



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

AILTON BORGES DO NASCIMENTO

**UM CADERNO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA
SALA DE AULA**

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ

2019

AILTON BORGES DO NASCIMENTO

UM CADERNO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA
SALA DE AULA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.

Coorientador: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ

2019



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Um Caderno de Construções Geométricas para Sala de Aula

AILTON BORGES DO NASCIMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 19 de julho de 2019.

Banca Examinadora

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Orientador

Plácido Francisco de Assis Andrade
Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Coorientador - UFCA

Francisco de Assis Benjamin Filho
Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamin Filho

UFCA

Aos meus pais, Maria Nocy e Antônio Borges (in memorian), meus irmãos, André, Andréia e Arlene, meus avós maternos, Isaías Antônio (segundo pai) e Maria Antônia (in memorian) e minha namorada Jordânia.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por nos dar meios para alcançar nossos objetivos.

A minha mãe, Maria Nécycy, que cedo se viu viúva com 4 crianças, mas não mediu esforços para nos criar com amor, carinho e educação.

A meus irmãos, André, Andréia e Arlene, pelo carinho, ajuda e incentivo.

A meu pai, Antônio Borges, que, embora não tenha permanecido muito tempo conosco, deixou saudades.

Aos meus avós maternos, Isaías Antônio e Maria Antônia (in memoriam), que com a morte de nosso pai, vieram morar conosco, ajudando na nossa criação.

À Jordânia Oliveira, minha namorada e musa inspiradora, por estar sempre ao meu lado e a sua mãe, Aparecida Bastos, pelo seu carinho e enorme coração.

Aos colegas do mestrado, os quais tive o prazer de conhecer, pelos momentos de estudos, descontração e companheirismo.

Aos colegas de trabalho, que de alguma forma contribuíram, seja com uma palavra de incentivo, um puxão de orelha ou ajudaram em alguma atividade no trabalho.

A todos os professores do mestrado, que contribuíram com nossa formação compartilhando seus valiosos conhecimentos.

Ao meu orientador Valdinês, pelo excelente professor que é e pela ajuda prestada na orientação.

Ao meu coorientador Plácido, pelas valiosas sugestões e correções.

Ao professor Francisco de Assis, pelas correções propostas.

À SBM, pela promoção do curso.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“O que não nos mata, nos fortalece”.

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo resgatar e incentivar o estudo das construções geométricas com régua e compasso, apresentando um material de apoio para professores, alunos e curiosos que queiram ter um contato inicial com elas. São apresentadas construções que podem ser facilmente trabalhadas com alunos da educação básica. A abordagem é feita de maneira detalhada, com ilustração, descrição e justificativa. No último capítulo são apresentados alguns exercícios para reforçar as construções estudadas com as respectivas soluções.

Palavras-chave: Construções geométricas. Régua. Compasso. Educação básica.

Abstract

This dissertation aims to rescue and encourage the study of geometric constructions with ruler and compass, presenting a support material for teachers, students and curious who want to have an initial contact with them. constructionsIn are presented which can be easily worked with students of basic education.Their approach is detailed, with illustration, description and justification. In the last chapter, some exercises are presented to reinforce the constructions studied with the respective solutions.

Keywords: Geometric constructions. Ruler. Compass. Basic education.

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Segmento \overline{PQ} | 22 |
| 1.2 | Construção de um segmento congruente a outro | 23 |
| 1.3 | Segmento \overline{AB} | 24 |
| 1.4 | Construção da mediatriz de um segmento | 24 |
| 1.5 | Segmento \overline{AB} | 25 |
| 1.6 | Determinação do ponto médio de um segmento | 25 |
| 1.7 | Reta r e pontos A e B | 26 |
| 1.8 | Determinação do ponto de uma reta equidistante de dois pontos fora dela . | 26 |
| 1.9 | Ponto P fora da reta r | 27 |
| 1.10 | Construção de uma perpendicular a uma reta que passa por um ponto fora dela | 28 |
| 1.11 | Segmento \overline{AB} | 29 |
| 1.12 | Construção de uma perpendicular a um extremo de segmento | 29 |
| 1.13 | Ponto A e reta r | 30 |
| 1.14 | Determinação do ponto simétrico a outro em relação a uma reta. | 30 |
| 1.15 | Reta r | 31 |
| 1.16 | Construção de uma reta paralela a outra | 31 |
| 1.17 | Reta r e ponto P | 32 |
| 1.18 | Construção de uma reta paralela a outra passando por um ponto fora desta | 33 |
| 1.19 | Segmento \overline{PQ} | 34 |
| 1.20 | Divisão de um segmento em cinco partes congruentes | 34 |
| 2.1 | Ângulo \hat{A} | 36 |
| 2.2 | Construção de um ângulo congruente a outro | 37 |
| 2.3 | Ângulo \hat{A} | 38 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.4 | Construção da bissetriz de um ângulo | 38 |
| 2.5 | Construção de um ângulo reto | 39 |
| 2.6 | Construção de um ângulo com 60° | 40 |
| 2.7 | Construção de um ângulo com 30° | 41 |
| 2.8 | Ângulos \hat{A} e \hat{B} | 42 |
| 2.9 | Construção de um ângulo cuja medida é igual à soma das medidas de dois ângulos | 42 |
| 2.10 | Construção de um ângulo cuja medida é a diferença entre as medidas de dois ângulos | 43 |
| 3.1 | Determinação do centro de uma circunferência | 45 |
| 3.2 | Determinação do diâmetro de uma circunferência | 46 |
| 3.3 | Segmento \overline{PQ} e pontos A e B | 47 |
| 3.4 | Construção de uma circunferência conhecendo-se dois de seus pontos e a medida de seu raio | 47 |
| 3.5 | Arco \widehat{AB} | 48 |
| 3.6 | Determinação do ponto médio de um arco | 48 |
| 3.7 | Circunferência de centro no ponto A que contém o ponto M | 49 |
| 3.8 | Construção da reta tangente a uma circunferência no ponto M | 49 |
| 3.9 | Ponto A e circunferência de centro B | 50 |
| 3.10 | Construção de retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto fora dela | 51 |
| 3.11 | Reta r e ponto A | 52 |
| 3.12 | Circunferência tangente à reta r que contém o ponto A | 52 |
| 3.13 | Ângulo \hat{A} | 53 |
| 3.14 | Construção de uma circunferência tangente aos lados de um ângulo | 53 |
| 3.15 | Dividindo uma circunferência em 2, 4, 8,... arcos congruentes | 54 |
| 3.16 | Dividindo uma circunferência em 3, 6, 12,... arcos congruentes | 55 |
| 4.1 | Segmentos \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} | 57 |
| 4.2 | Construção de um triângulo cujas medidas dos lados são conhecidos. | 58 |
| 4.3 | Segmentos \overline{PQ} e \overline{UV} | 59 |
| 4.4 | Construção de um triângulo cujas medidas da base e da altura são conhecidas | 59 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.5 | Construção de um triângulo equilátero | 60 |
| 4.6 | Construção de um quadrado | 61 |
| 4.7 | Segmento \overline{PQ} | 62 |
| 4.8 | Construção de um quadrado cujo comprimento da diagonal é conhecido . . | 63 |
| 4.9 | Ângulo \hat{H} e segmentos \overline{AB} e \overline{CD} | 64 |
| 4.10 | Construção de um paralelogramo sabendo-se as medidas de dois lados e do ângulo entre eles | 64 |
| 4.11 | Segmentos \overline{PQ} e \overline{RS} | 66 |
| 4.12 | Construção de um losango sabendo as medidas dos lados e de uma diagonal | 66 |
| 4.13 | Ângulo \hat{PQR} e segmento \overline{MN} | 67 |
| 4.14 | Construção de um losango sabendo as medidas dos lados e de um ângulo . | 68 |
| 4.15 | Construção de um hexágono regular | 69 |
| 5.1 | Segmento \overline{AB} | 70 |
| 5.2 | Retas r e s e pontos A , B e C | 71 |
| 5.3 | Pontos A e B e reta r | 71 |
| 5.4 | Ângulo \hat{ABC} e \hat{DEF} | 72 |
| 5.5 | Triângulo ABC | 72 |
| 5.6 | Triângulo ABC | 73 |
| 5.7 | Quadrilátero $ABCD$ | 73 |
| 5.8 | Triângulo ABC | 74 |
| 5.9 | Triângulo PQR | 74 |
| 5.10 | Pontos A , B e C | 75 |
| 5.11 | Reta r e pontos A e B | 75 |
| 5.12 | Segmento \overline{PQ} | 75 |
| 5.13 | Circunferência contendo o ponto A e segmento \overline{MN} | 76 |
| 5.14 | Circunferência de centro em A e pontos B e C | 76 |
| 5.15 | Segmentos \overline{PQ} e \overline{RS} | 76 |
| 5.16 | Segmento \overline{PQ} | 77 |
| 5.17 | Segmentos \overline{PQ} e \overline{RS} | 77 |
| 5.18 | Triângulo ABC | 77 |
| 5.19 | Triângulo DEF | 78 |
| 5.20 | Retas paralelas r e s e ponto A | 78 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.21 | Segmento \overline{MN} | 78 |
| 5.22 | Circunferência de centro no ponto O | 79 |
| 5.23 | Triângulo ACE | 79 |
| 5.24 | Segmento \overline{PQ} | 80 |
| 5.25 | Segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} | 80 |
| 5.26 | Segmento \overline{PR} | 81 |
| 5.27 | Segmento \overline{TM} | 81 |
| 5.28 | Segmento \overline{MO} | 82 |
| 5.29 | Segmento \overline{UX} | 82 |
| 5.30 | Reta paralela a r que contém o ponto A | 83 |
| 5.31 | Perpendicular a s que contém A | 84 |
| 5.32 | Perpendicular à reta \overleftrightarrow{AC} que contém B | 85 |
| 5.33 | Ponto I na interseção entre as perpendiculares das retas r e s nos pontos B e A , respectivamente | 86 |
| 5.34 | Ilustração da solução | 87 |
| 5.35 | Bissetriz do ângulo \hat{DEF} | 87 |
| 5.36 | Ângulo com medida $\alpha + \beta$ | 88 |
| 5.37 | Ângulo com medida 3α | 88 |
| 5.38 | Ângulo com medida $3\alpha - \frac{\beta}{2}$ | 89 |
| 5.39 | Mediana relativa a \overline{BC} | 90 |
| 5.40 | Altura relativa a \overline{AC} | 91 |
| 5.41 | Bissetriz relativa ao ângulo \hat{A} | 92 |
| 5.42 | Mediatriz relativa a \overline{AB} | 93 |
| 5.43 | Ângulo \hat{POS} cuja medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC | 94 |
| 5.44 | Ângulo \hat{POT} cuja medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ | 95 |
| 5.45 | Incentro | 96 |
| 5.46 | Ortocentro | 96 |
| 5.47 | Baricentro | 97 |
| 5.48 | Circuncentro | 98 |
| 5.49 | Circunferência que contém os pontos A , B e C | 99 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.50 | Ponto H da reta r tal que a soma $\text{med}(\overline{AH}) + \text{med}(\overline{HB})$ é a menor possível | 100 |
| 5.51 | Retângulo | 101 |
| 5.52 | Segmentos \overline{AB} e \overline{AC} congruentes a \overline{MN} | 102 |
| 5.53 | Circunferências tangentes em B | 103 |
| 5.54 | Circunferências tangentes externamente | 104 |
| 5.55 | Quadrado ABCD | 105 |
| 5.56 | Segmento cuja medida é $\sqrt{a \cdot b}$ | 106 |
| 5.57 | Circunferência inscrita no triângulo ABC | 107 |
| 5.58 | Circunferência circunscrita ao triângulo DEF | 108 |
| 5.59 | Circunferência que contém o ponto A e é tangente às retas r e s | 109 |
| 5.60 | Triângulo equilátero ABC | 110 |
| 5.61 | Quadrado PQRS | 110 |
| 5.62 | Hexágono regular | 111 |
| 5.63 | Triângulo circunscrito à circunferência | 112 |
| 5.64 | Hexágono circunscrito ao triângulo | 113 |
| 5.65 | Segmento \overline{PQ} de medida $a\sqrt{2}$ | 114 |
| 5.66 | Segmento de medida $\frac{b \cdot c}{a}$ | 116 |

Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| A, B, C, \dots (Letras maiúsculas) | Pontos |
| a, b, c, \dots (Letras minúsculas) | Medidas de segmentos |
| r, s, t, \dots (Letras minúsculas) | Retas |
| α, β (Letras minúsculas do alfabeto grego) | Medidas de ângulos |
| \overline{AB} | Segmento com extremidades nos pontos A e B |
| \overrightarrow{AB} | Semirreta com origem no ponto A e que contém o ponto B |
| \overleftrightarrow{AB} | Reta que contém os pontos A e B |
| \widehat{AB} | Arco com extremidades nos pontos A e B |
| \hat{A} | Ângulo com vértice no ponto A |
| \hat{ABC} | Ângulo formado pelas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} |
| $+$ | Sinal de adição |
| $-$ | Sinal de subtração |
| \cdot | Sinal de multiplicação |
| $\frac{a}{b}$ ou a/b | Fração de numerador a e denominador b |
| \sqrt{a} | Raiz quadrada de a |
| x^2 | x elevado ao quadrado |
| $=$ | Igual a |
| \perp | Perpendicular a |
| \cong | Congruente a |
| $\text{med}(\)$ | Medida de |

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Resumo | 7 |
| Abstract | 8 |
| Lista de Figuras | 9 |
| Lista de Símbolos | 14 |
| Introdução | 18 |
| 1 Pontos, segmentos de retas e retas | 22 |
| 1.1 Segmentos congruentes | 22 |
| 1.2 Mediatriz de um segmento | 24 |
| 1.3 Ponto médio de um segmento | 25 |
| 1.4 Ponto de uma reta equidistante a dois pontos fora dela | 26 |
| 1.5 Perpendicular a uma reta que passa por um ponto fora dela | 27 |
| 1.6 Perpendicular a um extremo de segmento | 29 |
| 1.7 Ponto simétrico a outro em relação a uma reta | 30 |
| 1.8 Retas paralelas | 31 |
| 1.9 Reta paralela a outra passando por um ponto fora dela | 32 |
| 1.10 Divisão de um segmento em partes congruentes | 34 |
| 2 Ângulos | 36 |
| 2.1 Ângulos congruentes | 36 |
| 2.2 Bissetriz de um ângulo | 38 |
| 2.3 Ângulo com 90° | 39 |
| 2.4 Ângulo com 60° | 40 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.5 | Ângulos com 30° e 45° | 41 |
| 2.6 | Ângulo cuja medida é igual à soma das medidas de dois ângulos dados . . . | 42 |
| 2.7 | Ângulo cuja medida é igual à diferença entre as medidas de dois ângulos dados | 43 |
| 3 | Circunferências | 45 |
| 3.1 | Determinação do centro de uma circunferência | 45 |
| 3.2 | Determinação do diâmetro de uma circunferência | 46 |
| 3.3 | Construção de uma circunferência conhecendo o raio e dois de seus pontos | 47 |
| 3.4 | Ponto médio de um arco | 48 |
| 3.5 | Reta tangente a uma circunferência no ponto M | 49 |
| 3.6 | Tangentes a uma circunferência que passam por um ponto fora dela | 50 |
| 3.7 | Circunferência tangente a uma reta e que passa por um ponto fora dela . . | 52 |
| 3.8 | Circunferência tangente aos lados de um ângulo | 53 |
| 3.9 | Divisão de uma circunferência em 2, 4, 8,... arcos congruentes | 54 |
| 3.10 | Divisão de uma circunferência em 3, 6, 12,... arcos congruentes | 55 |
| 4 | Polígonos | 57 |
| 4.1 | Construção de um triângulo sabendo o comprimento dos seus lados | 57 |
| 4.2 | Construção de um triângulo sabendo-se as medidas da base e da altura . . | 59 |
| 4.3 | Construção de um triângulo equilátero | 60 |
| 4.4 | Construção de um quadrado | 61 |
| 4.5 | Construção de um quadrado sabendo-se o comprimento da diagonal | 62 |
| 4.6 | Construção de um paralelogramo sabendo-se as medidas de dois lados e do ângulo entre eles | 64 |
| 4.7 | Construção de um losango sabendo-se as medidas dos lados e de uma diagonal | 65 |
| 4.8 | Construção de um losango sabendo-se as medidas dos lados e de um ângulo | 67 |
| 4.9 | Construção de um hexágono regular | 69 |
| 5 | Exercícios e soluções | 70 |
| 5.1 | Exercícios | 70 |
| 5.2 | Soluções | 80 |
| | Considerações Finais | 117 |

Introdução

As construções geométricas ou desenhos geométricos já tiveram maior destaque na educação brasileira. Porém, por diversos fatores como reformas educacionais, fim de cobrança em vestibulares, remoção deste tema das grades de alguns cursos, entre outros, sua inserção nos currículos escolares foi reduzida, desde o Ensino Fundamental ao Superior. Zuin, em [10], faz uma abordagem histórica do desenho geométrico, mostrando a desvalorização que ele sofreu ao longo dos anos. Já Wagner, em [9], afirma que as construções estão cada vez mais ausentes dos currículos escolares. Contudo, as construções geométricas com régua e compasso proporcionam vários benefícios para a aprendizagem de Geometria e devem ser inseridas nas grades curriculares de todos os níveis da educação.

