é obrigatória e, a qualquer momento, poderá desistir. Tal recusa não trará prejuízos em sua relação com a pesquisadora ou com a instituição em que ele estuda. Tudo foi planejado para minimizar os riscos da participação dele(a).

Estou ciente que, durante a execução do projeto, poderá correr o risco do meu filho(a) se sentir minimamente constrangido por não obter bom desempenho no curso, tendo em vista que os conteúdos abordados durante as aulas são referentes ao Ensino Fundamental e que a matemática é um desafio para os estudantes. Também estou ciente que eu e meu filho(a) não receberemos remuneração ou qualquer ônus pela participação.

Fui avisado que o acesso e a análise dos dados coletados se farão pelo pesquisador responsável e seu orientador. O pesquisador ainda se compromete a tornar públicos, nos meios acadêmicos e científicos, os resultados obtidos de forma consolidada sem qualquer identificação dos indivíduos participantes.

Fui também esclarecido(a) de que as informações oferecidas serão submetidas às normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP). A colaboração se fará de forma anônima, por meio de participação no referido curso e realizando atividades e avaliações para verificação do rendimento do meu filho em matemática básica e se iniciar a partir da assinatura desta autorização.

Eu, ______________________________ declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do meu filho(a) ______________________________. Sendo que:

( ) aceito que ele(a) participe. ( ) não aceito que ele(a) participe.

Juazeiro do Norte, _____ de ____________ de ________.

Assinatura do(a) Responsável: ____.

Assinatura do pesquisador: ____.

Qualquer dúvida, pedimos a gentileza de entrar em contato com o pesquisador responsável pelo projeto, telefone: (CONTATO), e-mail: (ENDEREÇO ELETRÔNICO), e/ou com o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Faculdade de Medicina do Cariri (CEP/MEDCARIRI/UFCA), telefone: (88) 3221-9606, e-mail: cep@ufca.edu.br.

TERMO DE ASSENTIMENTO PARA ADOLESCENTE

Você está sendo convidado para participar do Projeto: (NOME DO PROJETO). Seus pais permitiram que você participe. Leia o texto abaixo e, caso concorde com os termos, assine-o juntamente com o pesquisador no local indicado no final da folha.

Queremos saber quais as dificuldades, em Matemática Básica, possuem os alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio e assim ministrar aulas desta disciplina para fortalecimento deste conhecimento.

Os adolescentes que irão participar desta pesquisa têm de 14 a 16 anos de idade.

Você não precisa participar do Projeto se não quiser, é um direito seu e, caso aceite participar, não terá nenhum problema se desistir em qualquer etapa do curso.

O curso será realizado na Escola (NOME DA ESCOLA), onde os estudantes participarão de uma ou duas aulas semanais dependendo da disponibilidade dos mesmos, com duração (PERÍODO). Durante as aulas serão realizadas atividades como Trabalhos Dirigidos (TD's) que englobarão conceitos, teorias e problemas envolvendo os conteúdos ministrados e avaliações para verificar o rendimento dos participantes.

A ideia, a priori, é fortalecer o seu conhecimento na matéria citada, o qual será útil em sua vida estudantil.

Durante a execução do projeto, poderá correr o risco se sentir minimamente constrangido por não obter bom desempenho no curso, tendo em vista que os conteúdos abordados durante as aulas são referentes ao Ensino Fundamental e que a matemática é um desafio para os estudantes.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos à estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar os adolescentes que participaram.

CONSENTIMENTO PÓS-INFORMADO

Eu, ______________________________ aceito participar do Projeto: (NOME DO PROJETO). Entendi como será minha participação, bem como os benefícios e os riscos da mesma.

Estou ciente que posso dizer "sim" e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir e que ninguém irá me constranger por isso. O pesquisador tirou minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste termo de assentimento que li e concordo em participar da pesquisa.

Juazeiro do Norte, _____ de __________ de ________.

Assinatura do(a) participante: ______________________________.

Assinatura do pesquisador: ______________________________.

Qualquer dúvida, pedimos a gentileza de entrar em contato com a pesquisadora responsável pelo projeto, telefone: (CONTATO), e-mail: (ENDEREÇO ELETRÔNICO), e/ou com o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Faculdade de Medicina do Cariri (CEP/MEDCARIRI/UFCA), telefone: (88) 3221-9606, e-mail: cep@ufca.edu.br.

