UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

MARCELO LOPES DE OLIVEIRA

A MATEMÁTICA DO VESTIBULAR DA UECE

JUAZEIRO DO NORTE
2019

MARCELO LOPES DE OLIVEIRA

A MATEMÁTICA DO VESTIBULAR DA UECE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE
2019

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A Matemática do Vestibular da UECE

MARCELO LOPES DE OLIVEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 10 de julho de 2019.

Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Prof.ª Dr.ª Maria Silvana Alcântara Costa
Orientadora

Clarice Dias de Albuquerque

Prof.ª Dr.ª Clarice Dias de Albuquerque
UFCA

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade
UFCA

Dedico este trabalho a toda minha família, em especial aos meus pais José Alves de Oliveira e Maria das Graças Lopes de Oliveira, que me amam incondicionalmente e lutaram ao meu lado por essa conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

Ao meu pai e melhor amigo, José Alves de Oliveira, e a minha mãe, Maria das Graças Lopes de Oliveira, que tanto contribuíram na minha formação profissional e moral.

Aos meus queridos irmãos, Carlos, Cícero e Joelia, aos quais tenho uma profunda admiração e carinho e que sempre me apoiaram.

À minha namorada e futura esposa, Renata Gonçalves Silva, a qual sempre me apoiou nos momentos difíceis dessa jornada.

À minha orientadora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa pela paciência, disposição e contribuição para a construção desse trabalho.

A todos os colegas que fizeram parte dessa caminhada, em especial a Vanessa, Manuel e Jakson que além das viagens, dividiram horas e dias de estudos.

A todos os professores que compõem o PROFMAT da UFCA.

Ao IFCE - campus Cedro, por conciliar meus horários de trabalho com os do mestrado.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade de cursar o PROFMAT.

À CAPES pelo suporte financeiro.

"Nossa maior fraqueza está em desistir. O caminho mais certo de vencer é tentar mais uma vez."

Thomas Edison

RESUMO

A Matemática presente no vestibular da Universidade Estadual do Ceará - (UECE) requer do candidato conhecimentos específicos, esperando-se que o mesmo possua competências e habilidades para resolver as questões e situações problemas propostas no decorrer da prova. Partindo desse princípio, o presente trabalho retrata um breve histórico sobre os conteúdos de Matemática mais frequentes no vestibular da UECE nas suas últimas edições, mais precisamente no período de 2011 a 2018 (8 anos). São apresentados conteúdos e depois algumas questões com soluções e comentários acerca dos temas mais recorrentes, onde espera-se que o mesmo possa contribuir e nortear professores do Ensino Médio a trabalharem conteúdos que possam oportunizar o aluno a realizar uma prova exitosa.

Palavras-chave: Matemática. UECE. Vestibular.

ABSTRACT

The Mathematics present in the entrance exam of the State University of Ceará - (UECE) requires from the candidate specific knowledge, hoping that he / she will have skills and abilities to solve the problems and problems proposed during the exam. Based on this principle, the present paper portrays a brief history about the most frequent Mathematics contents in the UECE entrance exam in its latest editions, more precisely from 2011 to 2018 (8 years). Contents are presented and then some questions with solutions and comments on the most recurring topics, where it is expected that it can contribute and guide high school teachers to work on content that may enable the student to take a successful exam.

Keywords: Mathematics. UECE. Entrance exam.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ingresso ao quadro de alunos da Universidade Estadual do Ceará (UECE) se dá através de vestibulares assim como na Universidade Regional do Cariri (URCA), entretanto, o acesso à Universidade Federal do Ceará (UFC) e à Universidade Federal do Cariri (UFCA) se dá através do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Ressalta-se que dos vestibulares que acontecem no Estado do Ceará, o vestibular da UECE apresenta um bom nível de avaliação. Realizado em duas fases, onde a segunda fase é composta de questões específicas da área/curso escolhido ou pretendido pelo candidato.

As questões da área de Matemática são responsáveis pelo baixo rendimento, ou pela reprovação de muitos candidatos na primeira fase do vestibular da UECE. Conforme [5], nas últimas 14 edições dos vestibulares da UECE, houve 3487 candidatos eliminados no certame pelo fato de terem zerado a prova de Matemática, isso representa uma média de 249 candidatos reprovados por edição.

Assim, as questões da área de Matemática são responsáveis pela não aprovação, para a maioria dos candidatos, na primeira fase. A reprovação ou o candidato não atingir o perfil em Matemática está ligada as dificuldades de aprendizagem de Matemática que, de acordo com [15] (1994, p. 14), afirma que a Organização das Nações Unidas (ONU) considera que as escolas brasileiras possuem o segundo maior índice de reprovação na disciplina de Matemática em todo o mundo, e isso se torna um problema não só para os candidatos, mas para as instituições escolares da Educação Básica que precisam desenvolver estratégias, rever metodologias para corrigir a defasagem de aprendizado e oportunizar ao candidato ter chances reais de aprovação.

O foco desse trabalho é identificar quais os conteúdos de Matemática mais cobrados nas provas de vestibulares da Universidade Estadual do Ceará (UECE) cujo resultado pretende subsidiar professores do Ensino Médio para desenvolverem ações nas aulas de Matemática de preparação para os vestibulares da referida instituição e um material de apoio que possa ajudar os alunos candidatos interessados em Matemática.

A justificativa para a presente pesquisa surgiu a partir do momento que fui procurado por alunos e ex-alunos com dificuldades em resolver as questões de Matemática dos vestibulares da UECE, muitos comentavam que as questões eram abordadas de uma maneira diferente do que era visto na sala de aula. Vale ressaltar que a escolha da UECE para a pesquisa, se deu pelo sua importância não só para o estado do Ceará, mas como também para outros estados da Região Nordeste, visto que a mesma está espalhada por todo o Ceará.

Sobre o trabalho, o mesmo busca apresentar, de forma sucinta, sob a forma de tabelas, quais os assuntos mais abordados no exame. No decorrer da análise percebe-se que assuntos se repetem ao longo dos editais dos anos escolhidos para a pesquisa.

Para uma melhor compreensão, dividiu-se o presente trabalho em cinco capítulos, assim distribuídos. No Capítulo 2 encontra-se informações sobre a UECE, seu vestibular, cursos de graduação e pós graduação e seus projetos de extensão pelo interior do estado. Ainda nesse capítulo, aborda-se quais conteúdos foram mais cobrados nos últimos oito anos para assim identificar quais as prioridades elencadas na preparação para a prova, bem como a análise de questões de graus de dificuldades diferentes.

No Capítulo 3, apresentaremos os principais resultados como teoremas, proposições e definições, que julgamos serem necessários para que o candidato obtenha êxito na prova de Matemática do vestibular da UECE. Dividido em 4 seções, esse capítulo fará uma abordagem mais detalhada de conteúdos como funções quadráticas, lei dos cossenos, Teorema de Pitágoras, entre outros assuntos. Vale ressaltar que todos os conteúdos presentes nestas seções foram escolhidos a partir do resultado obtido no Capítulo 2, isto é, a partir da análise dos conteúdos de Matemática mais recorrentes nos últimos 8 anos deste exame.

Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos algumas questões dos vestibulares da UECE. Essas questões abrangem os conteúdos vistos no capítulo anterior. Para facilitar o entendimento das soluções, decidimos expor em algumas questões, figuras, desenhos ou esboço da situação pedida, pois o objetivo aqui é que o leitor não tenha nenhuma dúvida a respeito das soluções apresentadas.

2 A MATEMÁTICA NA 1ª FASE

A Universidade Estadual do Ceará (UECE) é uma das universidades que compõem o quadro de universidades públicas no Ceará ao lado da Universidade Federal do Ceará (UFC), Universidade Federal do Cariri (UFCA), Universidade Regional do Cariri (URCA) e da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). Seu vestibular é um dos mais procurados pelos discentes cearenses. Pensando nisso, este capítulo tem como propósito fazer uma análise das questões de Matemática presentes nas edições dos seus vestibulares nos últimos 8 anos.

Iniciaremos o capítulo com um breve histórico sobre a UECE, e sua expansão pelo interior do Ceará. Todas as informações necessárias para escrever este capítulo podem ser encontradas em [2], [3], [4], [5] e [6].

2.1 Breve Histórico Sobre a UECE

A Universidade Estadual do Ceará (UECE) teve sua origem a partir da lei Nº 9.753 de 18 de Outubro de 1973, com o Poder Executivo instituindo a Fundação Educacional do Estado do Ceará (FUNEDUCE). Inicialmente, a fundação foi presidida pela professora Antonieta Cals de Oliveira.

Em 1975, as Unidades de Ensino Superior: Escola de Serviço Social de Fortaleza, Faculdade de Veterinária do Ceará, Escola de Administração do Ceará, Escola de Enfermagem São Vicente de Paula, Televisão Educativa Canal 5 e a Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos, em Limoeiro do Norte foram incorporadas ao patrimônio da FUNEDUCE. Essa incorporação foi resultado da resolução Nº 2 de 05 de Março de 1975, referendada pelo Decreto Nº 11.233, de 10 de março do citado ano, a qual criou a Universidade Estadual do Ceará (UECE). O 1º reitor da instituição foi o professor Antonio Martins Filho, o qual prestou relevantes serviços na área da Educação no Ceará, vale destacar que o mesmo contribuiu significativamente na criação da Universidade Federal do Ceará (UFC) e da Universidade Regional do Cariri (URCA).

Atualmente, a UECE possui cursos de graduação e pós-graduação em diversas áreas do conhecimento, sua principal missão é produzir conhecimentos e formar profissionais qualificados para promover o desenvolvimento do Ceará, e com isso, melhorar a qualidade de vida do povo cearense. Como se observa, a referida instituição tem papel importante não só em Fortaleza, como também em diversas regiões do estado.

Conforme [2], a UECE possui atualmente cerca de 19 mil estudantes e 1.000 professores espalhados por 12 centros e faculdades, que oferecem 77 cursos de graduação presenciais e a distância, 27 mestrados, 9 doutorados, 154 grupos de pesquisa atuantes em 138 laboratórios e 57 projetos de extensão.

Oferece doutorados em Administração, Biotecnologia, Ciências Fisiológicas, Ciências Veterinárias, Educação, Geografia, Cuidados Clínicos em Enfermagem e Saúde, Linguística Aplicada, Educação e Saúde Coletiva.

Em relação aos cursos de mestrado, além daqueles ofertados no Campus sede, podemos destacar o curso de Educação e Ensino ofertado em Quixadá/Limoeiro do Norte, o mestrado interdisciplinar em História e Letras com funcionamento em Quixadá, além do Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) que é ofertado em Fortaleza e na cidade de Quixadá.

De acordo com o Ranking Universitário da Folha de São Paulo (RUF) de 2018, é considerada a 11ª melhor universidade estadual do Brasil. Por este mesmo ranking, é a 57ª melhor universidade brasileira. Em 2016, seus cursos atingiram nota máxima no Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade). Além disso, os cursos de maiores notas na UECE foram o de Medicina e Enfermagem com notas 5, e os de Nutrição, Serviço Social e Medicina Veterinária com notas 4, conforme [3].

A UECE também tem papel importante na educação profissional. Conforme [4], a instituição oferece cursos de formação inicial e continuada e de educação profissional de nível médio voltado para o público interno e externo da Universidade além de permitir o acesso ao Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego (PRONATEC) programa do governo federal, os cursos são ofertados através da Unidade de Educação Profissional (UNEP).

A UECE tem como principal campus o do Itaperi em Fortaleza-CE.

O campus é dividido em centros ou núcleos, agrupando os cursos por afinidades, sendo assim distribuídos: Centro de Ciências da Saúde (CCS): Ciências Biológicas, Educação Física, Enfermagem, Medicina, Nutrição, Terapia Ocupacional. Centro de Ciências e Tecnologia (CCT): Ciência da Computação, Ciências, Física, Geografia, Matemática e Química. Centro de Educação (CED): Formação de professor para o Ensino Fundamental do primeiro ao nono ano nas áreas específicas e Pedagogia. Centro de Estudos Sociais Aplicados (CESA): Administração, Serviço Social, Ciências Contábeis e no Centro de Humanidades (CH) oferta os Cursos de Ciências Sociais, Filosofia, História, Letras, Música e Psicologia. Faculdade de Veterinária (FAVET): Medicina Veterinária.

2.1.1 Expansão da UECE pelo Interior no Ceará

A UECE oferece cursos de graduação presenciais em várias cidades do interior como se detalha a seguir. Na cidade de Crateús tem-se a Faculdade de Educação de Crateús (FAEC), que oferece os cursos de Licenciatura em Ciências Biológicas, Pedagogia, Química e História.

Na cidade de Iguatu, a Faculdade de Educação de Ciências e Letras de Iguatu

(FECLI), onde oferta os cursos de Licenciatura em Física, Ciências Biológicas, Letras, Matemática e Pedagogia.

No município de Itapipoca a Faculdade de Educação de Itapipoca (FACEDI), oferta os cursos de Ciências Biológicas, Ciências Sociais, Pedagogia e Química.

Na cidade de Limoeiro do Norte com a Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos (FAFIDAM), onde oferta os cursos de Ciências Biológicas, Educação do Campo, Física, Geografia, História, Letras, Matemática e Pedagogia.

Na cidade de Quixadá com a Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC), que oferece os cursos de Licenciatura de Ciências, Ciências Biológicas, Física, Historia, Letras, Matemática, Pedagogia e Química.

Na cidade de Tauá com o Centro de Educação, Ciências e Tecnologia da Região dos Inhamuns (CECITEC), onde oferta os cursos de Licenciatura em Pedagogia e Química e Ciências Biológicas.

A expansão da Universidade Estadual do Ceará para as cidades do interior, além de favorecer a inserção do jovem na academia minimizando a distância e as dificuldades de acesso também apresenta-se como um ponto de crescimento econômico das cidades nas quais existem a ramificação da UECE.

2.2 Conteúdos Presentes no Vestibular da UECE

Conforme editais, o ingresso aos cursos da UECE acontece de duas formas. Pelo vestibular, onde as vagas são distribuídas em duas modalidades: 50% das vagas em todos os cursos são disponibilizadas para ampla disputa e 50% das vagas para o sistema de cotas; pelo ENEM, caso existam vagas ociosas referente a modalidade ampla disputa.

Dividido em duas fases, o vestibular é realizado semestralmente, sendo a segunda fase exclusiva para as provas específicas e a redação.

Atualmente o vestibular da UECE (primeira fase) é composto por uma prova objetiva de conhecimentos gerais, de múltipla escolha, com quatro alternativas (A, B, C, D), de caráter eliminatório e classificatório. A prova é composta de 70 questões distribuídas da seguinte forma.

Tabela 1: Composição da prova.

Disciplina	Número de questões	Escore bruto por questão	Valor total
Língua Portuguesa	12	$2,0$	$24,0$
Língua Estrangeira	08	$2,0$	$16,0$
Geografia	08	$2,0$	$16,0$
História	08	$2,0$	$16,0$
Matemática	10	$2,0$	$20,0$
Física	08	$2,0$	$16,0$
Química	08	$2,0$	$16,0$
Biologia	08	$2,0$	$16,0$
Total	70	$---$	$140,0$

A Matemática do vestibular da UECE nas suas últimas edições, mais precisamente no período de 2011 a 2018 (8 anos), constou de 10 (dez) questões. Conforme os editais do referido exame, os conteúdos programáticos estão divididos em 15 itens explicitados a seguir:

1. **Conjuntos**: Noções básicas de conjuntos. Operações com conjuntos: união, interseção, diferença, complementação e produto cartesiano. Cardinalidade de conjuntos finitos. Raciocínio lógico-matemático.

2. **Conjuntos Numéricos**: Conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, inteiros $\mathbb{Z}$, racionais $\mathbb{Q}$ e reais $\mathbb{R}$. Operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação nos conjuntos numéricos. Propriedades destas operações. Médias (aritmética e ponderada). Módulo e suas propriedades. Desigualdades. Intervalos. Sistema de Medida: comprimento, superfície, volume, tempo e massa.

3. **Teoria Elementar dos Números**: Números primos, algoritmo da Divisão. Sistemas de numeração. Critérios de divisibilidade. Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Princípio de indução finita.