Assim como os diversos ramos da Matemática, a Geometria apresenta inúmeros conceitos abstratos, cujas noções e propriedades nem sempre são assimiladas pelos estudantes. Em meio a esta problemática, a representação desses conceitos como pontos, retas e ângulos, em forma de figuras, proporcionadas pelas construções, ajudam no processo de ensino-aprendizagem. As figuras, de certo modo, permitem a visualização de algo que é apenas teórico, dando forma ao que não existe fisicamente. Zuin [10], afirma que as construções geométricas, se bem trabalhadas e contextualizadas, como confirmam alguns estudos, propiciam o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, além de materializar situações abstratas, vistas apenas na teoria, contribuindo para a construção do conhecimento em geometria. Segundo Marmo, C e Marmo, N, em [5], o desenho estuda as figuras (abstratas) relacionando-as com suas representações (que são concretas). O desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria.

Nas construções são trabalhados a coordenação motora, a organização, o raciocínio e a criatividade. Para justificarmos a validade das mesmas, fazemos demonstrações, embasadas em conhecimentos matemáticos adquiridos, levando o aluno a desenvolver a escrita matemática, interpretação, organização de ideias e argumentação. Albrecht e Oliveira,

em [1], ressaltam que o estudo e a prática do Desenho Geométrico se constituem num exercício mental capaz de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e a criatividade. Para Micele e Ferreira [6], o cultivo da capacidade de interpretação e representação de desenhos bi ou tridimensionais, desde as fases iniciais do aprendizado, é uma forma de desenvolver não só a criatividade e coordenação motora, mas igualmente o raciocínio e, ainda, apurar a aptidão para comunicação em diferentes aspectos na busca por soluções de problemas diversos.

Diante dos potenciais benefícios que o trabalho com as construções podem trazer nas aulas de Geometria, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4], apresenta várias habilidades relacionadas com o tema, as quais se espera que o aluno desenvolva, tais como: (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de Geometria Dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.

Portanto, tendo em vista a importância deste tema no ensino de Geometria, esta dissertação destina-se a servir de material de apoio para professores, alunos e a quem interessar, apresentando uma série de construções que servem como uma introdução para aqueles que possuem noções básicas de Geometria Plana, mas não tiveram contato com o assunto ou queiram ver um material mais acessível. Seu conteúdo pode ser trabalhado com alunos da Educação Básica, a partir do Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano), cabendo ao professor analisar quais as construções que devem ser trabalhadas com seus alunos de acordo com suas séries e conhecimentos prévios.

Os quatro primeiros capítulos tratam das construções e são divididos pelos tipos de elementos que são construídos. O primeiro capítulo trata de construções relacionadas a pontos, segmentos de retas e retas; o segundo aborda ângulos; o terceiro apresenta construções relacionadas à circunferência e o quarto versa sobre polígonos. Nestes capítulos,

todas as construções são apresentadas de maneira simples e detalhada. As ilustrações são feitas passo a passo, pois é comum, no primeiro contato, os alunos terem dificuldades em entender as construções prontas pela presença de inúmeros elementos auxiliares. Cada passo da ilustração apresenta a descrição correspondente. Por fim, é apresentada a justificativa da construção, que é feita através de argumentos da Educação Básica, relacionando-a com outros conhecimentos adquiridos. Em alguns momentos, são feitas breves revisões de definições.

O quinto capítulo é dividido em duas seções. Na primeira, é apresentada uma série de questões para que os alunos possam exercitar o que aprenderam e descobrir novas construções. Algumas questões fazem referência a conteúdos que eles já estudaram ou irão estudar, o que pode servir para reforçá-los ou introduzi-los. Cabe ao professor utilizá-las da melhor forma possível ou criar suas próprias questões, usando sua criatividade conforme lhe for conveniente. Na segunda seção, apresentamos as soluções. Elas iniciam com um comentário, seguido da descrição e respectiva ilustração da construção concluída. Aqui não fazemos a ilustração passo a passo, pois nesta etapa, espera-se que o leitor já tenha adquirido certa maturidade e consiga entender a figura pronta. Como uma construção pode ter mais de um modo de execução, essas soluções não são únicas, podendo o leitor fazê-las de maneiras diferentes, porém corretas.

Para a execução das construções, só é permitido o uso de compasso, régua, lápis e borracha. O compasso é usado para construirmos circunferências e arcos da mesma. A ponta usada para apoiarmos no papel é chamada de ponta seca e a que usamos para traçar a circunferência, de grafite. A régua é usada para servir de apoio para o lápis e assim conseguirmos traçar retas, semirretas e segmentos de retas, não sendo permitido o seu uso para fazer medições. O lápis, além de ser usado nas construções mencionadas anteriormente, serve para marcar pontos, enquanto a borracha é usada para apagarmos algum erro cometido ou os elementos auxiliares.

Nas ilustrações, as linhas mais finas e os pontos menores são elementos auxiliares, que não fazem parte da figura desejada, mas dão suporte para desenhá-las. Os pontos maiores e as linhas mais grossas são dados fornecidos ou elementos do desenho desejado. Na maioria dos casos, se uma construção necessitar de uma outra já vista, esta não será descrita novamente, apenas citaremos em qual seção ela se encontra.

A maioria das construções, definições e exercícios foi embasada nas referências [2],

[3], [7], [8] e [9], sendo as outras de minha autoria. As figuras foram feitas no *software* GeoGebra Classic 5 e editadas no PhotoScape.

Capítulo 1

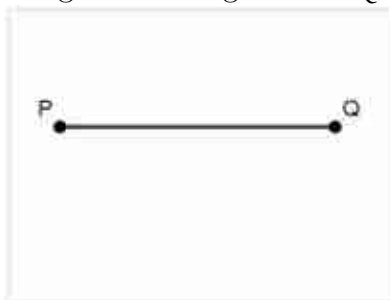
Pontos, segmentos de retas e retas

Pontos e retas são entes geométricos sem definição cujas noções e características são de conhecimento do público alvo dessa dissertação. Um segmento de reta é o conjunto de todos os pontos de uma reta compreendidos entre dois pontos distintos denominados de extremos, em outras palavras, é uma porção da reta com início e fim. Neste capítulo abordaremos algumas construções relacionadas com estes elementos.

1.1 Segmentos congruentes

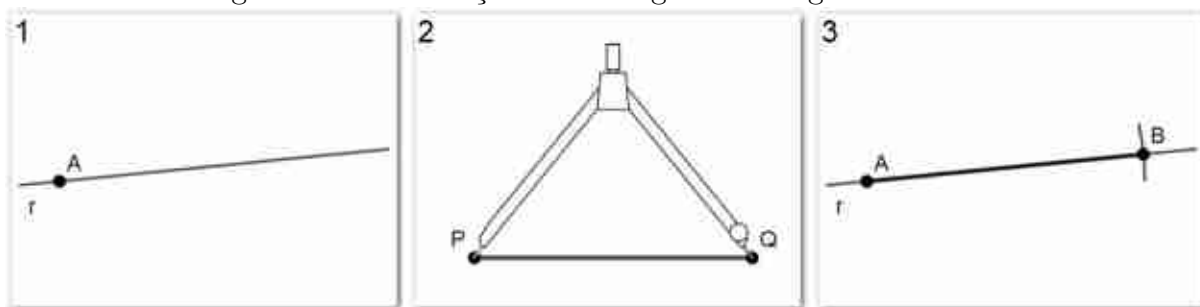
Diz-se que dois segmentos são congruentes quando possuem a mesma medida. Dado um segmento \overline{PQ} , vamos construir um segmento congruente a ele.

Figura 1.1: Segmento \overline{PQ}



Fonte: Autor

Figura 1.2: Construção de um segmento congruente a outro



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma reta e sobre a mesma marque o ponto A ;
2. Tome a medida do segmento \overline{PQ} , ou seja, abra o compasso e coloque as suas pontas sobre os extremos do segmento \overline{PQ} para que a distância entre as pontas seja igual ao comprimento deste segmento.
3. Preservando a abertura obtida no item anterior, coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto A e faça um pequeno arco intersectando a reta no ponto que denominaremos de B . O segmento \overline{AB} é congruente a \overline{PQ} .

Observação: A reta inicial sobre a qual fazemos uma figura é chamada de reta suporte. Na maioria das construções onde um dos passos é construir um segmento congruente, omitimos a reta suporte e já ilustramos o segmento pronto, o que não causará prejuízo devido à facilidade dessa construção. Fizemos isso para evitar excesso de elementos auxiliares que podem dificultar o entendimento da ilustração.