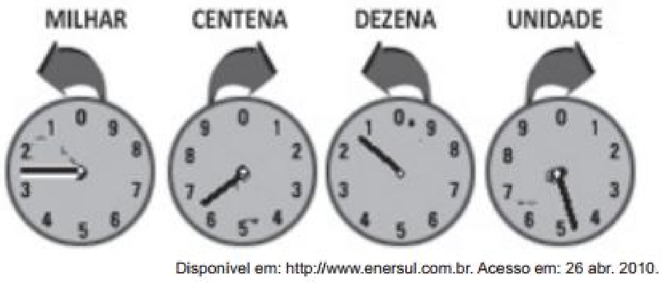
A. 3. TD's utilizados nas aulas

Em cada assunto abordado, procuramos não só trabalhar a parte teórica, apresentando os conceitos, as propriedades e questões, mas também desenvolvemos um trabalho dirigido (TD) para cada conteúdo, com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de livros de Ensino Fundamental, bem como de vestibulares de várias Instituições de Ensino:

- Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET);
- Faculdade de Tecnologia e Ciências (FATEC);
- Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST);
- Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC - RJ);
- Universidade de Fortaleza (UNIFOR);
- Universidade de Passo Fundo (UPF);
- Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ);
- Universidade Estadual do Ceará (UECE);
- Universidade Estadual da Paraíba (UEPB);
- Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG);
- Universidade Federal do ABC (UFABC);
- Universidade Federal do Pará (UFPA);
- Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS);
- Universidade Federal Fluminense (UFF);
- Universidade Presbiteriana Mackenzie (MACK - SP).

TD - Nº 01 - Assunto: Conjuntos dos números reais, operações matemáticas.

1) (ENEM - 2011) O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:



A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro. O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é:

a) 2614
b) 3624
c) 2715
d) 3725
e) 4162

2) (OBMEP - 2007 - Nível 1) Qual das expressões abaixo tem o maior resultado?

a) $(6+3)\cdot 0$
b) $6\cdot 3\cdot 0$
c) $6+3\cdot 0$
d) $6\cdot(3+0)$
e) $6+3+0$

3) (ENEM - 2015) Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: $3,10$ mm; $3,021$ mm; $2,96$ mm; $2,099$ mm e $3,07$ mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de:

a) $2,099$
b) $2,96$

c) $3,021$

d) $3,07$

e) $3,10$

4) Um aluno está se preparando para o Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM). Quer saber quantas questões de Matemática ele resolve por semana. Observe as dicas:

- Contando de dois em dois, sobra 1;

- Contando de três em três, sobra 1;

- De cinco em cinco, também sobra 1;

- E de sete em sete, não sobra questão alguma.

- Sabendo que o total de questões ultrapassa 50, mas não chega a 100.
Quantas questões ele deve resolver?

a) 99

b) 98

c) 95

d) 93

e) 91

5) (ENEM - 2010) A classificação de um país no quadro de medalhas nos Jogos Olímpicos depende do número de medalhas de ouro que obteve na competição, tendo como critérios de desempate o número de medalhas de prata seguido do número de medalhas de bronze conquistados. Nas Olimpíadas de 2004, o Brasil foi o décimo sexto colocado no quadro de medalhas, tendo obtido 5 medalhas de ouro, 2 de prata e 3 de bronze. Parte desse quadro de medalhas é reproduzida a seguir.

Classificação	País	Medalhas de ouro	Medalhas de prata	Medalhas de bronze	Total de medalhas
8º	Itália	10	11	11	32
9º	Coreia do Sul	9	12	9	30
10º	Grã-Bretanha	9	9	12	30
11º	Cuba	9	7	11	27
12º	Ucrânia	9	5	9	23
13º	Hungria	8	6	3	17

Se o Brasil tivesse obtido mais 4 medalhas de ouro, 4 de prata e 10 de bronze, sem alteração no número de medalhas dos demais países mostrados no quadro, qual teria sido a classificação brasileira no quadro de medalhas das Olimpíadas de 2004?

a) $13°$
b) $12°$
c) $11°$
d) $10°$
e) $9°$

6) (CEFET - AL) Em relação aos principais conjuntos numéricos, é CORRETO afirmar que:

a) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.
b) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.
c) Todo número irracional é real.
d) Todo número real é natural, mas nem todo número natural é real.
e) Todo número racional é inteiro, mas nem todo número inteiro é racional.