4. **Proporcionalidade**: Razões e proporções: propriedades. Regra de três simples e composta. Regra de sociedade. Porcentagem. Juros simples. Escalas.

5. **Relações e Funções**: Relações binárias. Domínio, contradomínio e imagem de funções reais de variável real. Gráficos de relações e funções. Funções injetivas, sobrejetivas, bijetivas, pares, ímpares e periódicas. Composição de funções. Funções invertíveis.

6. **Números Complexos**: O conjunto C dos complexos. Módulo, argumento, formas algébrica e trigonométrica. Operações com números complexos: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Interpretação geométrica.

7. **Polinômios**: Conceitos. Funções lineares e quadráticas - propriedades, raízes, e gráficos. Equações biquadradas. Adição e multiplicação de polinômios. Algoritmo da divisão. Fatoração. Equações polinomiais. Relações entre coeficientes e raízes. Raízes reais e complexas. Raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros.

8. **Exponenciais e Logaritmos**: Funções exponenciais e logarítmicas: propriedades e gráficos. Mudança de base. Equações e inequações exponenciais e logarítmicas.

9. **Trigonometria**: Grau e radiano. Funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante - propriedades e gráficos. Fórmulas trigonométricas. Identidades trigonométricas. Funções trigonométricas inversas e seus gráficos. Equações trigonométricas. Leis do seno e cosseno. Resolução trigonométrica nos triângulos.

10. **Progressões**: Progressões aritméticas - termo geral, soma dos termos, propriedades. Progressões geométricas - termo geral, soma e produtos dos termos, propriedades.

11. **Análise Combinatória**: Princípio geral de contagem. Arranjos, permutações e combinações simples. Binômio de Newton. Triângulo de Pascal.

12. **Matrizes e Sistemas Lineares**: Operações com matrizes - adição, subtração e multiplicação. Propriedades destas operações. Sistemas lineares e matrizes. Resolução e discussão de sistemas lineares. Determinantes e suas propriedades. Regra de Cramer, Regra de Sarrus e Teorema de Laplace.

13. **Geometria Plana**: Triângulos e quadriláteros. Igualdade e semelhança de triângulos. Propriedades dos ângulos, lados, alturas e medianas de triângulos. Relações métricas nos triângulos. Circunferências, polígonos regulares e relações métricas. Áreas e perímetros.

14. **Geometria Espacial**: Retas e planos. Prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Poliedros e relação de Euler. Áreas e volumes.

15. **Geometria Analítica Plana**: Distância entre dois pontos. Equação da reta. Paralelismo e perpendicularismo. Ângulo entre duas retas. Distância de um ponto a uma reta. Equações e propriedades das curvas - circunferência, elipse, hipérbole e parábola. Posição relativa de uma reta em relação a uma circunferência. Identificação da curva representada pela equação $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$.

Em sequência faremos uma análise dos itens de Matemática que estão presentes nas questões dos vestibulares da 1ª fase nos últimos 8 anos, com o propósito de observarmos quais os conteúdos que ocorrem com maior frequência. Para esse levantamento, dividiremos as questões em dois tipos:
TIPO 1: Questões que abordem apenas um conteúdo.
TIPO 2: Questões que abordem mais de um conteúdo.

Tabela 2: Questões 2018.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(13)	1	Conjuntos
(14)	1	Exponenciais e Logaritmos
(15)	1	Progressões
(16)	2	Teoria Elementar dos Números, Conjuntos Numéricos
(17)	1	Geometria Analítica Plana
(18)	1	Trigonometria
(19)	1	Geometria Plana
(20)	1	Progressões
(21)	1	Geometria Plana
(22)	1	Geometria Espacial

Tabela 3: Questões 2018.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(13)	2	Teoria Elementar dos Números, Conjuntos Numéricos
(14)	1	Progressões
(15)	1	Trigonometria
(16)	1	Teoria Elementar dos Números
(17)	1	Geometria Espacial
(18)	1	Geometria Plana
(19)	1	Exponenciais e Logaritmos
(20)	1	Matrizes e Sistemas Lineares
(21)	1	Geometria Plana
(22)	1	Trigonometria

Tabela 4: Questões 2017.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(13)	1	Teoria Elementar dos Números
(14)	1	Relações e Funções
(15)	2	Polinômios, Trigonometria
(16)	1	Progressões
(17)	1	Polinômios
(18)	1	Análise Combinatória
(19)	2	Progressões, Trigonometria
(20)	2	Polinômios, Geometria Analítica Plana
(21)	2	Geometria Plana, Geometria Espacial
(22)	1	Geometria Plana

Tabela 5: Questões 2017.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(13)	1	Teoria Elementar dos Números
(14)	2	Teoria Elementar dos Números, Polinômios
(15)	1	Números Complexos
(16)	1	Polinômios
(17)	1	Geometria Plana
(18)	1	Análise Combinatória
(19)	2	Progressões, Geometria Plana, Trigonometria, Polinômios
(20)	1	Geometria Analítica Plana
(21)	1	Polinômios
(22)	2	Geometria Plana, Geometria Espacial

Tabela 6: Questões 2016.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Conjuntos
(16)	1	Conjuntos Numéricos
(17)	1	Conjuntos Numéricos
(18)	1	Progressões
(19)	1	Geometria Plana
(20)	1	Geometria Plana
(21)	2	Geometria Plana, Trigonometria
(22)	1	Polinômios
(23)	1	Conjuntos Numéricos
(24)	1	Geometria Espacial

Tabela 7: Questões 2016.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Conjuntos Numéricos
(16)	1	Proporcionalidade
(17)	2	Progressões, Polinômios, Conjuntos Numéricos
(18)	2	Exponenciais e Logaritmos, Polinômios
(19)	2	Relações e Funções, Exponenciais e Logaritmos
(20)	2	Polinômios, Geometria Plana
(21)	2	Geometria Plana, Trigonometria
(22)	1	Análise Combinatória
(23)	2	Matrizes e Sistemas Lineares, Polinômios
(24)	1	Polinômios

Tabela 8: Questões 2015.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Polinômios
(16)	1	Conjuntos
(17)	1	Proporcionalidade
(18)	1	Geometria Plana
(19)	1	Trigonometria
(20)	1	Teoria Elementar dos Números
(21)	2	Exponenciais e Logaritmos, Polinômios, Trigonometria
(22)	2	Polinômios, Geometria Analítica Plana
(23)	1	Geometria Plana
(24)	1	Matrizes e Sistemas Lineares

Tabela 9: Questões 2015.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Matrizes e Sistemas Lineares
(16)	1	Polinômios
(17)	1	Proporcionalidade
(18)	1	Matrizes e Sistemas Lineares
(19)	2	Relações e Funções, Análise Combinatória
(20)	1	Teoria Elementar dos Números
(21)	2	Matrizes e Sistemas Lineares, Trigonometria
(22)	1	Geometria Plana
(23)	2	Progressões, Exponenciais e Logaritmos
(24)	2	Geometria Plana, Geometria Analítica Plana

Tabela 10: Questões 2014.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	2	Teoria Elementar dos Números, Progressões
(16)	2	Números Complexos, Polinômios
(17)	1	Geometria Analítica Plana
(18)	1	Polinômios
(19)	1	Conjuntos Numéricos
(20)	1	Geometria Plana
(21)	2	Exponenciais e Logaritmos, Geometria Analítica Plana
(22)	1	Trigonometria
(23)	1	Progressões
(24)	1	Geometria Espacial

Tabela 11: Questões 2014.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	2	Polinômios, Matrizes e Sistemas Lineares
(16)	2	Geometria Plana, Conjuntos Numéricos
(17)	1	Matrizes e Sistemas Lineares
(18)	1	Polinômios
(19)	2	Progressões, Teoria Elementar dos Números
(20)	2	Análise Combinatória, Trigonometria
(21)	1	Geometria Espacial
(22)	2	Relações e Funções, Análise Combinatória
(23)	1	Geometria Plana
(24)	2	Progressões, Exponenciais e Logaritmos

Tabela 12: Questões 2013.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	2	Teoria Elementar dos Números, Análise Combinatória
(16)	1	Polinômios
(17)	2	Progressões, Trigonometria
(18)	1	Proporcionalidade
(19)	1	Exponenciais e Logaritmos
(20)	2	Geometria Analítica Plana, Conjuntos Numéricos
(21)	1	Geometria Analítica Plana
(22)	2	Conjuntos Numéricos, Geometria Espacial
(23)	1	Proporcionalidade
(24)	1	Polinômios

Tabela 13: Questões 2013.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Teoria Elementar dos Números
(16)	2	Geometria Espacial, Geometria Plana
(17)	2	Conjuntos Numéricos, Matrizes e Sistemas Lineares
(18)	2	Polinômios, Matrizes e Sistemas Lineares
(19)	2	Conjuntos Numéricos, Exponenciais e Logaritmos
(20)	2	Conjuntos Numéricos, Progressões
(21)	2	Geometria Plana, Polinômios
(22)	1	Análise Combinatória
(23)	1	Geometria Plana
(24)	1	Proporcionalidade

Tabela 14: Questões 2012.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	2	Geometria Plana, Proporcionalidade
(16)	1	Polinômios
(17)	1	Teoria Elementar dos Números
(18)	2	Relações e Funções, Conjuntos Numéricos
(19)	1	Geometria Plana
(20)	1	Exponenciais e Logaritmos
(21)	1	Geometria Analítica Plana
(22)	2	Geometria Espacial, Análise Combinatória
(23)	1	Geometria Plana
(24)	2	Polinômios, Números Complexos

Tabela 15: Questões 2012.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Conjuntos
(16)	1	Teoria Elementar dos Números
(17)	2	Progressões, Exponenciais e Logaritmos
(18)	1	Análise Combinatória
(19)	1	Polinômios
(20)	1	Matrizes e Sistemas Lineares
(21)	1	Geometria Plana
(22)	2	Geometria Espacial, Geometria Plana
(23)	1	Trigonometria
(24)	1	Geometria Plana

Tabela 16: Questões 2011.2.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Conjuntos
(16)	2	Teoria Elementar dos Números, Análise Combinatória
(17)	1	Progressões
(18)	1	Trigonometria
(19)	2	Polinômios, Exponenciais e Logaritmos
(20)	1	Polinômios
(21)	1	Conjuntos Numéricos
(22)	2	Conjuntos Numéricos, Polinômios
(23)	2	Matrizes e Sistemas Lineares, Geometria Analítica Plana
(24)	1	Proporcionalidade

Tabela 17: Questões 2011.1.

Questão	Tipo	Item Cobrado
(15)	1	Conjuntos
(16)	1	Relações e Funções
(17)	1	Análise Combinatória
(18)	2	Progressões, Exponenciais e Logaritmos
(19)	1	Proporcionalidade
(20)	2	Geometria Analítica Plana, Geometria Plana
(21)	1	Trigonometria
(22)	2	Geometria Plana, Polinômios
(23)	2	Geometria Plana, Trigonometria
(24)	2	Geometria Espacial, Geometria Plana

2.2.3 Sínteses das Análises

Conforme vimos anteriormente, percebe-se que nessas edições dos vestibulares há uma grande maioria de questões do Tipo 1. Das 160 questões analisadas, 104 questões são do Tipo 1, o que correspondem a 65% do total, e 56 questões são do Tipo 2, o que correspondem a 35%.

Outra informação importante é que das 16 edições analisadas, apenas em 3 dessas a quantidade de questões do Tipo 2 foi superior as do Tipo 1, a saber: 2013.1, 2014.1 e 2016.1.

Feito esse levantamento, analisaremos a distribuição das questões (Tipo 1 ou Tipo 2) por conteúdos dos editais ao longo desses 8 anos:

Tabela 18: Questões tipo 1 por conteúdo.

Conteúdo	Número de Questões	Porcentagem
Conjuntos	6	5,77%
Conjuntos Numéricos	6	5,77%
Teoria Elementar dos Números	8	7,69%
Proporcionalidade	8	7,69%
Relações e Funções	2	1,92%
Números Complexos	1	0,96%
Polinômios	14	13,46%
Exponenciais e Logaritmos	4	3,85%
Trigonometria	8	7,69%
Progressões	7	6,73%
Análise Combinatória	6	5,77%
Matrizes e Sistemas Lineares	6	5,77%
Geometria Plana	18	17,31%
Geometria Espacial	5	4,81%
Geometria Analítica Plana	5	4,81%
Total	104	100%

Tabela 19: Questões tipo 2 por conteúdos.

Conteúdo	Número de Questões	Porcentagem
Conjuntos Numéricos, Teoria Elementar dos Números	2	3,57%
Conjuntos Numéricos, Polinômios, Progressões	1	1,79%
Conjuntos Numéricos, Geometria Plana	1	1,79%
Conjuntos Númericos, Geometria Analítica Plana	1	1,79%
Conjuntos Numéricos, Geometria Espacial	1	1,79%
Conjuntos Numéricos, Matrizes e Sistemas Lineares	1	1,79%
Conjuntos Numéricos, Exponenciais e Logaritmos	1	1,79%
Conjuntos Numéricos, Progressões	1	1,79%
Conjuntos Numéricos, Relações e Funções	1	1,79%
Conjuntos Numéricos, Polinômios	1	1,79%
Teoria Elementar dos Números, Polinômios	1	1,79%
Teoria Elementar dos Números, Progressões	2	3,57%
Teoria Elementar dos Números, Análise Combinatória	2	3,57%
Proporcionalidade, Geometria Plana	1	1,79%
Relações e Funções, Exponenciais e Logaritmos	1	1,79%
Relações e Funções, Análise Combinatória	2	3,57%
Números Complexos, Polinômios	2	3,57%
Polinômios, Trigonometria	1	1,79%
Polinômios, Geometria Analítica Plana	2	3,57%
Polinômios, Progressões, Geometria Plana, Trigonometria	1	1,79%
Polinômios, Exponenciais e Logaritmos	2	3,57%
Polinômios, Geometria Plana	3	5,36%
Polinômios, Matrizes e Sistemas Lineares	3	5,36%
Polinômios, Exponenciais e Logaritmos, Trigonometria	1	1,79%
Exponenciais e Logaritmos, Progressões	4	7,14%
Exponenciais e Logaritmos, Geometria Analítica Plana	1	1,79%
Trigonometria, Progressões	2	3,57%
Trigonometria, Geometria Plana	3	5,36%
Trigonometria, Matrizes e Sistemas Lineares	1	1,79%
Trigonometria, Análise Combinatória	1	1,79%
Análise Combinatória, Geometria Espacial	1	1,79%
Matrizes e Sistemas Lineares, Geometria Analítica Plana	1	1,79%
Geometria Plana, Geometria Espacial	5	8,93%
Geometria Plana, Geometria Analítica Plana	2	3,57%
Total	56	100%

Analisando as tabelas 18 e 19, percebe-se que alguns conteúdos são mais recorrentes em relação aos demais. Entre os mais cobrados, temos os seguintes:

Tabela 20: Conteúdos recorrentes.

Conteúdos	Nº de Questões Tipo 1	Nº de Questões Tipo 2	Total
Geometria Plana	18	–	–
Polinômios	14	–	–
Trigonometria	8	–	–
Progressões	7	–	–
Total	47	41	88

De acordo com a tabela 19 (Questões Tipo 2), temos um total de 34 combinações diferentes de conteúdos, assim, decidiu-se observar quais os 4 conteúdos mais presentes nessas combinações.

Feita essa análise, concluímos que de 160 questões analisadas, 88 questões (55%) versam sobre os conteúdos de Geometria Plana, Polinômios, Trigonometria e Progressões, e 72 questões (45%) são referentes a outros itens, os quais não abordaremos neste trabalho.

A partir desse levantamento, no capítulo seguinte trataremos sobre os conteúdos mais frequentes.

3 ABORDAGEM DE CONTEÚDOS

O capítulo em questão traz os principais resultados dos conteúdos que foram mais recorrentes nos vestibulares da UECE nos últimos 8 anos.

Para um bom êxito na prova, o aluno precisa ter em mente alguns resultados para as resoluções das questões. No decorrer do capítulo, trataremos de algumas definições, proposições e teoremas que são importantes para a resolução da prova de Matemática.