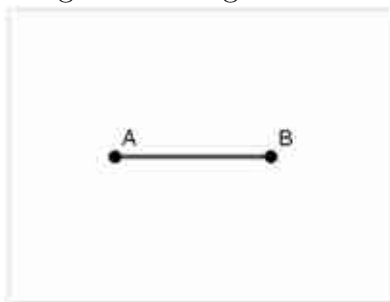
JUSTIFICATIVA:

Ao colocar as pontas do compasso sobre os extremos do segmento \overline{PQ} , a distância entre elas é igual ao comprimento do segmento. Como o segmento \overline{AB} foi construído usando essa abertura, este segmento apresenta a mesma medida do segmento \overline{PQ} . Portanto, os dois segmentos são congruentes.

1.2 Mediatriz de um segmento

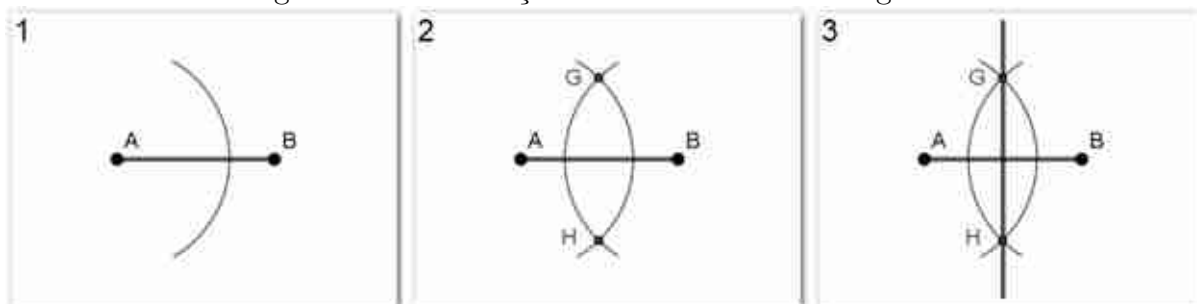
A mediatriz de um segmento \overline{AB} é a reta formada por todos os pontos do plano que são equidistantes dos extremos desse segmento. Vejamos como construir tal reta.

Figura 1.3: Segmento \overline{AB}



Fonte: Autor

Figura 1.4: Construção da mediatriz de um segmento



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Com a distância entre as pontas do compasso maior que a metade da medida do segmento, coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto A e construa um arco intersecando o segmento;
2. Com a mesma abertura do compasso usado no passo anterior, coloque a ponta seca em B e construa outro arco, intersecando o arco já existente nos pontos G e H;
3. Construa uma reta passando pelos pontos G e H. Esta reta é a mediatriz do segmento.

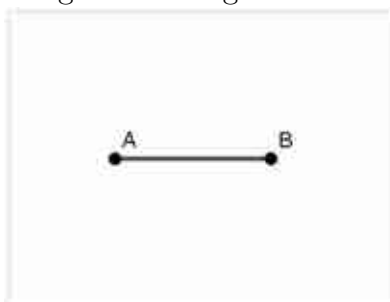
JUSTIFICATIVA:

A distância de qualquer ponto dos arcos aos seus respectivos centros é a mesma. Como os dois arcos foram construídos com a mesma abertura, os pontos G e H, de interseção dos mesmos, são equidistantes dos pontos A e B, que são os centros dos arcos. Da Geometria Plana, sabemos que dois pontos determinam uma reta e que a reta mediatriz é o conjunto de pontos do plano equidistantes dos extremos do segmento, dessa forma, como já temos dois pontos da mediatriz, os pontos G e H, a reta que os contém é a mediatriz do segmento \overline{AB} .

1.3 Ponto médio de um segmento

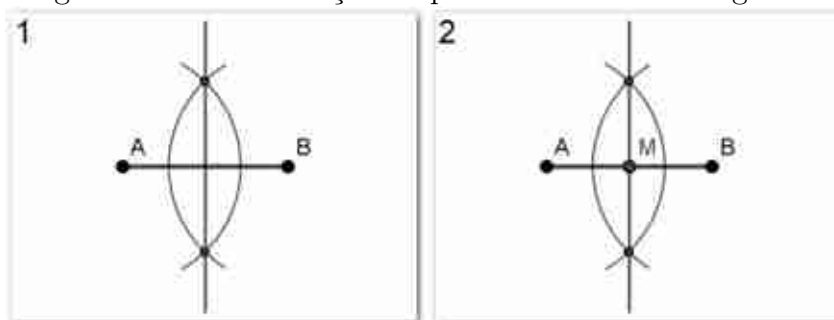
O ponto médio do segmento \overline{AB} é o ponto M do segmento tal que os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} são congruentes. Vamos determinar o ponto médio de \overline{AB} .

Figura 1.5: Segmento \overline{AB}



Fonte: Autor

Figura 1.6: Determinação do ponto médio de um segmento



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace a mediatriz do segmento \overline{AB} (ver Seção 1.2);

2. Marque o ponto M de interseção da mediatriz com o segmento. Este é o ponto médio.

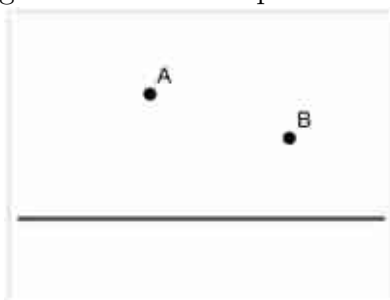
JUSTIFICATIVA:

Como a mediatriz de um segmento é o conjunto de pontos do plano equidistante dos seus extremos, o ponto de interseção do segmento com sua mediatriz é o ponto que pertence ao segmento e é equidistante de seus extremos, ou seja, é o ponto médio do segmento.

1.4 Ponto de uma reta equidistante a dois pontos fora dela

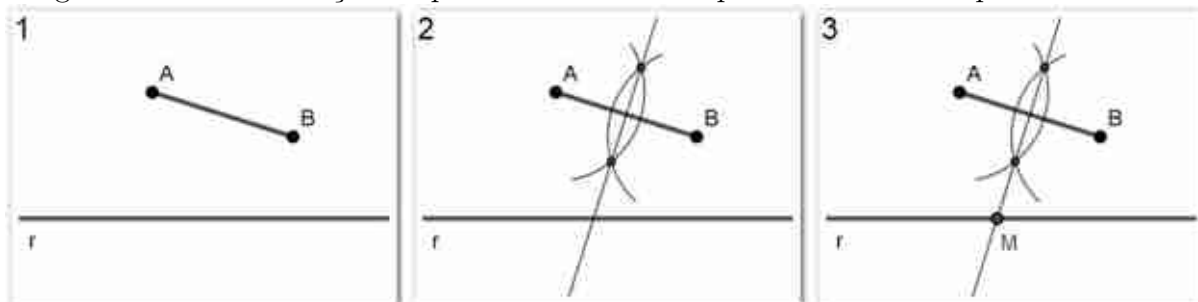
Sejam r uma reta e A e B pontos fora dela. Determinaremos o ponto de r que é equidistante dos pontos A e B .

Figura 1.7: Reta r e pontos A e B



Fonte: Autor

Figura 1.8: Determinação do ponto de uma reta equidistante de dois pontos fora dela



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa o segmento \overline{AB} ;
2. Trace a mediatriz de \overline{AB} (ver Seção 1.2);
3. Marque o ponto M de interseção da mediatriz com a reta r . O ponto M pertence à reta e é equidistante de A e B .

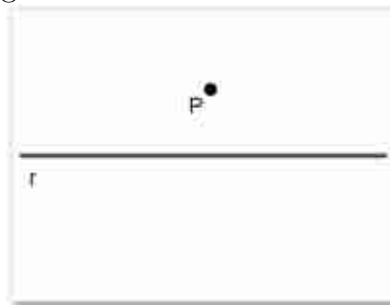
JUSTIFICATIVA:

Como a reta mediatriz do segmento \overline{AB} é a reta que contém todos os pontos equidistantes a A e B e o ponto M pertence à mediatriz e à reta r , segue que o ponto M atende às condições que queremos.