7) As letras N, Q, I e R são as iniciais das palavras número (ou natural), quociente, irracional e real. A letra Z é inicial da palavra zahl, que significa número em alemão. A origem histórica da criação dos números irracionais está intimamente ligada com fatos de natureza geométrica e de natureza aritmética. Dos números abaixo representados, qual é irracional?

a) $0,123$
b) $0,\overline{123}$
c) $\sqrt[3]{27}$
d) $\sqrt[3]{3}$
e) $\sqrt[3]{-8}$

8) No Egito Antigo, durante as inundações do Rio Nilo, as terras que ficavam submersas recebiam muitos nutrientes, tornando-se muito boas para a agricultura. Quando as águas baixavam, era necessário remarcar os limites entre os lotes de cada proprietário. Esse trabalho de medição era feito pelos "estiradores de corda". Por mais adequada que fosse a unidade de medida escolhida, dificilmente ele cabia um número inteiro de vezes na corda estirada, por esse motivo, era necessária a utilização das frações.

Dado o número $0,\overline{25}$, sua representação em fração será:

a) $\frac{25}{10}$

b) $\frac{25}{100}$

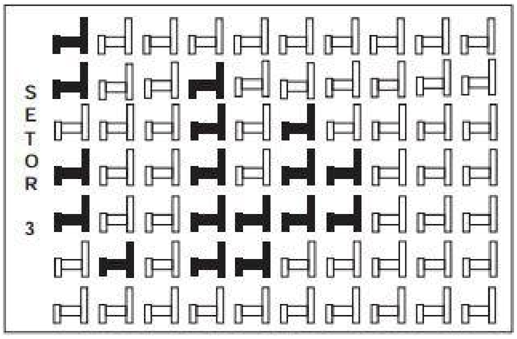
c) $\frac{25}{9}$

d) $\frac{25}{90}$

e) $\frac{25}{99}$

TD - Nº 02 - Assunto: Razão, proporção, regra de três.

1) (ENEM - 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

a) $\frac{17}{70}$

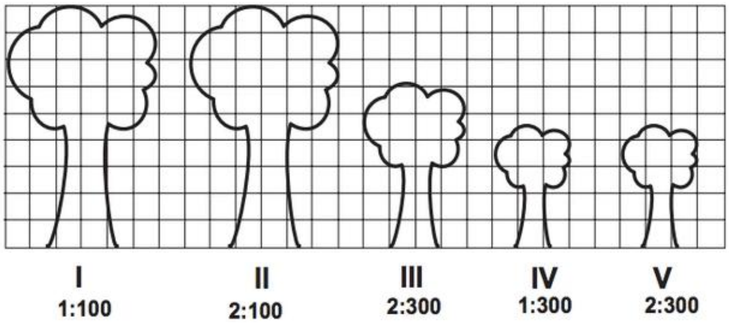
b) $\frac{17}{53}$

c) $\frac{53}{70}$

d) $\frac{53}{70}$

e) $\frac{70}{17}$

2) (ENEM - 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



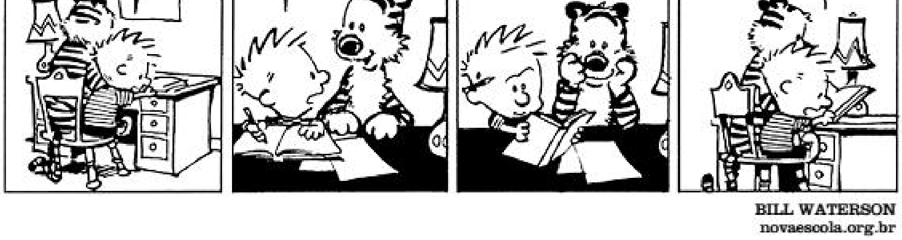
Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