Neste capítulo serão abordados os principais resultados da Geometria Plana, Polinômios, Trigonometria e Progressões. Lembrando que tais resultados são apenas um complemento para a resolução das questões, para uma melhor aprendizagem e consequentemente um sucesso na prova, é aconselhável que o aluno busque outras referências para que o mesmo tenha um conhecimento mais sólido.

Toda a teoria apresentada neste capítulo pode ser encontrada em [1], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13] e [14].

3.1 Geometria Plana

A Geometria Plana é um tema imprescindível nos currículos do Ensino Básico, uma vez que seus conceitos, suas formulações e suas aplicações são extremamente relevantes para os alunos nessa fase de ensino.

É no mínimo contraditória uma primeira discussão sobre o tema "Geometria Plana" somente na última fase do Ensino Fundamental (9° ano) na maioria das instituições públicas do nosso país, pois o contato dos educandos com o tema apresenta-se constantemente em sua vida cotidiana, no contato com a arte e, principalmente, em seu meio cultural.

Outro fato notório que acaba agravando mais ainda a situação ocorre através da divergência entre o número de professores com formação em Matemática e o número de professores que ministram Geometria Plana nesta última etapa do Ensino Fundamental.

Dessa forma, há uma sobrecarga dos professores de Matemática do Ensino Médio ao ministrarem Geometria na última fase do Ensino Básico. Fato bastante preocupante, visto que, nesse momento os alunos estão prestes a se depararem com os vestibulares, nos quais a exigência sobre o tema Geometria ocorre com uma frequência alta.

Devido às dificuldades citadas acima, serão explanados os principais conceitos e resultados da Geometria Plana a fim de torná-los acessíveis e compreensíveis pelos alunos da Educação Básica e, sobretudo, para aqueles que almejam prestar vestibular na UECE.

Os axiomas são imprescindíveis na Geometria Plana por envolver também definições, propriedades e teoremas. Neste texto omitiremos os axiomas que são a base da

Geometria Plana.

Assumiremos que **ponto, reta** e **plano** são conceitos primitivos, isto é, não são passíveis de definição. Tais conceitos são essenciais para o desenvolvimento da Geometria.

Definição 1 *Sejam A e B pontos distintos de um plano σ. Define-se segmento de reta AB (indicado por AB) como a união dos pontos que estão entre A e B e os extremos A e B.*

Figura 1: Segmento de reta AB.

Escreveremos $\overline{AB}$ para denotar a medida do segmento AB.

Se P é um ponto qualquer de σ, então existem duas possibilidade para P em relação ao segmento AB.

- P pertence a AB. Neste caso, $P = A$, $P = B$ ou P está no interior de AB.

Figura 2: P pertencente a AB.

- P não pertence a AB. Neste caso, ocorrem três casos simultâneos: $P \neq A$, $P \neq B$ e P no exterior à AB.

Figura 3: P não pertencente a AB.

Definição 2 *Sejam A e B pontos distintos de um plano σ. Define-se semirreta AB (simbolizado por $\overrightarrow{AB}$) como a união do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos $P \in \sigma$ tais que B encontra-se entre A e P.*

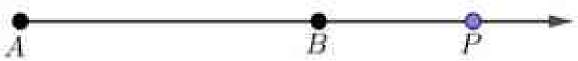


Figura 4: Semirreta AB.

Definição 3 *Sejam A, B e O pontos distintos em σ. Define-se ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ (simbolizado por $A\hat{O}B$ ou $\hat{O}$) como uma das regiões de σ limitada pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

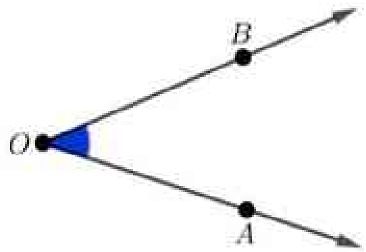


Figura 5: Ângulo $A\hat{O}B$.

Usaremos α, β, γ ou θ para denotarmos as medidas de ângulos, e quando for necessário, identificaremos o ângulo com a sua medida. Por exemplo, $A\hat{O}B = \alpha$, ou $\hat{O} = \alpha$ para significar que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é α graus.

Definição 4 *Dizemos que os pontos distintos A, B e C de um plano σ são colineares quando existir uma reta r tal que $A, B, C \in r$, caso contrário, dizemos que são não colineares.*

Definição 5 *Sejam A, B e C pontos não colineares em σ. Define-se triângulo ABC (simbolizado por $\triangle ABC$) como a região de σ delimitada pelos segmentos de reta AB, BC e CA.*

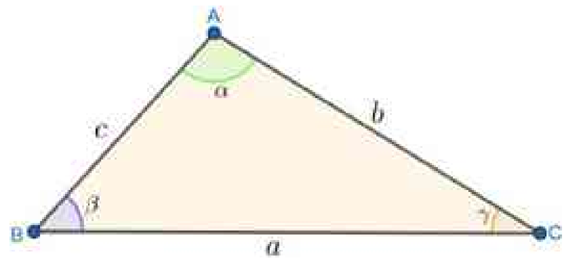


Figura 6: Triângulo ABC.

No triângulo ABC da Figura 6 destacam-se seus principais elementos:

I. A, B e C são os vértices do $\triangle ABC$;

II. AB, BC e AC são os lados do $\triangle ABC$;

III. $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$ são as medidas dos lados do $\triangle ABC$;

IV. $A\hat{B}C = \beta, B\hat{C}A = \gamma$ e $C\hat{A}B = \alpha$ são as medidas dos ângulos do $\triangle ABC$;

V. $2p = a + b + c$ é o perímetro do $\triangle ABC$;

VI. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do $\triangle ABC$.

Além disso, um triângulo ABC qualquer em um plano σ pode ser classificado conforme as medidas de seus lados como *Equilátero, Isósceles ou Escaleno.*

I. Se os três lados possuem medidas iguais, então o $\triangle ABC$ é **equilátero**;

II. Se pelos menos dois dos lados possuem mesma medida, então o $\triangle ABC$ é **isósceles**;

III. Se os três lados possuem medidas distintas, então o $\triangle ABC$ é **escaleno**.

Também é possível classificar um triângulo ABC quanto às medidas de seus ângulos. Para esta finalidade é importante destacar que um ângulo de medida α é dito **agudo, reto** ou **obtuso** respectivamente, quando $0° < \alpha < 90°$, $\alpha = 90°$ ou $90° < \alpha < 180°$.

I. Se todos os ângulos forem agudos, então o $\triangle ABC$ é **acutângulo**;

II. Se algum ângulo for reto, então o $\triangle ABC$ é **retângulo**;

III. Se algum ângulo for obtuso, então o $\triangle ABC$ é **obtusângulo**.

Dado um triângulo ABC qualquer em um plano σ destaca-se ainda alguns elementos quanto ao estudo de triângulos: **altura, mediana, bissetriz** e **mediatriz**.

Definição 6 *Seja ABC um triângulo. A* ***altura*** *relativa ao lado BC é o segmento de reta AH, onde H é o pé da perpendicular baixada de A à reta $\overleftrightarrow{BC}$. De modo análogo definimos as alturas relativas aos lados AC e AB.*

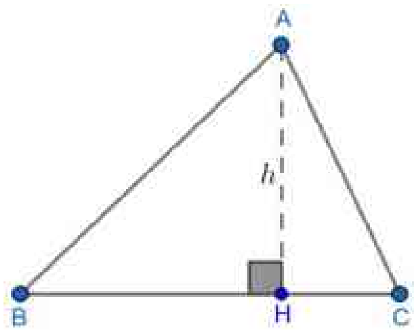


Figura 7: Altura do $\triangle ABC$.

Definição 7 *A* ***mediana*** *relativa ao lado BC é o segmento de reta AM, onde M é o ponto médio do lado BC. De forma similar definimos as medianas relativas aos lados AC e AB.*

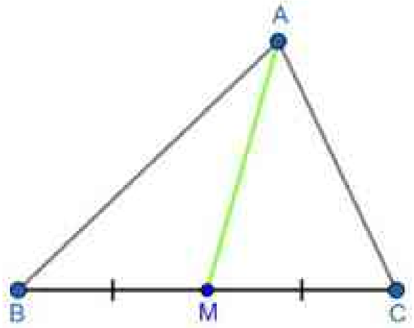


Figura 8: Mediana do $\triangle ABC$.

Definição 8 *A* ***bissetriz*** *relativa ao ângulo $B\hat{A}C$ é a semirreta $\overrightarrow{AD}$ que divide o ângulo $\hat{A}$ em dois ângulos iguais. Analogamente definimos as bissetrizes dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.*

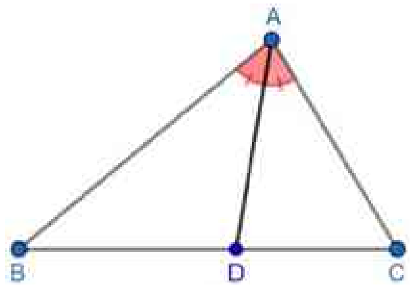


Figura 9: Bissetriz do $\triangle ABC$.

Definição 9 *A* ***mediatriz*** *relativa ao lado BC é a reta perpendicular que intercepta seu ponto médio.*

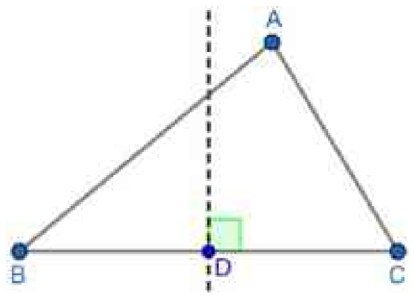


Figura 10: Mediatriz do $\triangle ABC$.

A seguir, enunciaremos e demonstraremos uma proposição a fim de construir um argumento eficiente para a demonstração do teorema do *ângulo externo*. Mas antes disso, considere no plano as retas r, s e t, com t intersectando r e s respectivamente, nos pontos A e B, conforme figura abaixo:

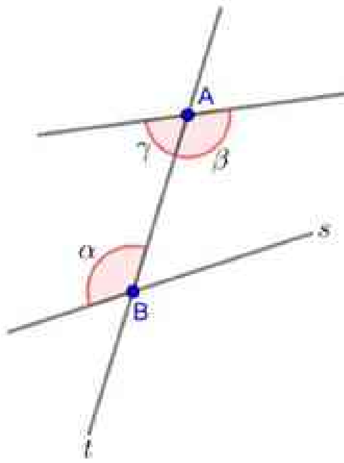


Figura 11: Ângulos alternos internos e colaterais internos.

Como indicado na Figura 11, os ângulos de medida α e β são *ângulos alternos internos* e os ângulos de medida α e γ são *ângulos colaterais internos.* De posse das notações acima, assumiremos o seguinte critério para o paralelismo de duas retas:

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180°.$$

Proposição 3.1.1 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a* 180°.

Demonstração: Considere ABC um triângulo tal que $\overleftrightarrow{DE}$ é a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e $A \in \overleftrightarrow{DE}$.

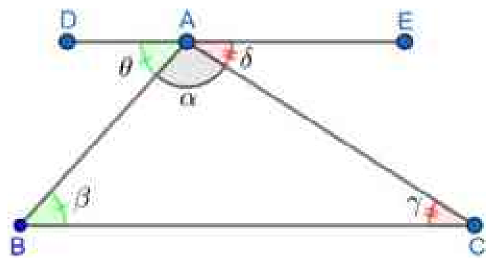


Figura 12: Soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$.

Perceba que:

- $\beta = \theta$, pois são alternos internos;
- $\gamma = \delta$, pois são alternos internos. Logo,

$$\theta + \alpha + \delta = 180° \Rightarrow$$
$$\beta + \alpha + \gamma = 180°.$$

□

Teorema 3.1.1 *Dado um triângulo qualquer, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer, conforme Figura 13.

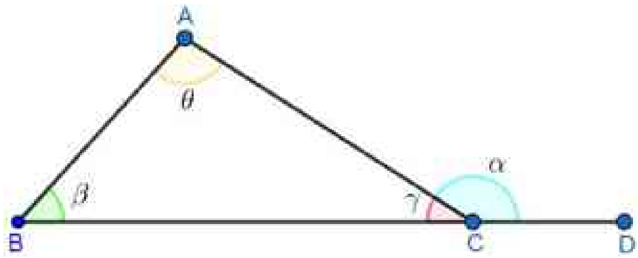


Figura 13: Teorema do ângulo externo.

Devemos mostrar que $\alpha = \theta + \beta$. De fato, pela Proposição 3.1.1 temos,

$$\theta + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \theta + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

Por outro lado,

$$\gamma + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \gamma.$$

Portanto, $\alpha = \theta + \beta$. $\square$

3.1.1 Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos

Nesta subeseção apresentaremos dois dos principais resultados da Geometria Euclidiana Plana, o *Teorema de Tales* e os casos de semelhança de triângulos. A partir destes resultados, enunciaremos e demonstraremos as relações métricas no triângulo retângulo, bem como o *Teorema de Pitágoras.*

Teorema 3.1.2 ***(Teorema de Tales).*** *Sejam r, s e t retas paralelas. Dados os pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$ tais que A, B, C e A', B' e C', nessa ordem, pontos colineares. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

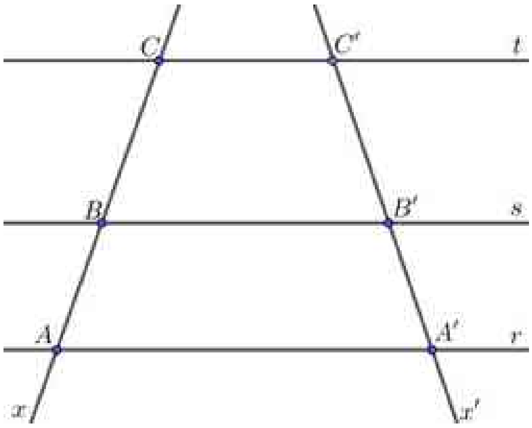


Figura 14: Teorema de Tales.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [14].

Definição 10 *Dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices do primeiro com os do segundo triângulo tais que os ângulos correspondentes sejam iguais e as razões entre os lados correspondentes seja constante.*

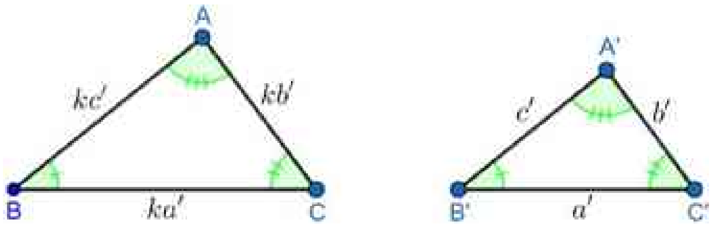


Figura 15: Semelhança de triângulos.

Simbolicamente para indicar que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle A'B'C'$ escrevemos,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

A partir da definição 10 e da Figura 14, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k,$$

onde k é um número real positivo chamado de *razão de semelhança.*

Existem três casos de semelhança entre triângulos: **LLL**, **LAL** e **AA**. Vamos somente enunciar cada caso através de proposições, porém todas as demonstrações poderão ser encontradas em [1].

Proposição 3.1.2 ***(Caso: LLL).*** *Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos quaisquer em um plano σ tais que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}},$$

então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

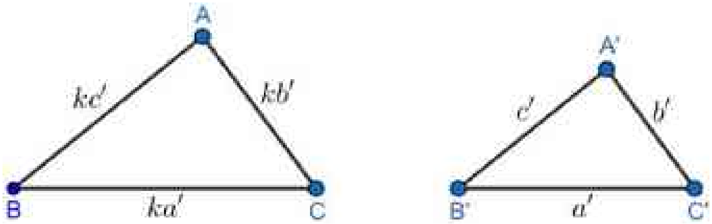


Figura 16: Caso de semelhança LLL.

Proposição 3.1.3 ***(Caso: LAL).*** *Se* ABC *e* $A'B'C'$ *são triângulos quaisquer em um plano* σ *tais que*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \text{ e } A\hat{C}B = A'\hat{C}'B' = \alpha,$$

então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

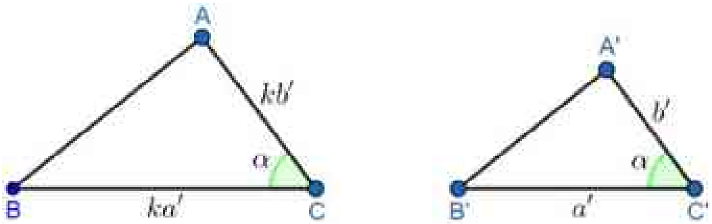


Figura 17: Caso de semelhança LAL.