1.5 Perpendicular a uma reta que passa por um ponto fora dela

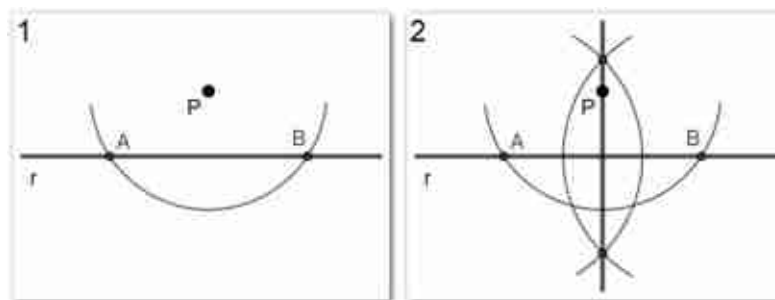
Dada uma reta, qualquer reta que a intersecta formando ângulos retos com a mesma é chamada de perpendicular. Seja r uma reta e P um ponto fora dela. Vejamos como traçar uma perpendicular a r passando por P .

Figura 1.9: Ponto P fora da reta r



Fonte: Autor

Figura 1.10: Construção de uma perpendicular a uma reta que passa por um ponto fora dela



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Coloque a ponta seca do compasso sobre P e trace um arco intersectando a reta r nos pontos A e B .
2. Trace a mediatriz do segmento com extremidades em A e B . Esta reta é a perpendicular procurada (ver Seção 1.2).

Observação: Podemos usar esses mesmos passos para traçar a perpendicular a uma reta passando por um ponto da mesma. Tome esse ponto como o ponto P e siga a descrição.

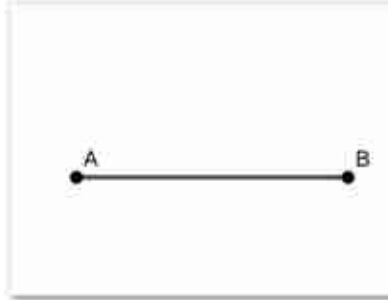
JUSTIFICATIVA:

Para justificar essa construção, devemos mostrar que a mediatriz de um segmento é perpendicular ao mesmo. Sejam M o ponto de interseção da mediatriz com a reta r e N um dos pontos de interseção dos dois últimos arcos construídos. Agora imagine que estejam traçados os segmentos \overline{AN} e \overline{BN} . Os triângulos AMN e BMN são congruentes pelo caso LLL (lado-lado-lado), pois $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (M é ponto médio de \overline{AB}), $\overline{AN} \cong \overline{BN}$ (raios dos arcos que foram construídos com a mesma abertura) e \overline{MN} é um lado comum. Observe que os ângulos \widehat{AMN} e \widehat{BMN} são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é 180° , e eles são congruentes, pois são ângulos correspondentes de triângulos congruentes. Logo $\text{med}(\widehat{AMN}) = \text{med}(\widehat{BMN}) = 90^\circ$. Portanto, a mediatriz é perpendicular ao segmento e, consequentemente, à reta.

1.6 Perpendicular a um extremo de segmento

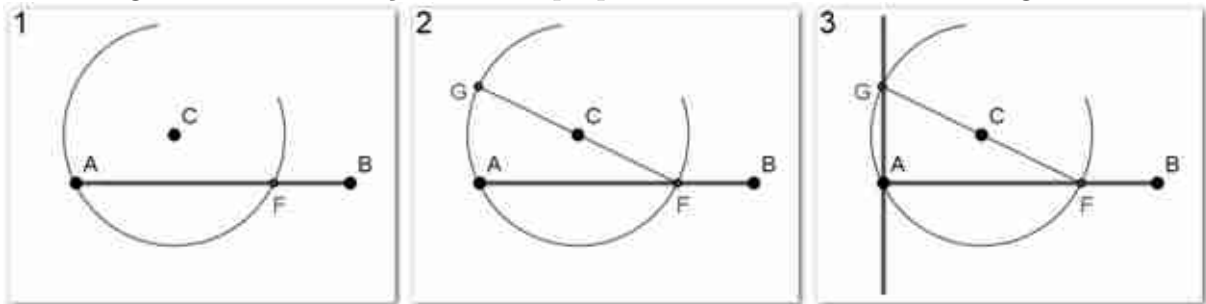
Vamos traçar uma reta que intersete o segmento \overline{AB} no ponto A e que seja perpendicular ao mesmo.

Figura 1.11: Segmento \overline{AB}



Fonte: Autor

Figura 1.12: Construção de uma perpendicular a um extremo de segmento



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Marque um ponto C , acima do segmento e mais próximo do ponto A , e com a ponta seca sobre C construa um arco que passe por A e intersete o segmento em outro ponto, que o chamaremos de F .
2. Trace um segmento com extremo em F que passe por C e termine no ponto onde ele intersesta o arco novamente, ponto este que será indicado por G .
3. Trace uma reta pelos pontos A e G . Esta é a reta procurada.

JUSTIFICATIVA:

Sabemos, da Geometria Plana, que um triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo. Agora observe que o arco construído tem centro no ponto C . Dessa forma, o segmento \overline{FG} é um diâmetro da circunferência que contém o arco e o triângulo ABC está inscrito numa semicircunferência. Logo, segue que o ângulo \hat{GAF} é reto e, portanto, a reta \overleftrightarrow{AG} é perpendicular ao segmento \overline{AB} no ponto A .

1.7 Ponto simétrico a outro em relação a uma reta

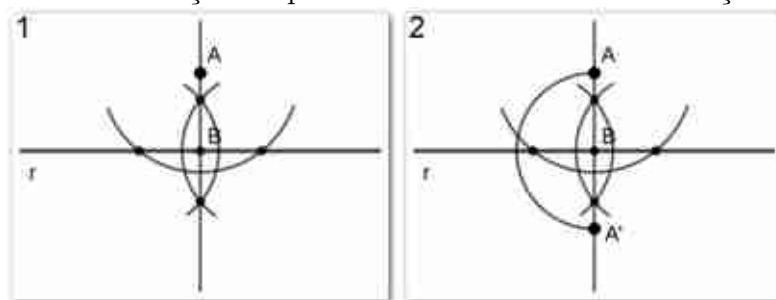
Dois pontos são simétricos em relação a uma reta quando o segmento com extremidades nesses pontos é perpendicular à reta e os mesmos são equidistantes da reta. Seja A um ponto fora da reta r . Vamos determinar o ponto simétrico a A em relação a r .

Figura 1.13: Ponto A e reta r



Fonte: Autor

Figura 1.14: Determinação do ponto simétrico a outro em relação a uma reta.



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace uma reta perpendicular a r que passe por A e marque o ponto B de interseção das duas retas (ver Seção 1.5);

- Com a ponta seca sobre B, trace um arco contendo o ponto A até ele intersectar novamente a perpendicular e indique este ponto de interseção por A'. Este ponto é simétrico a A em relação a r.

JUSTIFICATIVA:

Perceba que, por construção, o segmento $\overline{AA'}$ é perpendicular a r, visto que ele pertence a uma perpendicular a r, e A e A' são equidistantes de r, pois suas distâncias a r são raios de um mesmo arco. Portanto, A' é o ponto simétrico a A em relação à reta r.

1.8 Retas paralelas

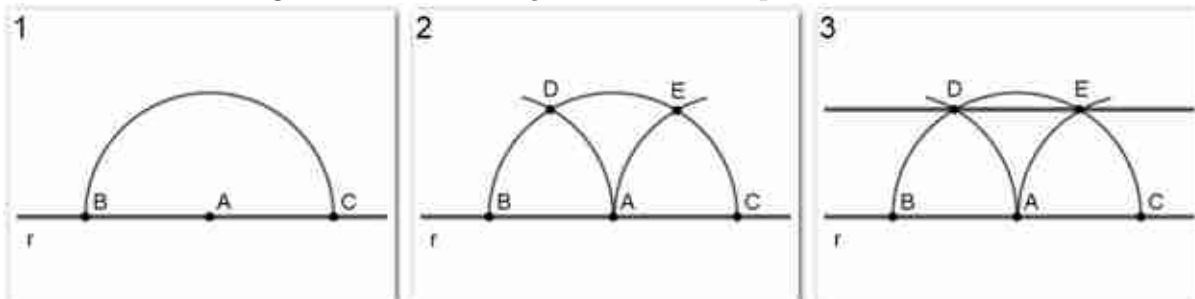
Duas retas são paralelas quando não se intersectam. Vamos construir uma reta paralela a uma reta r conhecida.

Figura 1.15: Reta r



Fonte: Autor

Figura 1.16: Construção de uma reta paralela a outra



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Marque o ponto A sobre r e, com uma abertura qualquer, construa um arco intersectando r nos pontos B e C . Preserve a abertura do compasso.
2. Com a mesma abertura do compasso usada no item anterior, construa dois arcos, um centrado em B e o outro em C , partindo do ponto A e intersectando o primeiro arco construído nos pontos D e E , respectivamente;
3. Trace uma reta pelos pontos D e E . Esta reta é paralela a r .