3) (ENEM - 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

a) 12 kg
b) 16 kg
c) 24 kg
d) 36 kg
e) 75 kg

4) (UERJ - 2018) Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que 0,4 onças é igual a x libras. O valor de x é igual a:



a) 0,0125

b) 0,005

c) 0,025

d) 0,05

5) (ENEM - 2009) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.
Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg

b) 800 kg

c) 720 kg

d) 600 kg

e) 570 kg

6) (PUC - RJ - 2015) Os sócios de uma empresa decidem dividir o lucro de um determinado período, pelos seus três gerentes, de modo que cada um receba uma parte diretamente proporcional ao seu tempo de serviço. Sabendo que o lucro que será dividido é de 18.500,00 e que o tempo de serviço de cada um deles é, respectivamente 5, 7, 8 anos, podemos afirmar que o mais antigo na empresa receberá:

a) R$ 4 625,00

b) R$ 5 125,00

c) R$ 6 475,00

d) R$ 7 400,00

e) R$ 9 250,00

7) (UERJ - 2013)

A definição apresentada pelo personagem não está correta, pois, de fato, duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao se multiplicar o valor de uma delas por um número positivo, o valor da outra é dividido por esse mesmo número. Admita que a nota em matemática e a altura do personagem da tirinha sejam duas grandezas, x e y, inversamente proporcionais.
A relação entre x e y pode ser representada por:

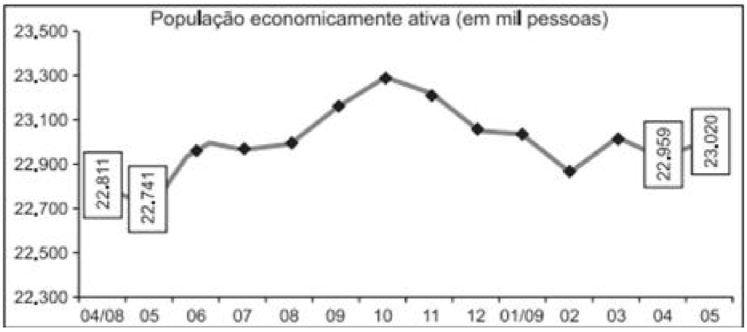
a) $\frac{3}{x^2}$
b) $\frac{5}{x}$
c) $\frac{2}{x+1}$
d) $\frac{2x+4}{3}$

TD - Nº 03 - Assunto: Porcentagem.

1) (ENEM - 2010) Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

   a) 16%
   b) 24%
   c) 32%
   d) 48%
   e) 64%

2) (ENEM - 2009) O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis Regiões Metropolitanas pesquisadas.



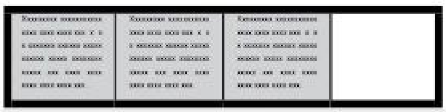
Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a:

a) 23 940
b) 32 228
c) 920 800
d) 23 940 800
e) 32 228 000

3) O Ártico é a vítima mais visível do aquecimento global. Segundo dados da NASA, o aumento de 1,6 grau na temperatura média da região nos últimos 34 anos reduziu o volume de gelo no Ártico, que era de 33 000 km^3 no inverno de 1979, para 22 000 km^3 no inverno de 2013. (Veja, 11.09.2013)
Admita que a redução do volume de gelo seja diretamente proporcional ao aumento da temperatura média da região. Nesse caso, se o aumento na temperatura média da região tivesse sido de 2 graus no mesmo período, a redução no volume de gelo do Ártico teria sido igual, em km^3, a:

a) 11 375
b) 11 550
c) 11 850
d) 12 450
e) 13 750

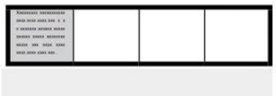
4) (ENEM - 2010) Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.



(Foto: Reprodução/Enem)

Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenche?-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é:

A 

B 

C 

D 

E 

5) (UFMG) Uma prova de triatlo compreende três etapas: natação, ciclismo e corrida. Em uma dessas provas, dos 170 atletas que iniciaram a competição, dez abandonaram na etapa de natação; dos que continuaram, $\frac{1}{4}$ desistiu ao longo da etapa de ciclismo; e, dos que começaram a terceira etapa, 20% abandonaram a corrida. Quantos atletas terminaram a corrida?

a) 80

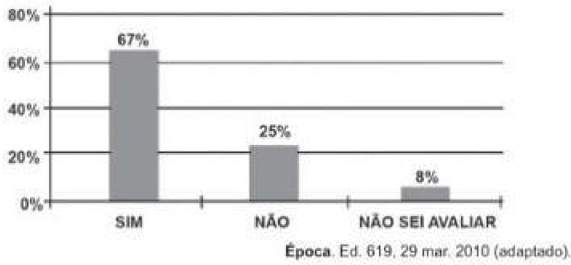
b) 88

c) 92

d) 94

e) 96

6) (ENEM - 2011) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico:



Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "NÃO" à enquete:

a) Menos de 23.

b) Mais de 23 e menos de 25.

c) Mais de 50 e menos de 75.

d) Mais de 100 e menos de 190.

e) Mais de 200.