Proposição 3.1.4 ***(Caso: AA).*** *Sejam* ABC *e* $A'B'C'$ *triângulos quaisquer em um plano* σ *tais que*

$$B\hat{A}C = B'\hat{A}'C' = \beta \text{ e } A\hat{B}C = A'\hat{B}'C' = \alpha,$$

então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

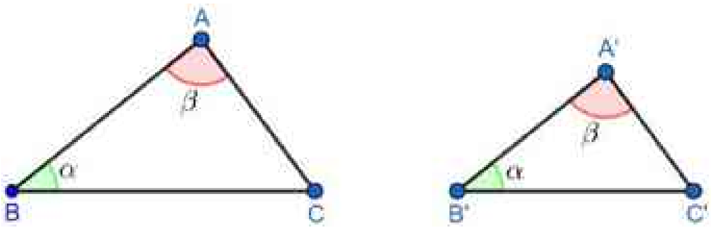


Figura 18: Caso de semelhança AA.

Particularmente, temos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

A partir dos casos de semelhança de triângulos, podemos demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo, bem como o Teorema de Pitágoras. A seguir veremos como obtê-las.

Proposição 3.1.5 *Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Se H é o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{BH} = m, \overline{CH} = n$ e $\overline{AH} = h$, então*

(a) $ah = bc$

(b) $b^2 = an$

(c) $c^2 = am$

(d) $h^2 = mn$

(e) $a^2 = b^2 + c^2$ *(Teorema de Pitágoras).*

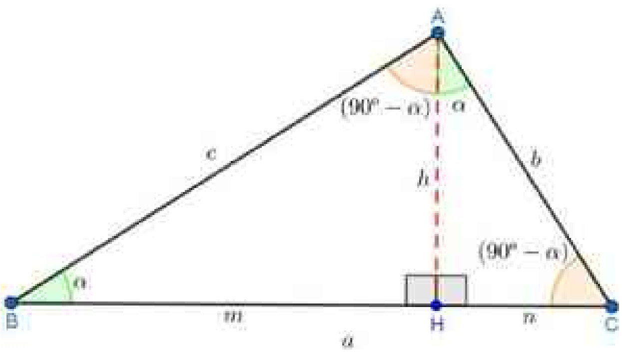


Figura 19: Caso de semelhança AA no triângulo retângulo.

Demonstração: *(a)* e *(c)* Note que $\triangle ABC \sim \triangle ABH$ pelo caso AA, pois $B\hat{A}C = B\hat{H}A = 90°$ e $C\hat{B}A = A\hat{B}H = \alpha$, logo valem as igualdades

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}.$$

Substituindo os valores, temos

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \quad \text{e} \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{m}.$$

Portanto,

$$ah = bc \quad \text{e} \quad c^2 = am.$$

(b) Perceba que $\triangle ABC \sim \triangle AHC$ pelo caso AA, pois $B\hat{A}C = A\hat{H}C = 90°$ e $A\hat{B}C = C\hat{A}H = \alpha$. Sendo assim,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CH}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n}.$$

Portanto, $b^2 = an$.

(d) Note que $\triangle ABH \sim \triangle AHC$ pelo caso AA, pois $A\hat{B}H = C\hat{A}H = \alpha$ e $H\hat{A}B = A\hat{C}H = (90° - \alpha)$, logo:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h}.$$

Portanto, $h^2 = mn$.
(e) A partir dos itens (b) e (c), obtemos:

$$b^2 + c^2 = a(m+n).$$

Mas, $m + n = a$. Logo, $a^2 = b^2 + c^2$. □

A seguir enunciaremos e demonstraremos um teorema pouco visto nos livros didáticos, apesar de sua ausência, ele é de grande utilidade na resolução de questões.

Teorema 3.1.3 *A mediana relativa à hipotenusa de triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo em A com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Considere H o pé da altura relativa à hipotenusa, onde $\overline{AH} = h$ e $\overline{AM} = m$ é a mediana relativa à hipotenusa, considere ainda $\overline{MH} = x$ e $\overline{HC} = \frac{a}{2} - x$. Conforme Figura 20:

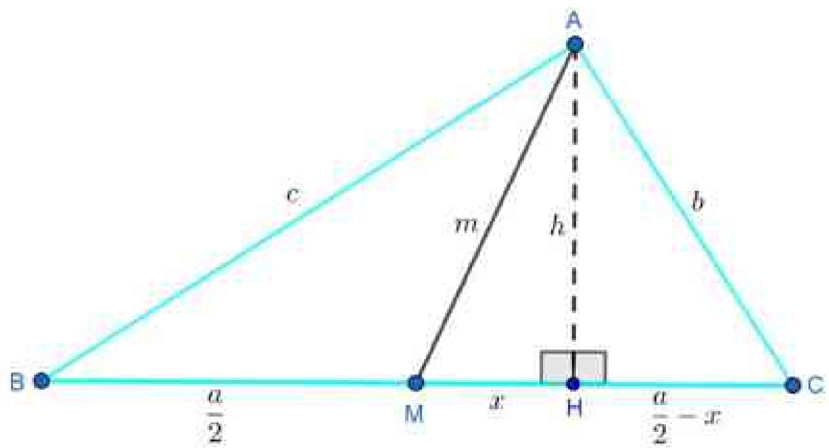


Figura 20: Mediana relativa à hipotenusa.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, respectivamente, nos triângulos ABH e ACH, teremos:

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + ax + x^2 + h^2 \tag{3.1}$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} - ax + x^2 + h^2 \tag{3.2}$$

Somando as equações (3.1) e (3.2), obtemos:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2x^2 + 2h^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2} + 2x^2 + 2h^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{a^2}{4} - x^2. \tag{3.3}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AMH, temos:

$$m^2 = h^2 + x^2.$$

Usando o resultado encontrado em (3.3), obtemos:

$$m^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Portanto:

$$m = \overline{AM} = \frac{a}{2}.$$

□

3.1.2 Áreas de Figuras Planas

Nesta subseção apresentaremos algumas figuras geométricas planas, munidas das fórmulas para o cálculo de suas áreas.

1) **(Quadrado).** Um quadrado $ABCD$ de lado x tem área

$$\mathcal{A}(ABCD) = x^2.$$

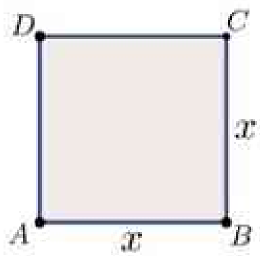


Figura 21: Quadrado $ABCD$.

2) **(Retângulo).** Um retângulo $ABCD$ de lados x e y tem área

$$\mathcal{A}(ABCD) = x \cdot y.$$

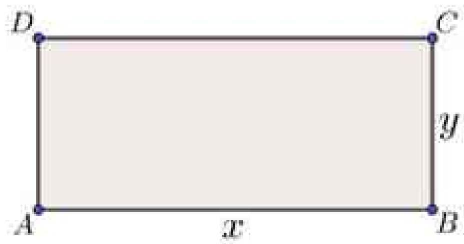


Figura 22: Retângulo $ABCD$.

3) **(Paralelogramo).** Um paralelogramo $ABCD$ de base x e altura h tem área

$$\mathcal{A}(ABCD) = x \cdot h.$$

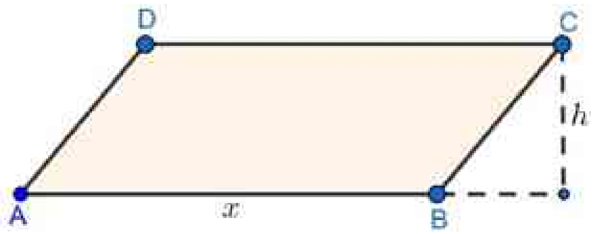


Figura 23: Paralelogramo $ABCD$.

4) **(Triângulo).** Se ABC é um triângulo de lado $\overline{BC} = a$ e altura h relativa ao lado BC, então,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{a \cdot h}{2}.$$

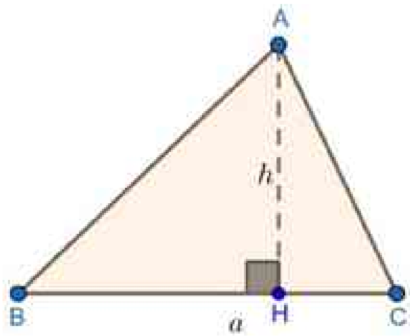


Figura 24: Triângulo ABC.

Destacaremos a seguir, duas fórmulas que fornecem a área de um triângulo sem o uso explícito de qualquer altura do mesmo. A primeira é conhecida como fórmula de **Herão**, cuja área do triângulo está em função do semiperímetro do triângulo, e na segunda a **fórmula trigonométrica**, cuja área está em função do seno de um ângulo do triângulo e dos lados compreendidos entre ele.

Proposição 3.1.6 ***(Fórmula de Herão).*** *A área $\mathcal{A}(ABC)$ de um triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ é igual a*

$$\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo ABC.

A prova da proposição acima pode ser encontrada em [14].

Proposição 3.1.7 ***(Fórmula Trigonométrica).*** *A área $\mathcal{A}(ABC)$ de um triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e medidas de ângulos $B\hat{A}C = \alpha, A\hat{B}C = \beta$ e $A\hat{C}B = \gamma$ é:*

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \beta}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2}.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{A}(ABC)$ a área de um triângulo ABC. Denotemos $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e medidas de ângulos $B\hat{A}C = \alpha, A\hat{B}C = \beta$ e $A\hat{C}B = \gamma$, conforme ilustração a seguir.

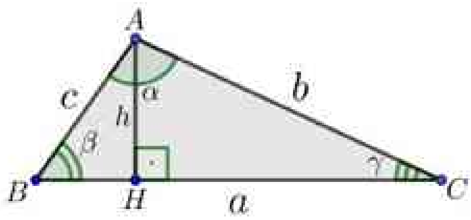


Figura 25: Fórmula trigonométrica.

Traçando-se AH, onde $\overline{AH} = h$ é a altura relativa a BC, segue do triângulo retângulo AHB que $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{h}{c}$, ou seja, $h = c \operatorname{sen} \beta$. Como $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{ah}{2}$ conclui-se que

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{ac \operatorname{sen} \beta}{2}.$$

As demais igualdades seguem de modo análogos. □

Proposição 3.1.8 ***(Trapézio).*** *Se $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = x, \overline{CD} = y$ e altura z, então*

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{(x+y)z}{2}.$$

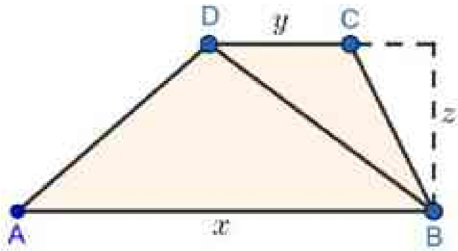


Figura 26: Trapézio $ABCD$.

Demonstração: Traçando-se a diagonal BD do trapézio ilustrado na Figura 26, obtemos dois triângulos ABD e BCD de mesma altura z, daí segue que:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(BCD) = \frac{xz}{2} + \frac{yz}{2}.$$

Segue então que $\mathcal{A}(ABCD) = \dfrac{(x+y)z}{2}$. □

Proposição 3.1.9 ***(Losango).*** *Se $ABCD$ é um losango de diagonais AC e BD, então*

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}.$$

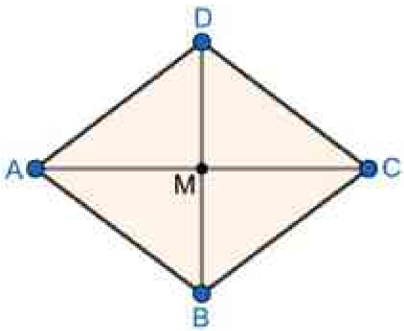


Figura 27: Losango $ABCD$.

Demonstração: Perceba que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ACB) + \mathcal{A}(ACD) \Rightarrow \\
\mathcal{A}(ABCD) &= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BM}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DM}}{2} \Rightarrow \\
\mathcal{A}(ABCD) &= \frac{\overline{AC} \cdot \left(\overline{BM} + \overline{DM}\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Como $\overline{BM} + \overline{DM} = \overline{BD}$, segue que $\mathcal{A}(ABCD) = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$. □

Proposição 3.1.10 ***(Círculo).*** *Seja C um círculo de raio r, então*

$$\mathcal{A}(C) = \pi r^2.$$

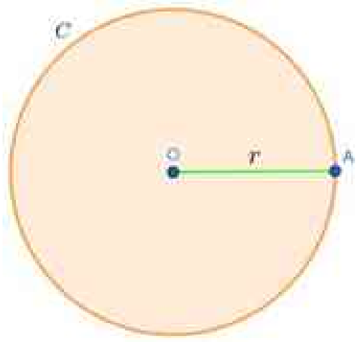


Figura 28: Círculo C de raio r.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [11].

Proposição 3.1.11 ***(Setor Circular).*** *Seja C um círculo de raio r, e $\widehat{AB}$ um arco com medida de ângulo central $A\hat{O}B = \alpha$, então*

$$\mathcal{A}(AOB) = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2.$$

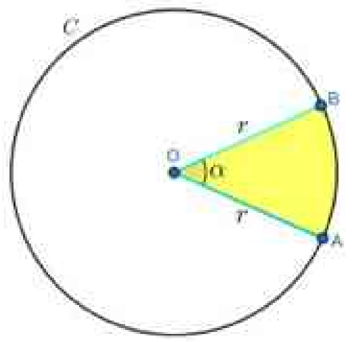


Figura 29: Setor circular AOB.

A prova dessa proposição pode ser encontrada em [11].

3.2 Trigonometria e Aplicações

A trigonometria é um dos tópicos importantes da Matemática. Constantemente temos que usar alguns de seus resultados em outros ramos da Matemática.

Para a resolução de algumas questões de Geometria, torna-se imprescindível a utilização de resultados clássicos da trigonometria, os quais veremos nesta seção.

Iniciaremos com as razões trigonométricas no triângulo retângulo, a partir daí, demonstraremos alguns resultados usando tais razões.

Definição 11 *Seja ABC um triângulo retângulo em A, em que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é igual a α, e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é igual a β. Valem as seguintes afirmações:*

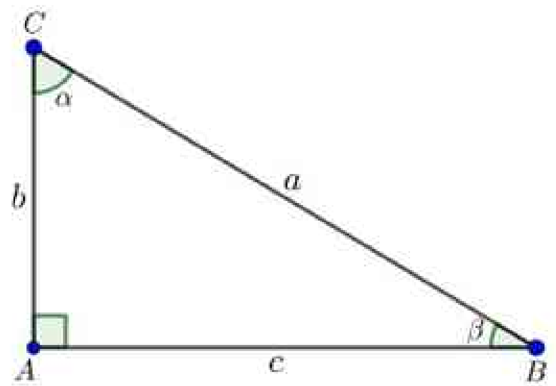


Figura 30: Razões trigonométricas.

- O *seno* de α é a razão $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$.
- O *cosseno* de α é a razão $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$.
- A *tangente* de α é a razão $\tan\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \dfrac{c}{b}$.
- O *seno* de β é a razão $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$.
- O *cosseno* de β é a razão $\cos\beta = \dfrac{\text{cateto adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$.
- A *tangente* de β é a razão $\tan\beta = \dfrac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta} = \dfrac{b}{c}$.

Note que,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{b}{a}.$$

Logo,

$$c = a\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad b = a\cos\alpha.$$

Daí, pelo Teorema de Pitágoras segue que

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 &\implies a^2 = (a\cos\alpha)^2 + (a\operatorname{sen}\alpha)^2 \\ &\implies a^2 = a^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) \end{aligned}$$

$$\implies \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{3.4}$$

A igualdade (3.4) é chamada *relação fundamental da trigonometria*. De modo análogo, conclui-se que

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

A dedução da relação fundamental foi obtida para $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, porém pode ser estendida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ainda utilizando as razões acima, podemos obter a tangente de um ângulo conhecendo os valores do seno e do cosseno. Para mostrarmos isso, considere o triângulo da Figura 30, então temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b}.$$

Mas,

$$\begin{cases} c = a \operatorname{sen} \alpha \\ b = a \cos \alpha. \end{cases}$$

Substituindo, obtemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Agora vamos utilizar as razões trigonométricas para determinarmos o *seno, cosseno e tangente* dos ângulos notáveis 30°, 45° e 60°.