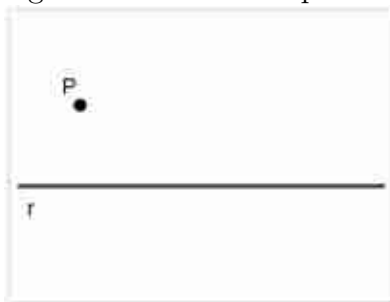
JUSTIFICATIVA:

Os triângulos ABD e ACE são congruentes pelo caso LLL (Lado-lado-lado), visto que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, pois são raios de um mesmo arco, $\overline{DB} \cong \overline{CE}$, pois são raios de arcos construídos com a mesma abertura do compasso, e $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, pois são raios de um mesmo arco. Dessa forma, as alturas relativas aos vértices D e E são congruentes, ou seja, D e E estão a mesma distância da reta r . Como uma reta é paralela a outra se todos os pontos de uma são equidistantes da outra reta e por dois pontos passa uma única reta, a reta que contém os pontos D e E é paralela a r .

1.9 Reta paralela a outra passando por um ponto fora dela

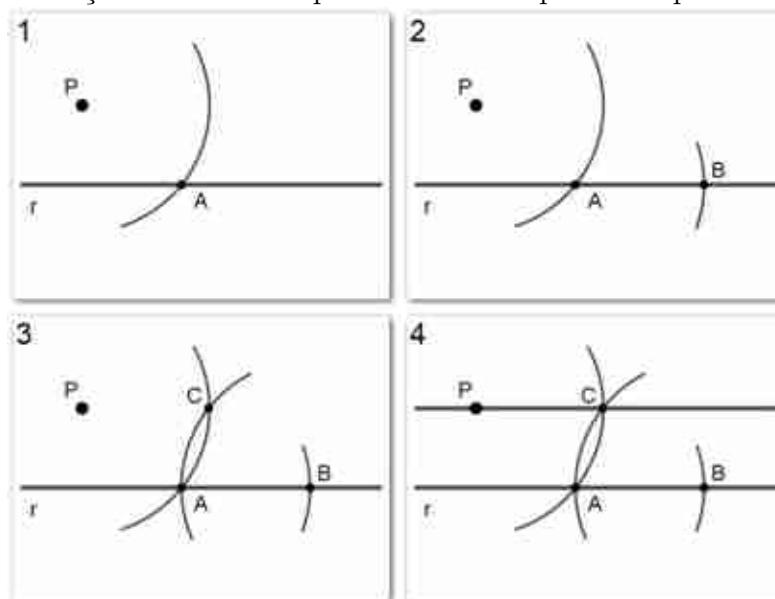
Seja P um ponto fora de uma reta r . Construiremos uma reta paralela a r que passe por P .

Figura 1.17: Reta r e ponto P



Fonte: Autor

Figura 1.18: Construção de uma reta paralela a outra passando por um ponto fora desta



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Com uma abertura qualquer do compasso, coloque a ponta seca sobre P e construa um arco intersecando a reta r no ponto A . Mantenha essa abertura do compasso.
2. Com a mesma abertura do compasso usada no item anterior, coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto A e faça outro arco intersecando r no ponto que chamaremos de B .
3. Com a ponta seca sobre B , faça um arco passando por A e intersecando o primeiro arco construído em outro ponto indicado por C .
4. Construa uma reta passando pelos pontos P e C . Esta é paralela a r e passa por P , como queríamos.

JUSTIFICATIVA:

Perceba que, por construção, o quadrilátero $PABC$ é um losango, visto que os segmentos que o formam são congruentes por serem raios de arcos construídos com a mesma abertura do compasso. Como lados não consecutivos de um losango são paralelos, segue que \overline{PC} é paralelo a \overline{AB} e conseqüentemente, as retas que os contêm também são paralelas.

1.10 Divisão de um segmento em partes congruentes

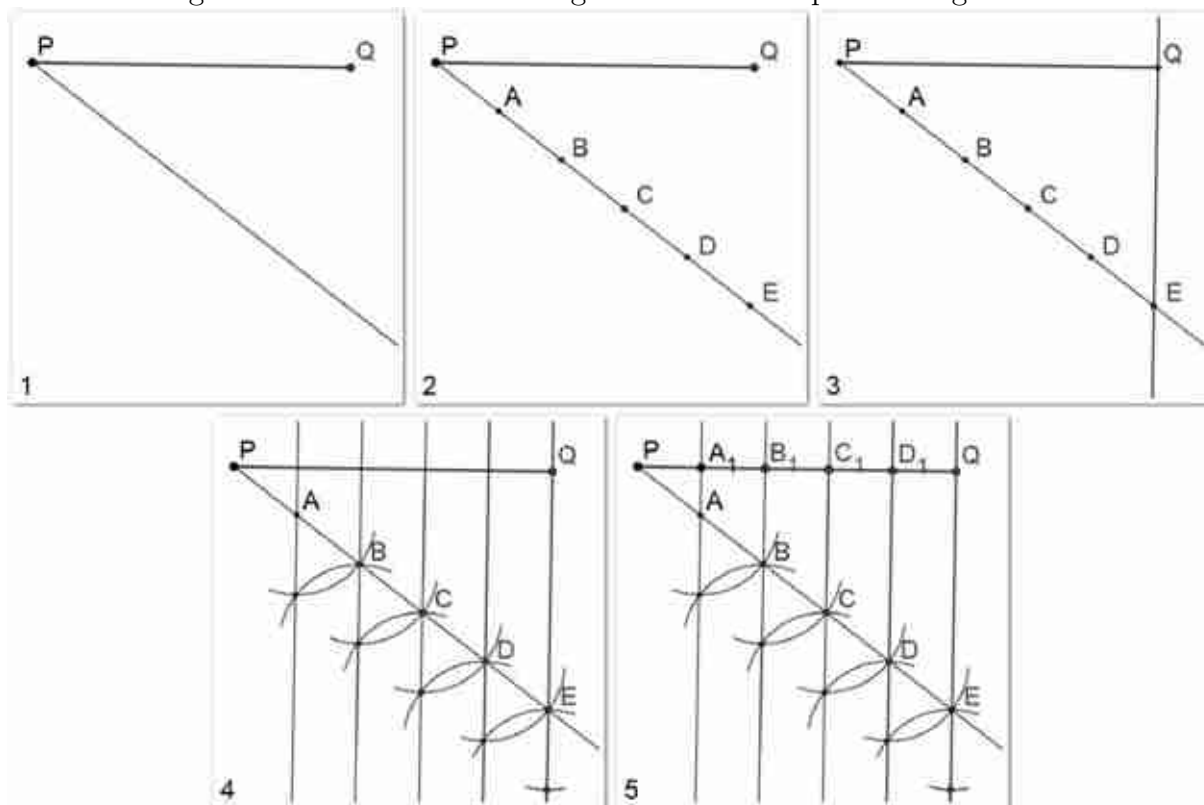
Qualquer segmento \overline{PQ} pode ser dividido em n segmentos congruentes. Vejamos como dividir o segmento \overline{PQ} em cinco segmentos congruentes.

Figura 1.19: Segmento \overline{PQ}



Fonte: Autor

Figura 1.20: Divisão de um segmento em cinco partes congruentes



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma semirreta com origem P;
2. Tome uma abertura qualquer do compasso e marque os pontos A, B, C, D e E sobre a semirreta de modo que os segmentos \overline{PA} , \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DE} sejam todos

congruentes;

3. Construa uma reta passando pelos pontos Q e E;
4. Construa retas paralelas à reta \overleftrightarrow{QE} passando pelos pontos D, C, B e A (ver Seção 1.9). Para facilitar, utilize os pontos já marcados na construção e trace as retas paralelas tendo como referência a reta mais próxima.
5. Marque os pontos A_1 , B_1 , C_1 e D_1 de interseção das paralelas que passam pelos pontos A, B, C e D, respectivamente, com o segmento \overline{PQ} . Os segmentos $\overline{PA_1}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$ e $\overline{D_1Q}$ são congruentes.

JUSTIFICATIVA:

Por construção, temos que $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$, $\overleftrightarrow{CC_1}$, $\overleftrightarrow{DD_1}$ e \overleftrightarrow{EQ} são retas paralelas e os segmentos \overline{PA} , \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DE} são congruentes. Portanto, pelo teorema de Tales aplicado ao triângulo PQR, segue que $\overline{PA_1} \cong \overline{A_1B_1} \cong \overline{B_1C_1} \cong \overline{C_1D_1} \cong \overline{D_1Q}$, visto que este teorema assegura que retas paralelas à base de um triângulo determinam sobre os outros lados segmentos proporcionais e como os segmentos construídos sobre \overline{PE} são congruentes segue que os segmentos determinados sobre \overline{PQ} também são.