7) (UFABC - 2006) Ensino superior tem ... das vagas ociosas. Segundo o jornal Folha de São Paulo, das 2,01 milhões de vagas oferecidas em 2004 pelas faculdades privadas, 996 mil ficaram ociosas. O termo que pode completar adequadamente a lacuna na manchete acima é:

a) Metade

b) 2%

c) Um terço

d) 80%

e) Dois terços

TD - Nº 04 - Assunto: Produtos notáveis e fatoração.

1) O valor da expressão

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6561}\right)$$

é:

a) $1+\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$

b) $1-\left(\frac{1}{3}\right)^{16}$

c) $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{16}$

d) $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{8}$

e) $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{8}$

2) Simplificando a expressão

$$\frac{a^2+a}{b^2+b} \cdot \frac{a^2-a}{b^2-b} \cdot \frac{b^2-1}{a^2-1},$$

com $a \neq -1$, $a \neq 1$, $b \neq -1$, $b \neq 1$ e $b \neq 0$, obtém-se:

a) $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{b^2}{a^2}$

c) 1

d) $\frac{a}{b}$

e) $\frac{b}{a}$

3) (UNIFOR) A expressão $(x-1)^2 + (x-1)^3$ é equivalente a:

a) $x^3 + x^2 - 2$

b) $x^3 + 2x^2 + 1$

c) $x^3 - 2x^2 + x$

d) $(x-1)^5$

e) $x^3 + x^2 - 2x$

4) (UFPA) O número 3 pode ser cancelado, sem mudar o valor da fração, na expressão:

a) $\frac{x+3}{y-3}$

b) $\frac{3x-y}{3}$

c) $\frac{3x+3}{3y}$

d) $\frac{3+x}{3+y}$

e) $\frac{\frac{x}{3}}{\frac{3}{y}}$

5) (MACK - SP) Se $(x-y)^2 - (x+y)^2 = -20$, então $x \cdot y$ é igual a:

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{5}$

d) 5

e) 10

6) (PUC - 2003) O produto $(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)$ é igual a:

a) $x^2 + 2$

b) $x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

c) $x^3 - 1$

d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

e) $x^3 + 1$

7) O valor da expressão $y = \dfrac{0,49 - x^2}{0,7 + x}$ para $x = -1,3$ é:

a) -2

b) -1,3

c) 1,3

d) 2

e) 2,6

8) Se $x + \frac{1}{x} = 3$, o valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é:

a) 36

b) 27

c) 18

d) 9

e) 3

TD - Nº 05 - Assunto: Potenciação e radiciação.

1) (FUVEST - SP) Se $4^{16} \cdot 5^{25} = \alpha \cdot 10^n$, com $1 \leq \alpha < 10$, então n é igual a:

a) 24

b) 25

c) 26

d) 27

e) 28

2) (UPF - RS) Simplificando a expressão $\sqrt[5]{\dfrac{3^{17}-3^{16}}{6}}$, obtém-se o valor:

a) 9

b) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}$

c) 27

d) $\sqrt[5]{\dfrac{3}{2}}$

e) $\dfrac{3^{\frac{17}{5}}-3^{\frac{16}{5}}}{6^5}$

3) Se $5^{3a}=64$, o valor de 5^{-a} é:

a) $-\frac{1}{8}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{64}$

4) (UEPB - 2011) Efetuando $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(2^{0,25}\right)^{-2}-\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}+1}$ temos por resultado:

a) $-\frac{71}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{17}{36}$

d) 1

e) $\frac{36}{35}$

5) (UFMG) O valor da expressão $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-2}$ é:

a) $\dfrac{ab}{(a+b)^2}$

b) $\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}$

c) $\frac{a^2\cdot b^2}{(a+b)^2}$

d) a^2+b^2

e) $\frac{(a+b)^2}{a^2\cdot b^2}$

6) (PUC - MG) Se $2^n = 15$ e $2^p = 20$, o valor de 2^{n-p+3} é:

a) $\frac{3}{32}$

b) 3

c) 6

d) 8

e) 32

7) (FUVEST) O valor da expressão $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ é:

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) 2

d) $\frac{1}{2}$

e) $\sqrt{2}+1$

8) (UECE) A expressão numérica $5\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16}$ é:

a) $\sqrt[3]{1458}$

b) $\sqrt[3]{729}$

c) $2\sqrt[3]{70}$

d) $2\sqrt[3]{38}$

TD - Nº 06 - Assunto: Equação do 1º grau e resolução de problemas.

1) (FATEC - SP - 2007) Gabriel tinha B balas. Comeu uma e deu metade do que sobrou para Felipe. Depois de comer mais uma, deu metade do que sobrou para Artur e ainda ficou com 7 balas. O número B é tal que:

a) $B < 10$

b) $10 < B < 20$

c) $20 < B < 30$

d) $30 < B < 40$

e) $B > 50$

2) (MACK) As x pessoas de um grupo deveriam contribuir com quantias iguais a fim de arrecadar R$ 15 000,00, entretanto 10 delas deixaram de fazê-lo, ocasionando, para as demais, um acréscimo de R$ 50,00 nas respectivas contribuições. Então x vale.

   a) 60
   b) 80
   c) 95
   d) 115
   e) 120

3) (UFRGS) Um grupo de estudantes dedicado à confecção de produtos de artesanato gasta R$ 15,00 em material, por unidade produzida, e além disso, tem um gasto fixo de R$ 600,00. Cada unidade será vendida por R$ 85,00. Quantas unidades terão de vender para obterem um lucro de R$ 800,00?

   a) 7
   b) 10
   c) 12
   d) 15
   e) 20

4) (UFF - RJ) Três números naturais e múltiplos consecutivos de 5 são tais que o triplo do menor é igual ao dobro do maior. Dentre esses números, o maior é:

   a) múltiplo de 3
   b) ímpar
   c) quadrado perfeito
   d) divisor de 500
   e) divisível por 4

5) (UECE) Uma peça de tecido, após a lavagem, perdeu 1/10 de seu comprimento e este ficou medindo 36 metros. Nestas condições, o comprimento, em m, da peça antes da lavagem era igual a:

   a) 44
   b) 42
   c) 40

d) 38

6) (ENEM - 2010) Uma olimpíada foi disputada por 7 países. O quadro com o total de medalhas (ouro, prata e bronze) distribuídas para cada país é apresentado a seguir:

País	Total de medalhas
A	15
B	13
C	10
D	9
E	7
F	4
G	3

O número de medalhas de ouro distribuídas, considerando que este número é igual ao número de medalhas de prata, menos 7, e que o número de medalhas de bronze é o dobro das de prata, mais 8, é igual a:

a) 38

b) 15

c) 14

d) 8

e) 7

7) O valor de x que toma verdadeira a igualdade $2x - \left(\frac{x+2}{7}\right) = \frac{2}{3} - x$ é:

a) $\frac{2}{15}$

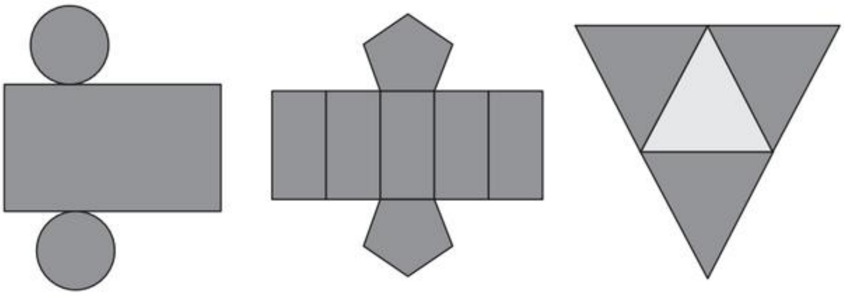
b) $\frac{1}{7}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{3}$

TD - Nº 07 - Assunto: Reconhecimento de figuras planas e espaciais.