- **sen 30°, cos 30° e tg 30°.**

  Considere o triângulo equilátero ABC de lado l:

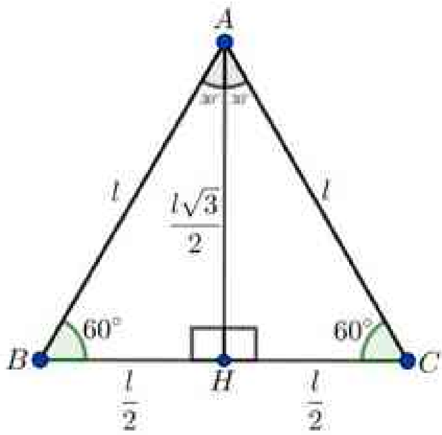


Figura 31: Ângulos notáveis.

Do triângulo AHB, temos:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{l}{2}}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- **sen 60°, cos 60° e tg 60°.**

  Ainda pelo triângulo AHB acima, obtemos:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}.$$

- **sen 45°, cos 45° e tg 45°.**

  Considere o quadrado $ABCD$ de lado l:

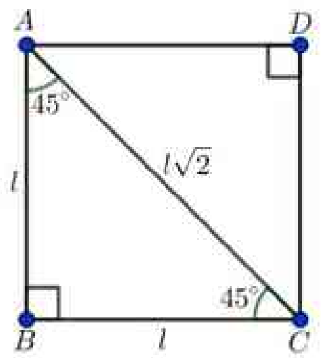


Figura 32: Ângulos notáveis.

Do triângulo ABC, temos:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{l}{l} = 1.$$

É imediato que os alunos façam a pergunta: como podemos determinarmos o seno, o cosseno e a tangente de ângulos não notáveis? Essa resposta encontra-se na subseção seguinte.

3.2.1 Fórmulas de Adição

As fórmulas que expressam $\cos(\alpha+\beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ em termos de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\beta$ são de grande utilidade na resolução de questões, apesar de sua importância, os alunos ainda demonstram grande dificuldade de assimilá-las. A seguir mostraremos como obtê-las. Vale ressaltar que existem vários métodos para prová-las, porém, faremos aqui uma demonstração mais simples.

Inicialmente, vamos demonstrar a fórmula do *seno* da soma. Para isso, utilizaremos o conceito de áreas de triângulos conforme vimos na Seção 1 desse capítulo. Considere o triângulo:

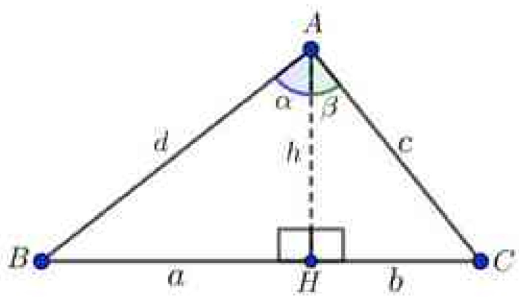


Figura 33: Seno da soma.

Note que a área do triângulo ABC é igual a soma das áreas dos triângulos ABH e AHC, calculando a área em função do seno, teremos:

$$\frac{c\cdot d\cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}=\frac{d\cdot h\cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}+\frac{c\cdot h\cdot \operatorname{sen}\beta}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\dfrac{2}{c\cdot d}$, obtemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{h}{c}\cdot \operatorname{sen}\alpha+\frac{h}{d}\cdot \operatorname{sen}\beta.$$

Mas, dos triângulos ABH e AHC temos, respectivamente,

$$\frac{h}{d}=\cos\alpha \quad \text{e} \quad \frac{h}{c}=\cos\beta.$$

Portanto, segue que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

Para obtermos o cosseno da soma, utilizaremos a relação fundamental da trigonometria e o resultado encontrado acima, logo:

$$\begin{gathered}
[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]^2+[\cos(\alpha+\beta)]^2=1 \Rightarrow \\
[\cos(\alpha+\beta)]^2=1-[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]^2.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]^2 &= \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}^2\beta\cdot\cos^2\alpha \\
&= (1-\cos^2\alpha)\cdot\cos^2\beta+2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\beta+ \\
&+ \operatorname{sen}^2\beta\cdot(1-\operatorname{sen}^2\alpha) \\
&= \operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\beta- \\
&- \operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta \\
&= 1-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta.
\end{aligned}$$

Substituindo esse valor em (3.5), teremos:

$$\begin{aligned}
[\cos(\alpha+\beta)]^2 &= 1-1+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta \\
&= \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta \\
&= (\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

Para determinarmos a tangente da soma, façamos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Utilizando os resultados encontrados para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ e $\cos(\alpha+\beta)$, teremos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}\\
&= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\left(1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)}\\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}\\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.
\end{aligned}$$

A partir do seno da soma, podemos obter o seno da diferença, para isso, basta notar que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)]\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta)+\operatorname{sen}(-\beta)\cdot\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Como seno é uma função ímpar, e cosseno é uma função par, segue

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

Analogamente obtemos o cosseno da diferença,

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)\\
&= \cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$

Para obtermos a tangente da diferença, basta notar que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \operatorname{tg}[\alpha+(-\beta)]\\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$, segue que

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Proposição 3.2.12 ***(Lei dos Senos)*** *Se r é o raio do círculo circunscrito a um triângulo ABC de lados $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$, então*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2r,$$

onde α, β e γ são as medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.

A demonstração da Lei dos senos pode ser encontrada em [1]. Encerraremos esta seção enunciando e demonstrando a Lei dos cossenos.

Proposição 3.2.13 ***(Lei dos Cossenos)*** *Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e α é a medida de $\hat{A}$, então*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha.$$

Demonstração: Consideremos separadamente os casos $0° < \alpha < 90°$, $\alpha = 90°$ e $\alpha > 90°$.

(a) $(0° < \alpha < 90°)$ Sejam H o pé da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e $\overline{BH} = h$ o seu comprimento, com base nessas informações, temos a seguinte ilustração:

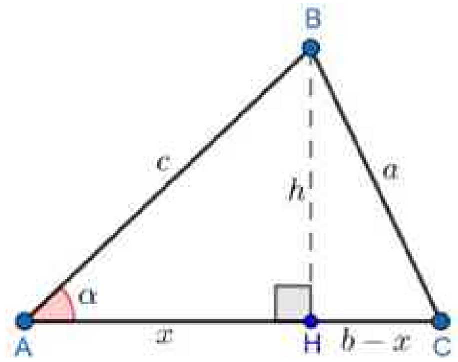


Figura 34: Lei dos cossenos para $\alpha < 90°$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos AHB e CHB, teremos:

$$c^2 = x^2 + h^2 \quad (3.6)$$
$$a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2. \quad (3.7)$$

Subtraindo as equações (3.7) e (3.6), obtemos:

$$a^2 - c^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2 - x^2 - h^2 \Rightarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot x.$$

Note que do triângulo ABH temos $\cos\alpha = \dfrac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos\alpha$.
Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

(b) $(\alpha = 90°)$ Neste caso, $\cos\alpha = 0$ e segue do Teorema de Pitágoras que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

(c) ($\alpha > 90°$) Considere o triângulo ABC, seja H o pé da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e h o seu comprimento, com base nessas informações, temos a seguinte ilustração:

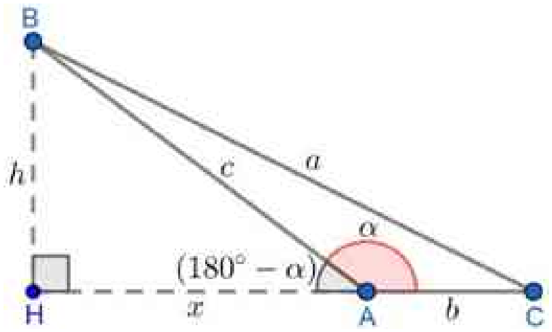


Figura 35: Lei dos cossenos para $\alpha > 90°$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos AHB e CHB temos

$$c^2 = x^2 + h^2 \tag{3.8}$$
$$a^2 = h^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x + x^2. \tag{3.9}$$

Subtraindo as equações (3.9) e (3.8), obtemos:

$$a^2 - c^2 = h^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x + x^2 - x^2 - h^2 \Rightarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot x.$$

Note que do triângulo ABH temos,

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos(180° - \alpha).$$

Como $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

□

3.3 Sobre Funções Quadráticas e Polinômios

Iniciaremos essa seção apresentando alguns conceitos e definições sobre funções quadráticas, e ao final, encerraremos com alguns teoremas sobre polinômios.

Definição 12 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

As raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$, portanto, são as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

A seguir vamos encontrar uma expressão que nos leva a obtermos as raízes de uma função quadrática. Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais, e $a \neq 0$, note que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Tomando-se $\Delta = b^2 - 4ac$ segue que

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

conhecida como *forma canônica* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Escrevendo $f(x) = 0$ para determinarmos suas raízes obtemos pela forma canônica de f,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3.10}$$

Perceba que,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0.$$

Logo, a igualdade em (3.10) só vale se $\Delta \geq 0$.

Portanto,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Note que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2+bx+c = 0$ está diretamente vinculado ao fato de $\Delta \geq 0$. Assim concluimos que:

- Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e distintas.
- Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raiz real.
- Observe ainda que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Além de obtermos uma expressão para as raízes da função quadrática, a forma canônica também nos auxilia na determinação dos valores máximo ou mínimo. Seja,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right].$$

Suponhamos $a > 0$, note que na última igualdade, no interior dos colchetes, há uma soma de duas parcelas, a primeira parcela é sempre maior do que ou igual a zero. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}.$$

Logo, neste ponto, $f(x)$ também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Se $a < 0$, o valor $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a função $f(x)$ assumirá um valor máximo.

Com relação ao gráfico da função quadrática, assumiremos que o mesmo é uma parábola. Conforme a Figura 36, percebe-se que se o coeficiente a for maior do que zero, a concavidade da parábola estará voltada para cima; já a Figura 37 nos mostra que se o coeficiente a for menor do que zero, a concavidade estará voltada para baixo.

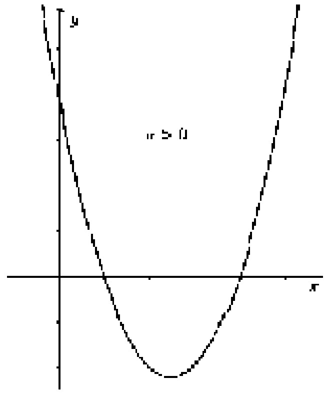


Figura 36: Gráfico da função quadrática ($a > 0$).

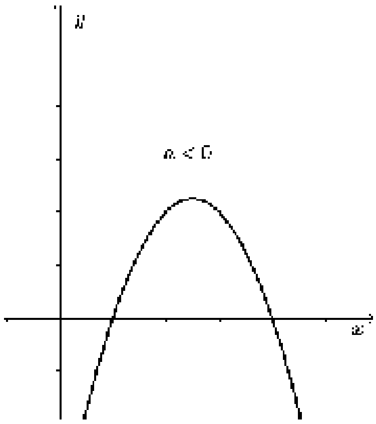


Figura 37: Gráfico da função quadrática ($a < 0$).

Observando o gráfico da função quadrática, percebemos que há uma simetria no seu formato, para um melhor entendimento, vamos mostrar que para pontos x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$, então

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} \iff f(x_1) = f(x_2).$$

De fato,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} &\iff a(x_1 + x_2) + b = 0 \\ &\iff a\left(x_1^2 - x_2^2\right) + b(x_1 - x_2) = 0 \\ &\iff ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c \\ &\iff f(x_1) = f(x_2). \end{aligned}$$

Com o resultado acima, podemos concluir que os pontos x_1 e x_2 são simétricos em relação à reta vertical $x = \dfrac{-b}{2a}$, ou seja, a reta $x = \dfrac{-b}{2a}$ é o eixo de simetria da parábola. Observe que se $b = 0$, o eixo de simetria da parábola coincidirá com o eixo y.

Com relação ao vértice da parábola, assumiremos que o mesmo tem coordenada,

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right).$$

3.3.1 Polinômios

Essa subseção tem como finalidade apresentar um pequeno resumo sobre polinômios, omitiremos algumas demonstrações, pois essa não é a principal finalidade desse trabalho. Iniciaremos com a definição de polinômio.

Definição 13 *Chamaremos de função polinomial ou polinômio, a função P do tipo*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i.$$

Onde:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes de P;
- n é um número inteiro positivo ou nulo;
- $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, \ldots, a_2x_2, a_1x_1, a_0$ são os termos de P.

Se Z é um número complexo e P é um polinômio tal que $P(Z) = 0$, então diremos que Z é uma raiz complexa ou zero de P.

Teorema 3.3.4 *Dois polinômios P e Q são iguais se, e somente se, os coeficientes de P e Q forem ordenadamente iguais.*

Demonstração: Sejam $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ e $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$.

Perceba que

$$\begin{aligned} P(x) = Q(x) &\iff \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \\ &\iff \sum_{i=0}^{n} a_ix^i - \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = 0 \\ &\iff \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)\, x^i \\ &\iff a_i - b_i = 0 \\ &\iff a_i = b_i, \quad \forall i. \end{aligned}$$

□

Definição 14 *Seja* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *um polinômio não nulo. Chamaremos de grau de* P*, e representaremos por* $gr(P)$*, o número natural* n *de maior expoente na variável* x*, com coeficiente não nulo.*

Definição 15 *Sejam* $P(x)$ *e* $H(x)$ *polinômios, com* $H(x)$ *não nulo. Dividir* $P(x)$ *por* $H(x)$ *é determinar dois outros polinômios* $Q(x)$ *e* $R(x)$ *que satisfaçam as seguintes condições:*

I. $P(x) = H(x) \cdot Q(x) + R(x)$*;*

II. $gr(R) < gr(H)$*, (quando* $R = 0$ *a divisão é exata).*

Na notação acima, $P(x)$ *é o dividendo,* $H(x)$ *o divisor,* $Q(x)$ *o quociente e* $R(x)$ *é o resto.*

Através do Método de Descartes, ou método dos coeficientes a determinar, também é possível dividir um polinômio $P(x)$ por $H(x)$ e obtermos o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$, para isso, utlizaremos a igualdade de polinômios, o fato de que o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor, e que $gr(Q) = gr(P) - gr(H)$. Vejamos um exemplo da aplicação do método.

Vamos obter o quociente e o resto da divisão de $x^3 + 1$ por $x - 1$.

Solução. Sejam $P(x) = x^3 + 1$ e $H(x) = x - 1$. Note que $gr(Q) = 3 - 1 = 2$, logo, $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Perceba também que $gr(H) = 1$, logo, $gr(R) = 0$, ou seja, $R(x) = r$ (constante). Daí teremos:

$$P(x) = H(x) \cdot Q(x) + R(x) \Rightarrow$$

$$x^3 + 1 = (x - 1) \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) + r \Rightarrow$$

$$x^3 + 1 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c + r \Rightarrow$$

$$x^3 + 1 = ax^3 + x^2 (b - a) + x (c - b) - c + r.$$

Utilizando a igualdade de polinômios, obtemos:

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = 1 \qquad \text{e} \qquad r = 2.$$

Portanto, $Q(x) = x^2 + x + 1$ e $R(x) = 2$. $\Diamond$

Teorema 3.3.5 ***(Teorema do Resto)*** *O resto da divisão de um polinômio* $P(x)$ *por* $(x - a)$ *é igual ao valor numérico* $P(a)$*.*

Demonstração: Da definição de divisão de polinômios, existem $Q(x)$ e $R(x)$ tais que

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x),$$

onde $Q(x)$ e $R(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto. Note que $(x-a)$ é o divisor e tem grau 1, logo, o resto é uma constante, daí teremos:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R \Rightarrow P(a) = R.$$

$\square$

Teorema 3.3.6 ***(Teorema de D'Alembert)*** *Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x-a)$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$.*

Demonstração: Primeiramente, vamos provar se $P(x)$ é divisível por $(x-a)$, então a é raiz de $P(x)$. Por hipótese, temos:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) \Rightarrow P(a) = 0.$$

Portanto, a é raiz de $P(x)$.