Capítulo 2

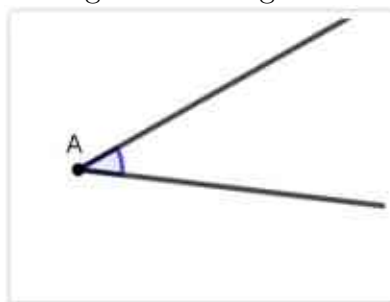
Ângulos

Considere duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . O ângulo de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas. Neste capítulo, estudaremos algumas construções relacionadas com esta figura.

2.1 Ângulos congruentes

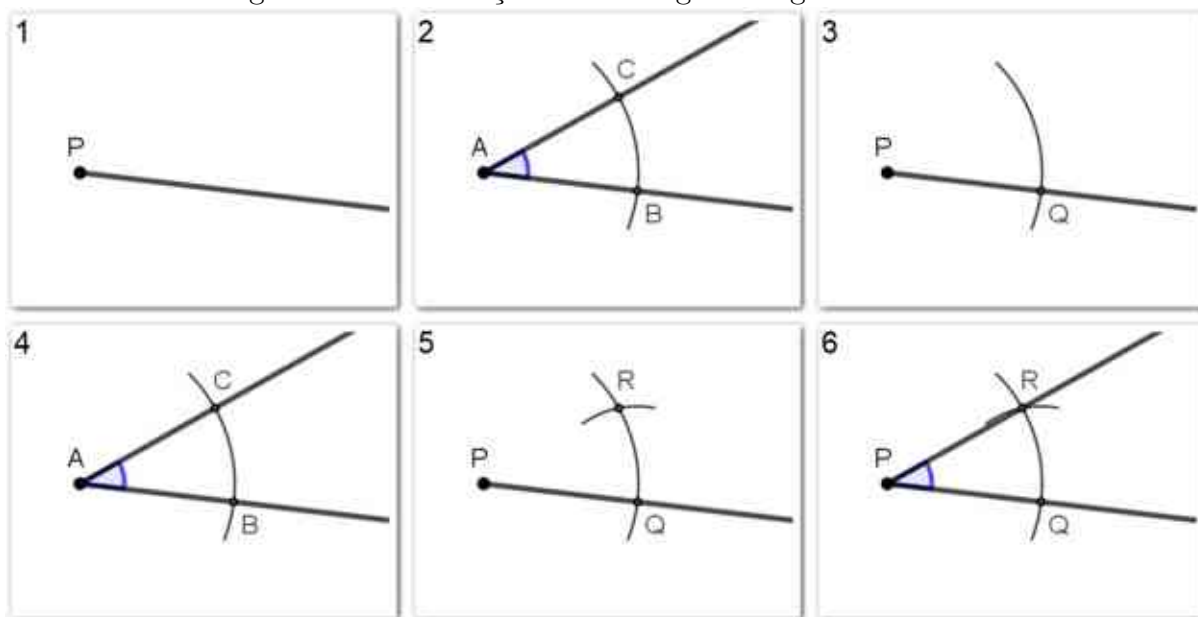
Dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida. Vejamos como construir um ângulo congruente a um ângulo \hat{A} conhecido.

Figura 2.1: Ângulo \hat{A}



Fonte: Autor

Figura 2.2: Construção de um ângulo congruente a outro



Fonte: Autor

DESCRIBÇÃO:

1. Construa uma semirreta com origem P;
2. Com a ponta seca no vértice do ângulo \hat{A} , trace um arco intersecando seus lados nos pontos B e C. Preserve a abertura do compasso;
3. Com a mesma abertura do compasso usada no passo anterior, coloque a ponta seca do compasso no ponto P da semirreta e construa um arco intersecando-a no ponto Q;
4. No ângulo \hat{A} , coloque as pontas do compasso sobre os pontos B e C e preserve a abertura obtida;
5. Com a abertura obtida no passo anterior, coloque a ponta seca no ponto Q da semirreta e construa um arco intersecando o arco já construído no ponto R;
6. Construa a semirreta com origem no ponto P e que passa por R. O ângulo \hat{QPR} é congruente ao ângulo \hat{A} .

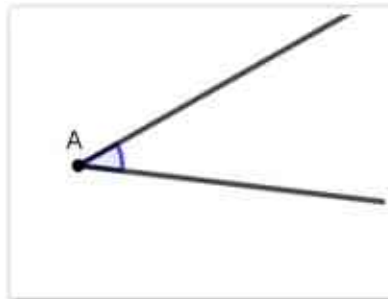
JUSTIFICATIVA:

Pelo caso LLL (Lado-lado-lado), os triângulos ABC e PQR são congruentes, visto que $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ e $\overline{AC} \cong \overline{PR}$, pois são raios de arcos construídos com a mesma abertura, e $\overline{BC} \cong \overline{RQ}$ pois são cordas de arcos congruentes. Sendo assim os ângulos correspondentes dos dois triângulos são congruentes e portanto $\widehat{BAC} \cong \widehat{QPR}$.

2.2 Bissetriz de um ângulo

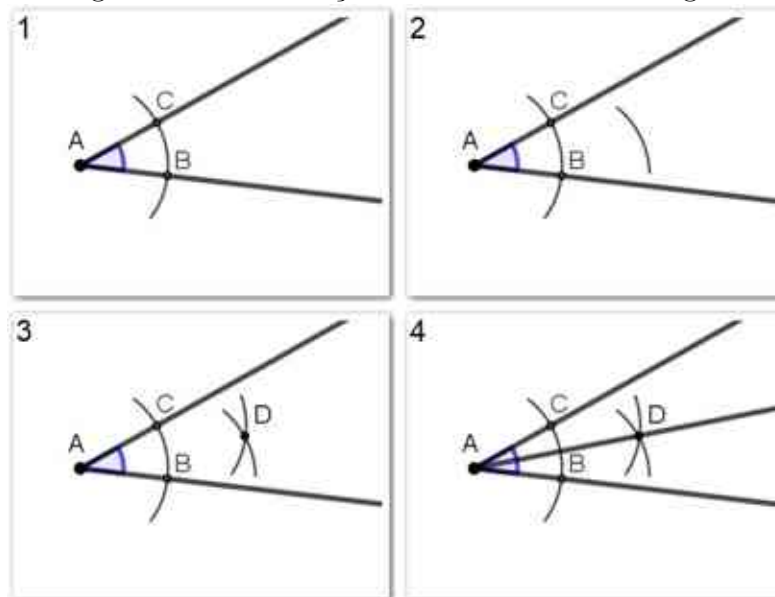
A semirreta que tem origem no vértice de um ângulo e o divide em dois ângulos congruentes é chamada de bissetriz desse ângulo. Traçaremos a bissetriz de um ângulo \widehat{A} .

Figura 2.3: Ângulo \widehat{A}



Fonte: Autor

Figura 2.4: Construção da bissetriz de um ângulo



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Com a ponta seca do compasso sobre o vértice A , construa um arco intersecando os lados do ângulo nos pontos B e C ;
2. Com a abertura do compasso maior que a metade da porção do arco entre os lados do ângulo, coloque a ponta seca sobre B e trace um arco. Preserve a abertura do compasso;
3. Com a abertura usada no passo anterior, coloque a ponta seca do compasso sobre C e construa um arco intersecando o arco construído no passo anterior no ponto D ;
4. Construa a semirreta \overrightarrow{AD} . Essa semirreta é a bissetriz do ângulo.

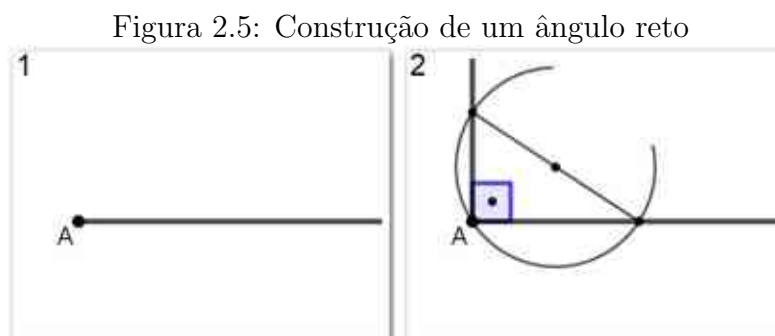
Observação: Essa construção nos permite construir um ângulo cuja medida é a metade do ângulo dado.

JUSTIFICATIVA:

Observe que os triângulos ACD e ABD são congruentes pelo caso LLL (Lado-lado-lado), visto que $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, pois são raios de um mesmo arco, $\overline{CD} \cong \overline{BD}$, pois foram feitos com a mesma abertura, e AD é um lado comum. Portanto \widehat{CAD} e \widehat{BAD} são congruentes por serem ângulos correspondentes de triângulos congruentes.