1) (ENEM - 2012) Maria quer inovar sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas. Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?



a) Cilindro, prisma e tronco de cone.

b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

c) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

d) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

e) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

2) Refeição rápida ou fast-food (inglês) é o nome genérico dado ao consumo de alimentos que pode ser feito num intervalo pequeno de tempo. Este tipo de alimentação engloba essencialmente: sanduíches, pizzas, refrigerantes, hambúrgueres e batatas fritas e é muito apreciado pela maioria das crianças e jovens. Contudo, também os adultos têm vindo a aderir ao fast-food devido ao ritmo de vida acelerado que faz com que o tempo seja escasso até para comer. O fast-food virou sinônimo de um estilo de vida estressante que tem sido criticado desde o final do século XX. O consumo exagerado de fast-food pode ser prejudicial para a saúde porque as refeições são calóricas, com muita gordura e com pouca variedade de alimentos. Estes aspectos fazem com que as taxas de obesidade, diabetes, hipertensão, colesterol e doenças cardiovasculares aumentem significativamente, especialmente nas crianças e jovens.

Fonte: http://efa-espombal.blogspot.com.br/2007/07/o-fast-food-turma-b.html

A figura mostra um prato preparado em estabelecimentos de alimentos fast-food.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

a) Cone

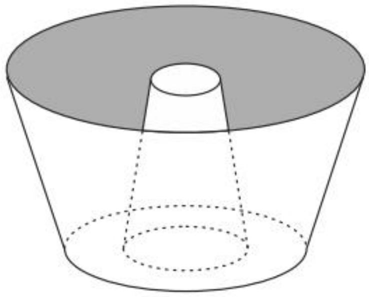
b) Esfera

c) Cilindro

d) Pirâmide

e) Tronco de pirâmide

3) (ENEM - 2013) Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:

a) um cone e um cilindro.

b) um troco de pirâmide e um cilindro.

c) dois troncos de pirâmide.

d) um tronco de pirâmide e um cilindro.

e) dois cilindros.

4) (ENEM - 2011) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

a) pirâmide.

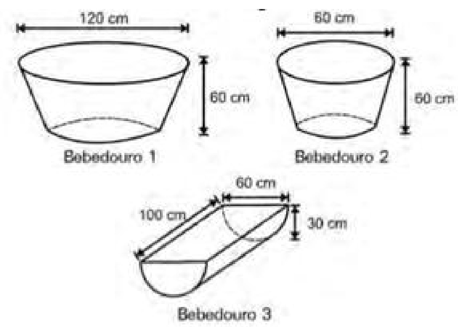
b) tronco de pirâmide.

c) cilindro.

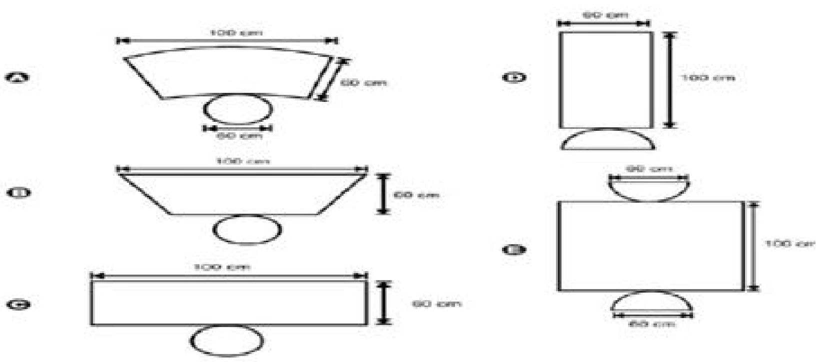
d) cone.

e) tronco de cone.

5) (ENEM - 2010) Alguns testes de prefere?ncia por bebedouros de a?gua foram realizados com bovinos, envolvendo tre?s tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 te?m a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e dia?metro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 e? um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



6) Fabricantes de móveis rústicos estão sempre inovando em suas criações. A figura mostra um banco de madeira formado pela combinação de dois troncos de pirâmides de bases quadradas.

Os polígonos que compõem as faces dessa figura são:

a) dois quadrados e oito trapézios isósceles.

b) dois quadrados e quatro trapézios isósceles.

c) dois quadrados e oito retângulos.

d) dois quadrados e quatro retângulos.

e) um quadrado e quatro trapézios isósceles.