Agora, provemos que se a é raiz de $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $(x-a)$. Por hipótese, a é raiz de $P(x)$, logo, $P(a) = 0$. Note que pelo teorema anterior, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-a)$ é igual a zero. Portanto, $P(x)$ é divisível por $(x-a)$. $\square$

Teorema 3.3.7 ***(Teorema da Decomposição)*** *Todo polinômio*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \text{ com } n \geq 1 \text{ e } a_n \neq 0$$

pode ser decomposto em um produto de n fatores do 1^o grau, ou seja:

$$P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot \cdots .(x-x_n),$$

onde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as raízes complexas de $P(x)$.

A prova do teorema acima poderá ser encontrada em [7].

Finalizaremos esta seção com um resultado bastante frequente nos vestibulares da UECE, que são as relações de *Girard*, conhecida também como relações entre coeficientes e raízes. Com esse resultado, é possível ter uma redução significativa na resolução da questão. Iremos apresentar somente o resultado, porém a demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 3.3.8 ***(Relações de Girard)***

1. *Consideremos a equação do 2^o grau definida como: $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, cujas raízes são x_1 e x_2, então teremos,*

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a};$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. *Consideremos a equação do 3º grau definida como:* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, *com* $a \neq 0$, *cujas raízes são* x_1, x_2 *e* x_3, *então teremos,*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{-b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 &= \frac{c}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= \frac{-d}{a}. \end{aligned}$$

3.4 Progressões

Essa seção tem como finalidade apresentar alguns resultados sobre progressões aritméticas e geométricas.

Definição 16 *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números* $(a_i)_{i=1}^n$ *na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é uma constante* r *chamada razão da PA.*

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ uma PA, como consequência da definição, obtemos a propriedade:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1}.$$

As progressões aritméticas classificam-se em três categorias.

- *Crescentes.* São as progressões aritméticas em que cada termo é maior que o anterior, nesse caso, temos $r > 0$;
- *Constantes.* São as progressões aritméticas em que cada termo é igual ao anterior, nesse caso, temos $r = 0$;
- *Decrescentes.* São as progressões aritméticas em que cada termo é menor que o anterior, nesse caso, temos $r < 0$.

Teorema 3.4.9 *A fórmula do termo geral de uma PA é* $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Demonstração: Pela definição 16 temos,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ \vdots &= \vdots + \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, obtemos $a_n = a_1 + (n-1)r$. □

Teorema 3.4.10 *A soma S_n dos n primeiros termos de uma PA é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

Demonstração: Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Escrevendo a soma na ordem inversa, obtemos $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$, e somando membro a membro as equações acima obtemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Note que, ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parcelas segue

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

□

Definição 17 *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica $(a_i)_{i=1}^{n}$ na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante q chamada de razão da PG.*

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ uma PG, como consequência da definição, obtemos a propriedade:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

As progressões geométricas classificam-se em cinco categorias:

- *Crescentes.* São as progressões geométricas em que cada termo é maior que o anterior. Note que isto pode ocorrer de duas maneiras:

  (a) PG de termos positivos

  $$a_n > a_{n-1} \Rightarrow$$

  $$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Rightarrow$$

  $$q > 1.$$

  (b) PG de termos negativos

  $$a_n > a_{n-1} \Rightarrow$$

  $$a_{n-1} < a_n.$$

Como os termos são negativos, então

$$a_{n-1} < a_n < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} > \frac{a_n}{a_{n-1}} > 0 \Rightarrow$$

$$1 > q > 0 \Rightarrow$$

$$0 < q < 1.$$

- *Constantes.* São as progressões geométricas em que cada termo é igual ao anterior. Note que isto ocorre em duas situações:

  (a) PG com todos os termos nulos

  $$a_1 = 0 \text{ e } q \text{ qualquer.}$$

  (b) PG com termos iguais e não nulos

  $$a_n = a_{n-1} \Rightarrow$$

  $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Rightarrow$$

  $$q = 1.$$

- *Decrescentes.* São as progressões geométricas em que cada termo é menor que o anterior. Note que isto pode ocorrer de duas maneiras:

  (a) PG com termos positivos

  $$a_n < a_{n-1} \Rightarrow$$

  $$a_{n-1} > a_n.$$

  Como os termos são positivos, então

  $$a_{n-1} > a_n > 0 \Rightarrow$$

  $$\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} > \frac{a_n}{a_{n-1}} > 0 \Rightarrow$$

  $$1 > q > 0 \Rightarrow$$

  $$0 < q < 1.$$

  (b) PG com termos negativos

  $$a_n < a_{n-1} \Rightarrow$$

  $$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} \Rightarrow$$

$$q > 1.$$

- *Alternantes.* São as progressões geométricas em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.

- *Estacionárias.* São as progressões geométricas em que

$$a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0.$$

  Isto ocorre quando $q = 0$.

Teorema 3.4.11 *A fórmula do termo geral de uma PG é $a_n = a_q \cdot q^{n-1}$.*

Demonstração: Pela definição 15 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ \vdots &= \vdots \cdot \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro obtemos, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. □

Teorema 3.4.12 *A soma S_n dos n primeiros termos de uma PG de razão $q \neq 1$, é*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Demonstração: Temos,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por q, obtemos:

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}.$$

Subtraindo S_n de qS_n, teremos:

$$\begin{aligned} S_n - q \cdot S_n &= a_1 - a_{n+1} \Rightarrow \\ (1 - q)\, S_n &= a_1(1 - q^n) \Rightarrow \\ S_n &= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

□

4 RESOLVENDO QUESTÕES

O capítulo em questão tem a finalidade de apresentar as soluções detalhadas de algumas questões de Matemática dos vestibulares da UECE nos últimos 8 anos. O critério de escolha das questões foi baseado nos conteúdos que foram mais recorrentes nestas edições dos vestibulares, conforme vimos no Capítulo 2, bem como na complexidade da questão a ser resolvida pelo candidato.

Para resolvermos as questões, faz-se necessário a utilização dos principais conteúdos mencionados no Capítulo 3.

Ao final de cada solução encontra-se um comentário de quais conteúdos foram utilizados para a resolução do problema.

Para o desenvolvimento deste capítulo utilizamos a referência [5].

4.1 Questões e Soluções

Selecionamos um total de 20 questões, as mesmas são referentes aos itens de Geometria Plana, Polinômios, Trigonometria e Progressões.

Inicialmente abordaremos questões que envolvam conteúdos de Geometria Plana.

1. **(UECE 2018.2, Q. 21)** No triângulo OYZ, o ângulo interno em O é igual a 90 graus, o ponto H no lado YZ é o pé da altura traçada do vértice O e M é o ponto médio do lado YZ. Se $\hat{Y} - 2\hat{Z} = 10$ graus (diferença entre a medida do ângulo interno em Y e duas vezes a medida do ângulo interno em Z igual a 10 graus), então, é correto afirmar que a medida do ângulo $H\hat{O}M$ é igual a:

   (a) $\dfrac{170}{3}$ graus.
   (b) $\dfrac{140}{3}$ graus.
   (c) $\dfrac{110}{3}$ graus.
   (d) $\dfrac{100}{3}$ graus.

   Solução. Sejam $\hat{Y} = \gamma$, $\hat{Z} = \delta$ e $\hat{O} = 90°$, então

   $$\gamma + \delta + 90° = 180° \Rightarrow \gamma + \delta = 90°.$$

   Pelo enunciado segue que $\gamma - 2\delta = 10°$. Daí teremos,

$$\gamma + \delta = 90° \tag{4.11}$$

$$\gamma - 2\delta = 10°. \tag{4.12}$$

Fazendo $2 \cdot (4.11) + (4.12)$ teremos,

$$2\gamma + 2\delta + \gamma - 2\delta = 180° + 10° \Rightarrow 3\gamma = 190° \Rightarrow \gamma = \frac{190°}{3}.$$

Note que $\gamma + \delta = 90°$, logo $\dfrac{190°}{3} + \delta = 90° \Rightarrow \delta = 90° - \dfrac{190°}{3} \Rightarrow \delta = \dfrac{80°}{3}$.

Considere $M\hat{O}Z = \alpha$, $H\hat{M}O = \beta$ e $H\hat{O}M = \theta$, com isso, temos o triângulo retângulo OYZ ilustrado a seguir:

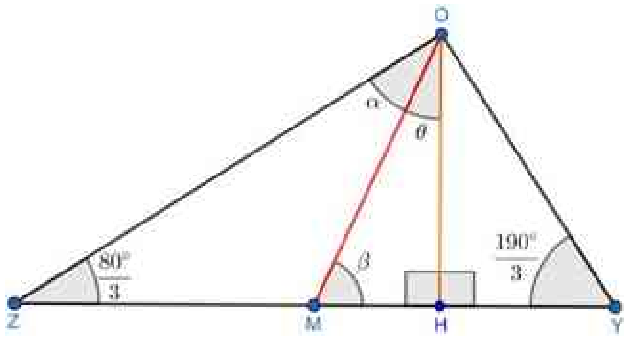


Figura 38: Triângulo retângulo OYZ.

Como OM é a mediana relativa à hipotenusa YZ, então $\overline{OM} = \overline{ZM} = \overline{MY}$. Logo, o triângulo OZM é isósceles de base OZ, ou seja, as medidas dos ângulos de sua base são iguais. Daí, segue que

$$\alpha = \frac{80°}{3}.$$

Pelo *teorema do ângulo externo*,

$\beta = \dfrac{80°}{3} + \alpha \Rightarrow \beta = \dfrac{80°}{3} + \dfrac{80°}{3} \Rightarrow \beta = \dfrac{160°}{3}$.

Do triângulo HMO, temos que

$$\begin{aligned} 90° + \beta + \theta &= 180° \Rightarrow \\ 90° + \frac{160°}{3} + \theta &= 180° \Rightarrow \\ \theta &= 180° - 90° - \frac{160°}{3} \Rightarrow \\ \theta &= 90° - \frac{160°}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, $\theta = \dfrac{110°}{3}$. ◊

Observemos que os conteúdos necessários para resolver a questão são os seguintes:

- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo;
- Ponto médio de um segmento;
- Altura de um triângulo;
- Mediana de um triângulo retângulo;
- Teorema do ângulo externo;
- Triângulo isósceles.

2. **(UECE 2017.1, Q. 17)** Considere a circunferência com centro no ponto O e cuja medida do raio é 2 m. Se AB é um diâmetro desta circunferência e C é um ponto sobre a circunferência tal que a medida do ângulo $C\hat{O}B$ é 60°, então, a medida da área da região interior à circunferência, limitada pela corda AC e pelo menor arco determinado por A e C, é:

(a) $\dfrac{4\pi}{6} - \sqrt{3}$.

(b) $\dfrac{4\pi}{6} + \sqrt{3}$.

(c) $\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

(d) $\dfrac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Solução. Sejam α, β e θ respectivamente, as medidas dos ângulos $C\hat{O}A$, $B\hat{C}O$ e $O\hat{B}C$. Com isso, temos a seguinte figura:

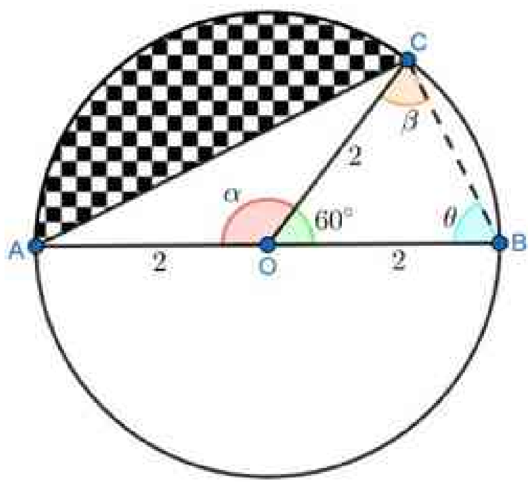


Figura 39: Área hachurada.

Veja que, a área da região desejada encontra-se na forma hachurada, conforme ilustração acima. Considere A_h: Área hachurada; A_t: Área do triângulo AOC e A_s: Área do setor circular AOC. Portanto, $A_h = A_s - A_t$.

Do triângulo OBC, temos

$$\theta + \beta + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta + \beta = 120^\circ.$$

Pelo teorema do ângulo externo segue que $\alpha = \theta + \beta = 120^\circ$. Assim,

$$A_s = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \Rightarrow A_s = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_s = \frac{4\pi}{3}.$$

Por outro lado, perceba que A_t é dado por:

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ \Rightarrow A_t = 2 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ \Rightarrow A_t = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_t = \sqrt{3}.$$

Logo,

$$A_h = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

$\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo;
- Teorema do ângulo externo;
- Área do setor circular;
- Área de um triângulo.

3. **(UECE 2012.2, Q. 19)** Sejam r e s retas paralelas cuja distância entre elas é 3 m e MN um segmento unitário sobre a reta s. Se X é um ponto em r tal que a medida do segmento MX é 6 m e se P é a projeção ortogonal de N sobre MX ou seu prolongamento, então a medida do segmento NP é:

   (a) $1,20$ m.

   (b) $0,50$ m.

   (c) $1,00$ m.

   (d) $0,80$ m.

Solução. Conforme enunciado da questão, considere a seguinte ilustração:

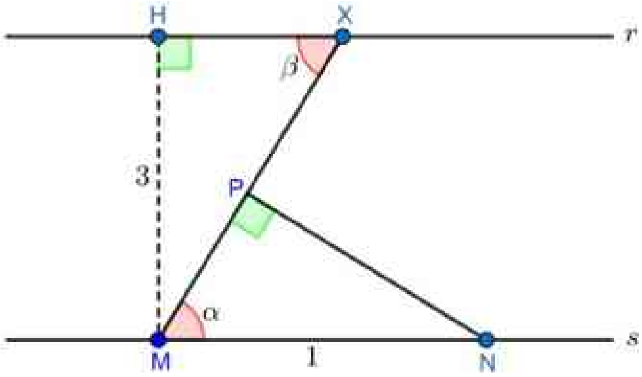


Figura 40: Medida do segmento $\overline{NP}$.

Se $\overline{MH}$ é a distância entre as retas r e s, então $\overline{MH} = 3$. Note ainda que, $\overline{MX} = 6$ e, além disso, $\alpha = \beta$, pois tais ângulos são alternos internos.

Logo, $\triangle MHX \sim \triangle NPM$ pelo caso Ângulo, Ângulo (A, A). Daí, segue que

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{PN}} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{3}{\overline{PN}} \Rightarrow 6 \cdot \overline{PN} = 3 \Rightarrow \overline{PN} = \frac{1}{2} = 0,50\ m.$$

◊

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Retas paralelas e transversais;
- Semelhança de triângulos.

4. **(UECE 2017.1, Q. 19)** As medidas, em metro, dos comprimentos dos lados de um triângulo formam uma progressão aritmética cuja razão é igual a 1. Se a medida de um dos ângulos internos deste triângulo é 120°, então, seu perímetro é:

   (a) $5,5$.

   (b) $6,5$.

   (c) $7,5$.

   (d) $8,5$.

Solução. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = x + 1$ e $\overline{AB} = x + 2$, pois a medida das lados de ABC formam uma P.A de razão igual a 1. Como o maior lado de um triângulo opõe-se ao maior ângulo, então geometricamente temos,

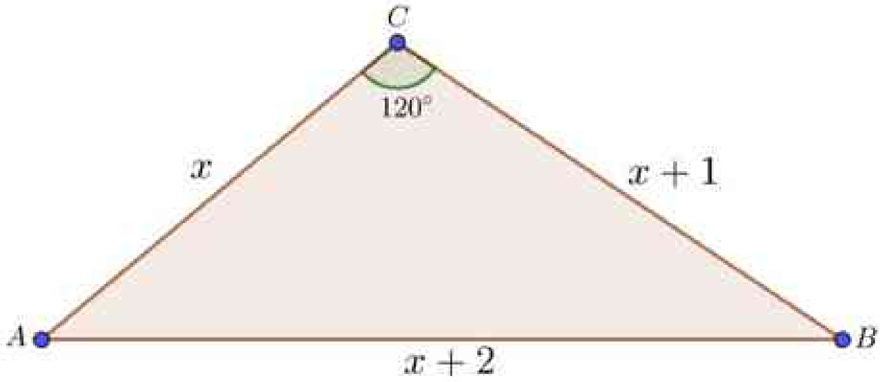


Figura 41: Triângulo ABC.

Pela lei dos cossenos teremos,

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= x^2+(x+1)^2-2\cdot x\cdot(x+1)\cdot\cos 120^\circ\\ x^2+4x+4 &= x^2+x^2+2x+1-2(x^2+x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ x^2+4x+4 &= 2x^2+2x+1+x^2+x.\end{aligned}$$

Segue que,

$$x^2+4x+4 = 3x^2+3x+1.$$

Portanto,

$$2x^2-x-3 = 0 \Longrightarrow x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2}.$$

Logo, $\overline{AC}=\frac{3}{2}$, $\overline{BC}=\frac{5}{2}$ e $\overline{AB}=\frac{7}{2}$ e, consequentemente, o perímetro de ABC é:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\frac{15}{2}=7,5.$$

$\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Definição de uma P.A;
- Desigualdade em um triângulo;
- Lei do cosseno;
- Função quadrática;
- Perímetro de um triângulo.

5. **(UECE 2011.1, Q. 22)** Se a soma das medidas das diagonais de um losango é $6\ m$, então o maior valor que a área deste losango pode assumir, em m^2, é:

   (a) $4,5$.

   (b) $5,0$.

   (c) $5,5$.

   (d) $6,0$.

   Solução. Sejam D a medida da diagonal maior, d a medida da diagonal menor e A área do losango. Daí segue que

$$D + d = 6 \tag{4.13}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2}. \tag{4.14}$$

   Pela equação (4.13) temos, $D = 6 - d$. Assim, substituindo esse resultado em (4.14) obtemos,

$$A(d) = \frac{d \cdot (6-d)}{2} \Rightarrow A(d) = -\frac{d^2}{2} + 3d.$$

   Como o coeficiente dominante da função quadrática $A(d) = -\frac{d^2}{2} + 3d$, é $-\frac{1}{2}$. Segue que A terá valor máximo no ponto $d = -\frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$, ou seja, em $d = 3$.

   Logo,

$$A(3) = -\frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 = -\frac{9}{2} + 9 \Rightarrow A(3) = \frac{9}{2} \quad \therefore \quad A(3) = 4,5.$$

   $\Diamond$

   Conteúdos necessários para resolver a questão:

   - Área de um losango;
   - Gráfico de uma função quadrática (valores máximo e mínimo).

6. **(UECE 2011.2, Q. 20)** O polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 4$ é divisível por $d(x) = x^2 + k$, onde k é constante. Sobre as raízes da equação $q(x) = 0$, sendo $q(x)$ o quociente da divisão de $p(x)$ por $d(x)$, podemos afirmar corretamente que são duas raízes:

   (a) iguais.

   (b) racionais.

   (c) irracionais.

(d) não reais.

Solução. Como $p(x)$ é divisível por $d(x)$ segue que o resto é $r = 0$. Vamos utilizar o método de Descartes (métodos dos coeficientes a determinar) para resolver o problema. Sejam $gr(p)$ o grau de $p(x)$, $gr(d)$ o grau de $d(x)$ e $gr(q)$ o grau de $q(x)$. Então,

$$gr(q) = gr(p) - gr(d) \quad \therefore \quad gr(q) = 2.$$

Portanto, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tais que $q(x) = ax^2 + bx + c$. Como $p(x) = q(x) \cdot d(x)$ segue que

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 4x - 4 &= (ax^2 + bx + c) \cdot (x^2 + k) \Longrightarrow \\ x^4 + 2x^3 - 4x - 4 &= ax^4 + bx^3 + (c + ak)x^2 + (bk)x + ck \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c + ak = 0 \\ bk = -4 \\ ck = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c + k = 0 \\ 2k = -4 \\ ck = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c - 2 = 0 \\ k = -2 \\ -2c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ k = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Portanto, $q(x) = x^2 + 2x + 2$. Para o cálculo do discriminante de q façamos,

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \quad \therefore \quad \Delta < 0.$$

Logo, o polinômio $q(x)$ possui duas raízes não reais (raízes complexas). $\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios;
- Igualdade de polinômios;
- Função quadrática.

7. **(UECE 2014.1, Q. 18)** Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2 + x + 1$, P e Q pontos do gráfico de f tais que o segmento de reta PQ é horizontal e tem comprimento igual a 4 m. A medida da distância do segmento PQ ao eixo das abscissas é:

Observação: A escala usada nos eixos coordenados adota o metro como unidade de comprimento.

(a) $5,25$ m.

(b) $5,05$ m.

(c) $4,95$ m.

(d) $4,75$ m.

Solução. Note que $f(x) = x^2 + x + 1$ é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima. Além disso, f não possui raízes reais, pois seu discriminante $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, logo o gráfico de f não intersecta o eixo x. Sejam $P = (m, n)$ e $Q = (p, n)$ pontos cujas ordenadas coincidem, pois o segmento $\overline{PQ}$ é horizontal. Além disso, a abscissa do vértice do gráfico de f é $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$. Note que x_v está sobre o eixo de simetria ϵ da parábola.

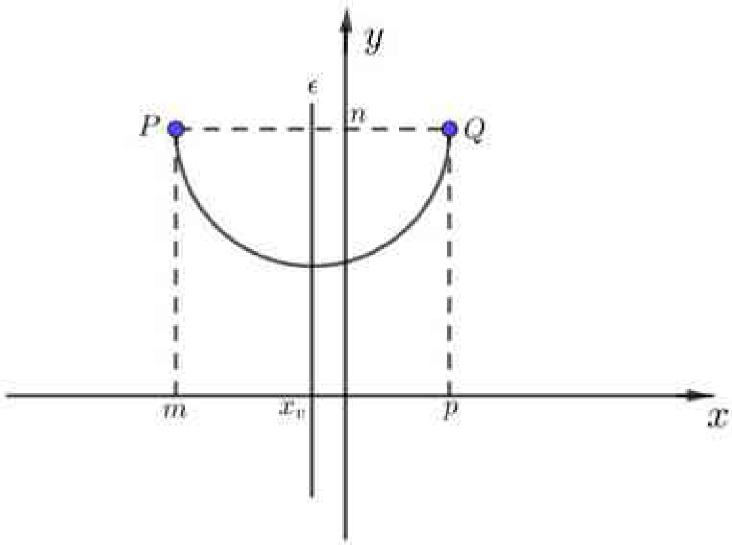


Figura 42: Gráfico de f.

Como $\overline{PQ} = 4$ e x_v encontra-se sobre o eixo de simetria segue que:

$$p - x_v = \frac{4}{2} \Rightarrow p - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow p + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow p = \frac{3}{2}.$$

Perceba que a distância pedida é igual a n, mas $Q = (p, n) = \left(\dfrac{3}{2}, n\right)$ pertence ao gráfico de f, isto é $n = f\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Logo,

$$n = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{9 + 6 + 4}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow n = 4,75.$$

$\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Função quadrática;
- Eixo de simetria e vértice da parábola.

8. **(UECE 2013.2, Q. 24)** A soma dos valores reais de a para os quais o polinômio $P(x) = x^3 + (1-a)x^2 + (1+a)x - 1$ é divisível por $x - a$ é:

   (a) $-\frac{1}{2}$.

   (b) $\frac{1}{4}$.

   (c) -1.

   (d) $\frac{1}{2}$.

   Solução. Pelo teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $(x-a)$ se, e somente se, $p(a) = 0$. Logo,

   $$\begin{aligned} p(a) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a^3 + (1-a)a^2 + (1+a)a - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad 2a^2 + a - 1 = 0. \end{aligned}$$

   Pela relação de Girard segue que a soma (S) dos valores de a é a soma das raízes da equação $2a^2 + a - 1 = 0$. Portanto,

   $$S = -\frac{1}{2}.$$

   $\Diamond$

   Conteúdos necessários para resolver a questão:

   - Teorema de D'Alembert;
   - Relações de Girard;
   - Polinômios.

9. **(UECE 2017.2, Q. 15)** A soma dos elementos do conjunto formado por todas as soluções, no intervalo $[0, 2\pi]$, da equação $2\,\text{sen}^4(x) - 3\,\text{sen}^2(x) + 1 = 0$ é igual a:

   (a) 3π.

   (b) 4π.

   (c) 5π.

   (d) 6π.

Solução. Note que $2\,\text{sen}^4(x) - 3\,\text{sen}^2(x) + 1 = 0$ é uma equação biquadrada. Fazendo $y = \text{sen}^2(x)$ segue que $2y^2 - 3y + 1 = 0$, com $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$. Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

Daí,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \therefore \quad y_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } y_2 = 1.$$

Portanto, para $x \in [0, 2\pi]$ segue que:

$$y_1 = \text{sen}^2(x) \Rightarrow \text{sen}^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\};$$

$$y_2 = \text{sen}^2(x) \Rightarrow \text{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \text{sen}(x) = \pm 1 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\};$$

Logo o conjunto solução é igual a: $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ cuja soma das raízes é dada por

$$s = \frac{2\pi + 6\pi + \pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} = 6\pi.$$

◊

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Equação biquadrada;
- Raízes de uma função quadrática;
- Ciclo trigonométrico.

10. **(UECE 2016.1, Q. 20)** No sistema de coordenadas cartesianas usual, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ é uma parábola cujo vértice é o ponto M. Se P e Q são as interseções desta parábola com o eixo das abcissas, então, a medida da área do triangulo MPQ, em $u.a.$ (unidade de área), é igual a:

    (a) $1,5$.

    (b) $2,0$.

    (c) $2,5$.

    (d) $3,0$.

Solução. Sejam x_1 e x_2 as raízes da função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$. Como P e Q são as interseções entre o gráfico de f (parábola) com o eixo x, então $P = (x_1, 0)$ e $Q = (x_2, 0)$. Agora, façamos $f(x) = 0$ para determinarmos os valores de x_1 e x_2.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow \Delta = 16.$$

Portanto,

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 4}{4} \quad \therefore \quad x_1 = 3 \text{ ou } x_2 = 1.$$

Daí, $P = (3, 0)$ e $Q = (1, 0)$. Além disso, o vértice do gráfico de f é igual a

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-8)}{2 \cdot 2}, \frac{-16}{4 \cdot 2}\right) = (2, -2).$$

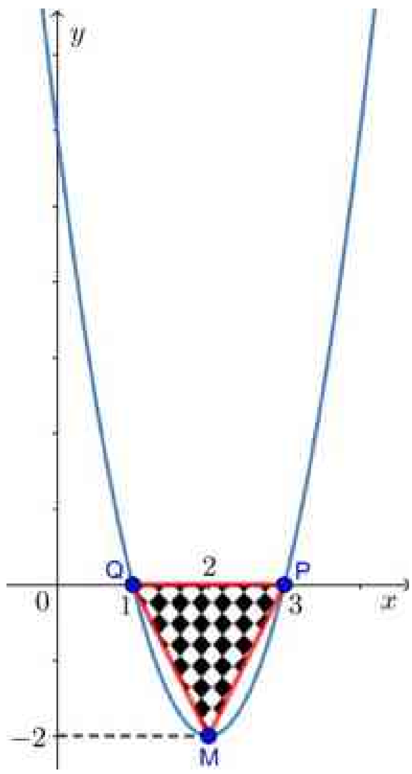


Figura 43: Área do Triângulo MPQ.

Do $\triangle MPQ$, a base é $b = 3 - 1 = 2$ e a altura é $h = 0 - (-2) = 2$. Logo, a área A do $\triangle MPQ$ será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2,0 \ u.a.$$

$\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Função quadrática;
- Área de um triângulo.

11. **(UECE 2014.2, Q. 20)** Se P é um ponto no interior de um triângulo equilátero cuja medida de cada um dos lados é $\sqrt{12}\ m$, então a soma das distâncias de P aos lados do triângulo é:

(a) $4,5$ m.

(b) $4,0$ m.

(c) $3,0$ m.

(d) $3,5$ m.

Solução. Seja ABC um triângulo equilátero de lado $\sqrt{12}$. Daí, considerando d_1, d_2 e d_3, respectivamente, as distâncias de P aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ segue que

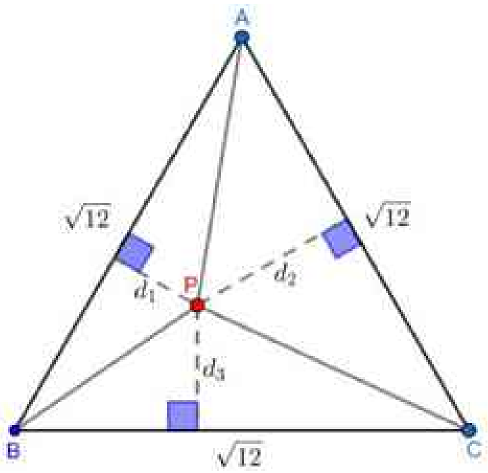


Figura 44: Triângulo Equilátero ABC.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABC) &= \mathcal{A}(APB) + \mathcal{A}(APC) + \mathcal{A}(BPC) \Rightarrow \\
\frac{(\sqrt{12})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} &= \frac{\sqrt{12} \cdot d_1}{2} + \frac{\sqrt{12} \cdot d_2}{2} + \frac{\sqrt{12} \cdot d_3}{2} \Rightarrow \\
\frac{12 \cdot \sqrt{3}}{4} &= \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot (d_1 + d_2 + d_3) \Rightarrow \\
3\sqrt{3} &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot (d_1 + d_2 + d_3) \Rightarrow \\
3 &= d_1 + d_2 + d_3.
\end{aligned}$$

Logo, a soma das distâncias de P aos lados do triângulo equilátero ABC mede 3 metros. $\Diamond$

Conteúdo necessário para resolver a questão:

- Área de triângulos.

12. **(UECE 2014.1, Q. 23)** Sejam XY um segmento de reta cujo comprimento é 4 m e Z um ponto da mediatriz do segmento XY cuja distância ao segmento XY é 6 m. Se P é um ponto equidistante de X, Y e Z, então a distância, em metros, de P ao segmento XY é igual a:

(a) $\frac{8}{3}$.

(b) $\frac{7}{3}$.

(c) $\frac{9}{4}$.

(d) $\frac{7}{4}$.

Solução. Seja M o ponto de intersecção da mediatriz com o segmento $\overline{XY}$, logo M é o ponto médio de $\overline{XY}$. Daí, segue que $\overline{XM} = \overline{MY} = \frac{4}{2} = 2$.

Por outro lado, a mediatriz é perpendicular ao segmento $\overline{XY}$. Além disso, tomando-se $\overline{PM} = d$ temos, $\overline{ZP} = 6 - d$. Veja ilustração a seguir:

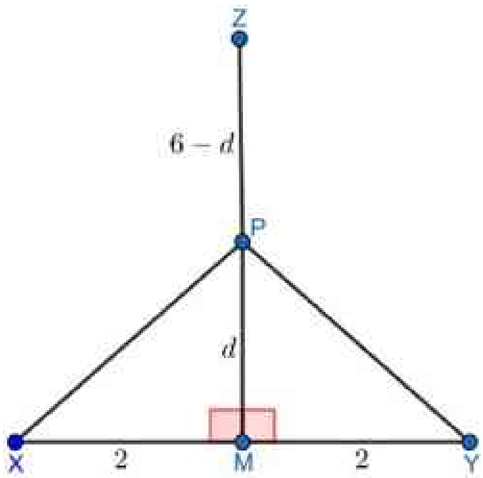


Figura 45: Distância de P ao segmento $\overline{XY}$.

Do triângulo XMP, segue pelo Teorema de Pitágoras que:

$$\begin{aligned} \left(\overline{XP}\right)^2 &= \left(\overline{XM}\right)^2 + \left(\overline{PM}\right)^2 \Rightarrow \\ \left(\overline{XP}\right)^2 &= 2^2 + d^2 \Rightarrow \\ \left(\overline{XP}\right)^2 &= 4 + d^2. \end{aligned}$$

Como P equidista de X, Y e Z, então $\overline{XP} = \overline{YP} = \overline{ZP}$. Daí, segue

$$\begin{aligned} (\overline{XP})^2 = (\overline{ZP})^2 &\Rightarrow d^2 + 4 = (6 - d)^2 \\ &\Rightarrow d^2 + 4 = 36 - 12d + d^2 \\ &\Rightarrow 12d = 32 \quad \therefore \quad d = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a distância de P ao segmento $\overline{XY}$ é $d = \frac{8}{3}$ metros. $\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Mediatriz de um segmento;
- Pontos equidistantes;
- Teorema de Pitágoras.

13. **(UECE 2016.1, Q. 24)** O polinômio de menor grau, com coeficientes inteiros, divisível por $2x - 3$, que admite $x = 2i$ como uma das raízes e $P(0) = -12$ é:

    Observação: i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1.

    (a) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 12$.

    (b) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$.

    (c) $P(x) = -2x^3 - 3x^2 - 8x - 12$.

    (d) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$.

    Solução. Seja $P(x)$ o polinômio procurado. Como $P(x)$ é divisível por $(2x - 3)$, então pelo Teorema de D'Alembert $P\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$. Por outro lado, se $2i$ é raiz de $P(x)$ então $-2i$ também é raiz de $P(x)$, pois os coeficientes de P são inteiros. Como P é o polinômio de menor grau, cujas raízes são: $-2i, 2i$ e $\dfrac{3}{2}$, então a decomposição de P é expressa por $P(x) = a(x + 2i)(x - 2i)\left(x - \frac{3}{2}\right)$, com $a \neq 0$. Como $P(0) = -12$ temos,

    $$a \cdot 2i \cdot (-2i) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -12 \Rightarrow -6a = -12 \quad \therefore \quad a = 2.$$

    Logo,

    $$P(x) = 2(x + 2i)(x - 2i)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12.$$

    ◊

    Conteúdos necessários para resolver a questão:

    - Teorema de D'Alembert;
    - Multiplicação de polinômios;
    - Teorema da decomposição.

14. **(UECE 2017.2, Q. 17)** O polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que as raízes da equação $P(x) = 0$ são os números -1, 1 e 2. Se $P(0) = 24$, então, o valor do coeficiente a é igual a:

    (a) 10.

    (b) 8.

(c) 12.

(d) 6.

Solução. Note que $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow d = P(0)$. Mas $P(0) = 24 \Rightarrow d = 24$. Sejam $x_1 = -1, x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ as raízes de $P(x)$. Assim, pelas relações de Girard temos,

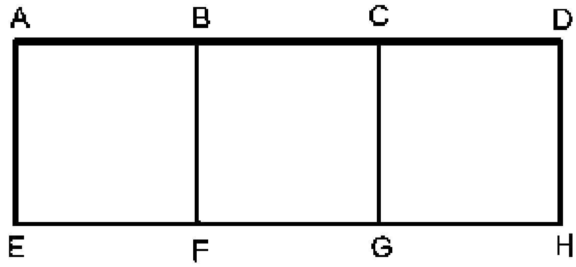
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow -1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{-24}{a} \Rightarrow -2a = -24 \Rightarrow a = 12.$$

$\Diamond$

Conteúdo necessário para resolver a questão:

- Relações de Girard.

15. **(UECE 2014.2, Q. 22)** A figura abaixo representa um retângulo formado pela justaposição de três quadrados.



Assim, as medidas dos segmentos AB, BC, CD, EF, FG, GH, AE, BF, CG e DH são iguais. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que a soma das medidas, em graus, dos ângulos $C\hat{E}H$ e $D\hat{E}H$ é igual a:

(a) 60°.

(b) 45°.

(c) 55°.

(d) 50°.

Solução. Sejam α e β respectivamente, as medidas dos ângulos $C\hat{E}H$ e $D\hat{E}H$. Considere ainda $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$. Com essas considerações, observe a ilustração a seguir:

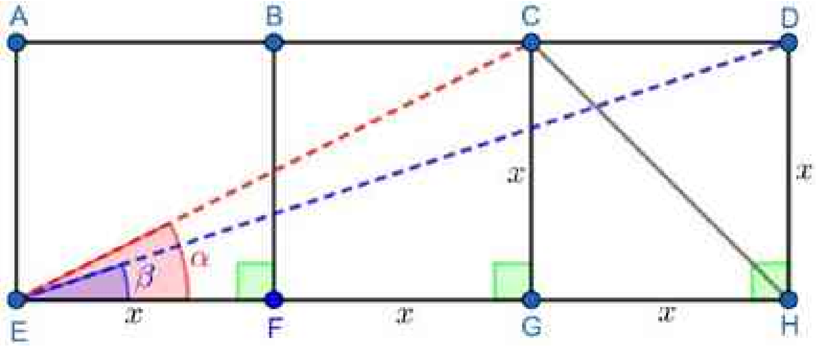


Figura 46: Soma das medidas dos ângulos α e β.

Note que o triângulo CEG é retângulo em G, logo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{x+x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Perceba que o triângulo DEH é retângulo em H, logo:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{x+x+x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Temos,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \quad = \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

Portanto, $\alpha + \beta = 45°$. ◊

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Trigonometria no triângulo retângulo;
- Tangente da soma de dois ângulos;
- Tangente de ângulos notáveis.

16. **(UECE 2012.1, Q. 23)** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $P(a, b)$ um ponto na interseção dos gráficos de f e g. Os possíveis valores para $tg^2 a$ são:

    (a) 0 ou 1.

    (b) 0 ou 2.

    (c) 0 ou 3.

    (d) 0 ou $\sqrt{3}$.

Solução. Seja $P = (a, b)$. Como P é a interseção entre os gráficos de f e g segue,

$$b = \operatorname{sen} a \tag{4.15}$$

$$b = \operatorname{sen} 2a. \tag{4.16}$$

Comparando as equações (4.15) e (4.16), teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2a &= \operatorname{sen} a \Rightarrow \\ 2 \operatorname{sen} a \cos a &= \operatorname{sen} a \Rightarrow \\ \operatorname{sen} a(2\cos a - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos:

$$\operatorname{sen} a = 0 \tag{4.17}$$

$$2\cos a - 1 = 0. \tag{4.18}$$

Note que $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria). Assim, da equação (4.17) obtemos:

$$\operatorname{sen} a = 0 \Rightarrow \cos a = \pm 1.$$

Da equação (4.18) teremos:

$$2\cos a - 1 = 0 \Rightarrow \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Daí, existem duas possibilidades a serem analisadas. Isto é,

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 a = \dfrac{\operatorname{sen}^2\, a}{\cos^2\, a} = \dfrac{0^2}{(\pm 1)^2} = 0 \\[3ex] \operatorname{tg}^2 a = \dfrac{\operatorname{sen}^2\, a}{\cos^2\, a} = \dfrac{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3. \end{cases}$$

Portanto, $\operatorname{tg}^2 a = 0$ ou $\operatorname{tg}^2 a = 3$. ◊

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Seno da soma de dois ângulos;
- Equações trigonométricas;
- Identidades trigonométricas.

17. **(UECE 2013.2, Q. 17)** Se α é um ângulo entre $0°$ e $90°$ tal que os números $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, nesta ordem, constituem uma progressão geométrica, então o valor de α é:

(a) 30°.

(b) 45°.

(c) 75°.

(d) 60°.

Solução. Note que em uma P.G. de razão q temos que $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Como $\dfrac{sen\ \alpha}{2}$, $sen\ \alpha$ e $tg\ \alpha$, nesta ordem, constituem uma P.G., então temos que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{sen\ \alpha}{\frac{sen\ \alpha}{2}} = \frac{tg\ \alpha}{sen\ \alpha}.$$

Segue então que

$$sen^2\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{2} \cdot tg\ \alpha$$

$$sen^2\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{2} \cdot \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

$$sen^2\ \alpha = \frac{sen^2\ \alpha}{2cos\ \alpha}$$

$$sen^2\ \alpha - \frac{sen^2\ \alpha}{2cos\ \alpha} = 0$$

$$sen^2\ \alpha \left(1 - \frac{1}{2cos\ \alpha}\right) = 0.$$

Com isso, obtemos:

$$sen^2\ \alpha = 0 \tag{4.19}$$

$$1 - \frac{1}{2cos\ \alpha} = 0. \tag{4.20}$$

Da equação (4.19), temos que $sen^2 \alpha = 0 \Rightarrow sen\ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0°$ (não convém, pois $0° < \alpha < 90°$).

Da equação (4.20), temos que $1 - \dfrac{1}{2cos\ \alpha} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2cos\ \alpha} = 1 \Rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$, pois $0° < \alpha < 90°$. $\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Definição de uma P.G;
- Equações trigonométricas;
- Cosseno de ângulos notáveis.

18. **(UECE 2018.2, Q. 15)** Se $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ é uma progressão aritmética cuja razão é igual a r e se para cada n tomarmos $b_n = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2$, então, $b_{n+1} - b_n$ é igual a:

    (a) $2r$.

    (b) $2r^2$.

    (c) $4r$.

    (d) $4r^2$.

Solução. Como $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ é uma P.A de razão r, então vale que

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_{n+1} - a_n = r.$$

Note que

$$b_n = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = r(a_{n+1} + a_n).$$

Como $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} b_n &= [(a_1 + nr) + (a_1 + (n-1)r)]\, r \\ &= [2a_1 + (2n-1)r]r \\ &= 2a_1 r + (2n-1)r^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$b_{n+1} = 2a_1 r + (2n+1)r^2.$$

Segue que,

$$b_{n+1} - b_n = (2n+1)r^2 - (2n-1)r^2 \quad \therefore \quad b_{n+1} - b_n = 2r^2.$$

$\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Definição de uma P.A;
- Termo geral de uma P.A.

19. **(UECE 2016.2, Q. 18)** Considere uma progressão aritmética, não constante, com sete termos, cuja razão é o número r. Se o primeiro, o terceiro e o sétimo termo desta progressão formam, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, então, a soma dos termos da progressão aritmética é igual a:

(a) $27r$.

(b) $30r$.

(c) $33r$.

(d) $35r$.

Solução. Considere (a_n) uma P.A finita de sete termos e razão $r \neq 0$.

Como a_1, a_3 e a_7 formam nessa ordem uma P.G, então $(a_3)^2 = a_1 \cdot a_7$.

Logo,

$$(a_1 + 2r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 6r) \Rightarrow (a_1)^2 + 4a_1 r + 4r^2 = (a_1)^2 + 6a_1 r \quad \therefore \quad a_1 = 2r.$$

Daí, $a_1 = 2r$ e $a_7 = 8r$. Logo, a soma S_7 dos 7 primeiros termos da P.A é igual a:

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = \frac{70r}{2} = 35r.$$

$\lozenge$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Termo geral de uma P.A;
- Propriedades de uma P.G;
- Soma dos termos de uma P.A.

20. **(UECE 2013.1, Q. 20)** Os estudiosos de astronomia constataram que o Cometa Halley se aproxima e pode ser visto da Terra a cada 76 anos. A mais antiga visão de que se tem registro data do ano de 1530 e a mais recente ocorreu em 1986. Uma vez mantida a constatação, ao longo do tempo, é possível prever corretamente que, no século $XXXI$, o Cometa Halley poderá ser visto da Terra:

(a) uma única vez, no final da terceira década.

(b) uma única vez, próximo à metade do século.

(c) duas vezes, nas primeira e oitava décadas.

(d) duas vezes, nas segunda e nona décadas.

Solução. Temos que o cometa Halley é visto a cada 76 anos, logo, temos uma P.A de razão $r = 76$. Note que $a_1 = 1530$, daí teremos a seguinte P.A:

$$(1530, 1606, \ldots 1976, \ldots a_n).$$

Perceba que o início do século $XXXI$ ocorre em 3001 e fim em 3100, logo $a_n \geq 3001$. Portanto,

$$1530 + (n-1) \cdot 76 \geq 3001 \Rightarrow 76n \geq 1547 \Rightarrow n \geq \frac{1547}{76} \therefore n \geq 20,35.$$

Como n é inteiro tem-se $n = 21$. Assim, $a_{21} = 1530 + 20 \cdot 76 = 3050$. Logo a P.A é dada por $(1530, 1606, \ldots 1986, \ldots 3050, 3126, \ldots)$ e, portanto, o cometa Halley poderá ser visto uma única vez próximo a metade do século $XXXI$. $\Diamond$

Conteúdos necessários para resolver a questão:

- Sistema de medida: tempo;
- Definição de uma P.A;
- Termo geral de uma P.A.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de Matemática tem-se caracterizado pela preocupação de apresentar regras, definições, técnicas, nomenclatura de uma maneira prática e eficiente. No entanto, há uma necessidade de transformação dos métodos de ensino dessa área, visto que muitos discentes não conseguem assimilar os assuntos abordados em sala de aula com os assuntos cobrados nos vestibulares, por exemplo, o vestibular da UECE.

A Matemática estuda objetos abstratos através de métodos dedutivos. Por essa razão, os professores de Matemática da Educação Básica devem dinamizar suas atividades de modo a motivar os alunos, e com isso, desenvolver estratégias focadas no interesse pela aprendizagem da disciplina, de modo a garantir o êxito nas questões de vestibulares, e consequentemente, o ingresso na universidade.

Este trabalho teve como proposta esboçar um perfil da prova de Matemática do vestibular da UECE, para que assim, o aluno tenha uma base de quais conteúdos são mais importantes para a realização da prova, bem como analisar, apresentar e resolver as questões de Matemática mais recorrentes nos vestibulares da UECE, de modo a fornecer auxílio aos professores da área através de um banco de questões/soluções sempre atentando para manter a relação entre o conteúdo estudado e a teoria aplicada.

A pesquisa bibliográfica foi desenvolvida sob a organização de um cabedal de questões de Matemática cujo teor foram os temas mais explorados no vestibulares da UECE em um período de 8 anos. Com isso, foram destacados os principais conceitos e resultados necessários para o êxito dos alunos nas questões da disciplina, e de posse desses resultados, foram apresentadas as soluções das questões unindo teoria e prática.

Espera-se que o material desenvolvido nesta pesquisa sejam utilizados por alunos e professores de Matemática do Ensino Médio, de modo a orientá-los na preparação para o vestibular da UECE e demais universidades do país.

REFERÊNCIAS

[1] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. ***Fundamentos de Matemática Elementar.*** *Geometria Plana.* v. 9. 9ª ed. São Paulo, Atual Editora, 2013.

[2] <http://coisadecearense.com.br/universidade-estadual-do-ceara-uece/>. Acesso em 01 de Maio de 2019.

[3] <https://www.sct.ce.gov.br/2017/09/05/cursos-da-uece-atingem-nota-maxima-na-avaliacao-do-mec/>. Acesso em 10 de Maio de 2019.

[4] <http://www.uece.br>. Acesso em 19 de Março de 2019.

[5] <http://www.uece.br/cev/>. Acesso em 30 de Março de 2019.

[6] <http://ruf.folha.uol.com.br/2018/ranking-de-universidades/>. Acesso em 29 de Abril de 2019.

[7] IEZZI, Gelson. ***Fundamentos de Matemática Elementar.*** *Complexos, Polinômios, Equações.* v. 6. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[8] IEZZI, Gelson. ***Fundamentos de Matemática Elementar.*** *Trigonometria.* v. 3. 9ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[9] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. ***Fundamentos de Matemática Elementar.*** *Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* v. 4. 2ª ed. São Paulo, Atual Editora, 1977.

[10] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. ***Fundamentos de Matemática Elementar.*** *Funções.* v. 1. 3ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

[11] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. ***Temas e Problemas Elementares.*** 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

[12] LIMA, Elon Lages. ***Números e Funções Reais.*** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

[13] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. ***Matemática discreta.*** 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

[14] MUNIZ NETO, A. C. ***Geometria.*** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[15] SANTOS, Wladir dos. ***Ensino Modular: Uma Revolução Brasileira na Educação.*** Campinas. São Paulo, Edilap, 1994.