2.3 Ângulo com 90°

Vejamos como construir um ângulo reto.



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma semirreta de origem no ponto A ;

2. Construa uma outra semirreta com origem no ponto A de tal forma que ela seja perpendicular à semirreta inicial seguindo os passos da construção de uma perpendicular ao extremo de um segmento (ver Seção 1.6). O ângulo indicado na ilustração é reto.

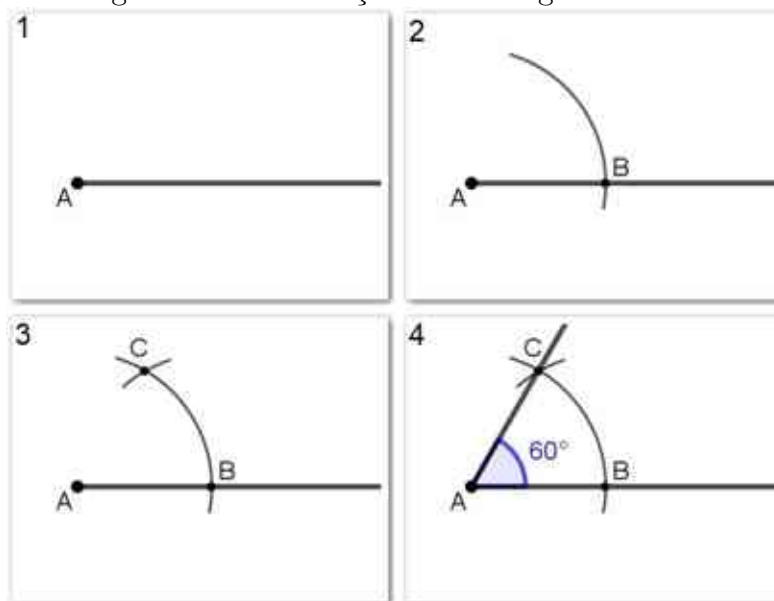
JUSTIFICATIVA:

Esta construção se justifica pelo fato de um triângulo inscrito em uma semicircunferência ser retângulo.

2.4 Ângulo com 60°

Vamos construir um ângulo com 60° .

Figura 2.6: Construção de um ângulo com 60°



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma semirreta com origem no ponto A ;
2. Com a ponta seca no ponto A e uma abertura qualquer do compasso, construa um arco intersectando a semirreta no ponto B . Preserve a abertura do compasso;
3. Com a abertura do compasso usada no passo anterior, coloque a ponta seca sobre B e construa um arco intersectando o arco anterior no ponto C ;

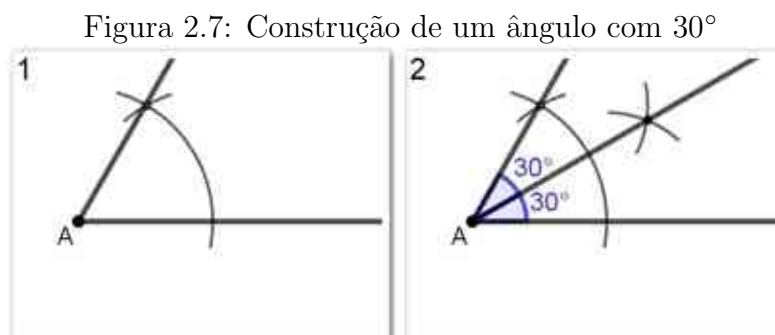
4. Trace uma semirreta com origem no ponto A e que passe por C . O ângulo \widehat{BAC} é de 60° .

JUSTIFICATIVA:

Por construção, \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são congruentes, uma vez que são raios de arcos construídos com a mesma abertura do compasso. Assim o triângulo ABC é equilátero e como um triângulo equilátero é equiângulo, segue que cada um dos seus ângulos mede 60° .

2.5 Ângulos com 30° e 45°

Para construirmos ângulos com 30° e 45° , basta traçarmos as bissetrizes de ângulos com 60° e 90° , respectivamente. Vejamos a construção de um ângulo com 30° .



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um ângulo com 60° (ver Seção anterior);
2. Trace a bissetriz desse ângulo (ver Seção 2.2). Com essa construção obtemos dois ângulos de 30° .

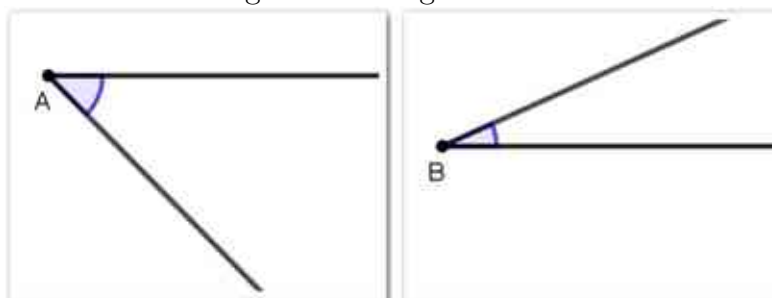
JUSTIFICATIVA:

Como foi traçada a bissetriz do ângulo de 60° , segue que cada ângulo obtido mede 30° .

2.6 Ângulo cuja medida é igual à soma das medidas de dois ângulos dados

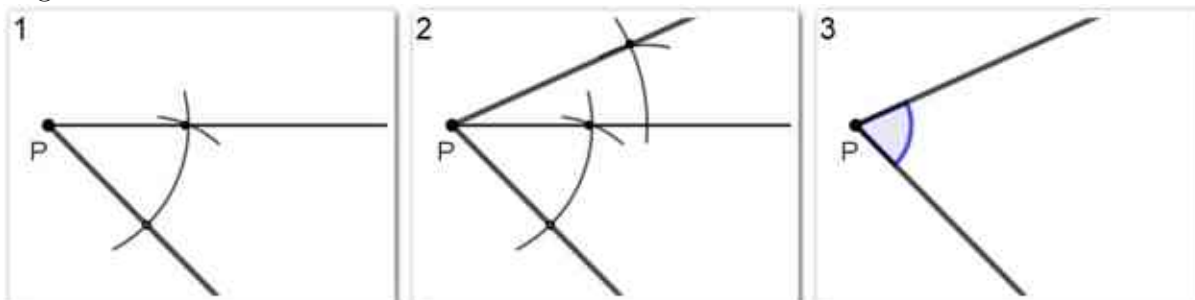
Construiremos um ângulo cuja medida é igual à soma das medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{B} .

Figura 2.8: Ângulos \hat{A} e \hat{B}



Fonte: Autor

Figura 2.9: Construção de um ângulo cuja medida é igual à soma das medidas de dois ângulos



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um ângulo com vértice \hat{P} congruente ao ângulo \hat{A} ; (ver Seção 2.1)
2. Usando um dos lados e o vértice do ângulo anterior, construa um ângulo congruente ao ângulo \hat{B} tal que este ângulo não faça parte da região delimitada pelo ângulo construído anteriormente (ver Seção 2.1);
3. Apague a semirreta comum aos dois ângulos construídos e os demais elementos auxiliares. O ângulo obtido satisfaz o que queremos.

Observação: Essa construção nos permite construir vários ângulos a partir de outros com medidas conhecidas. Por exemplo, podemos construir o de 75° a partir dos ângulos de

45° e 30° , o de 120° a partir do de 90° e 30° .

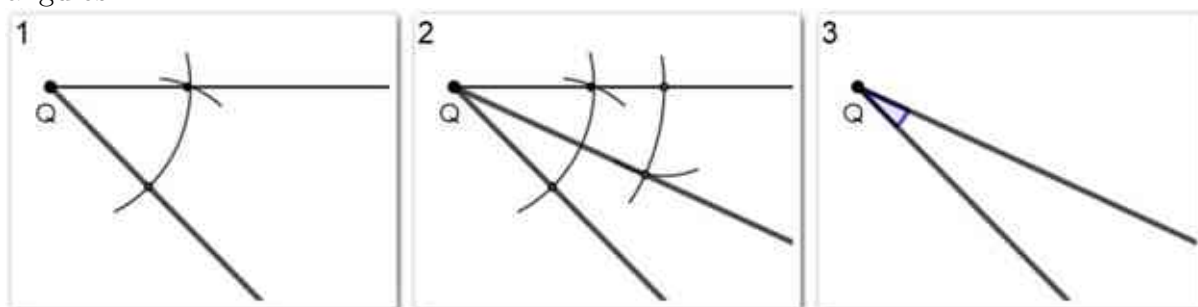
JUSTIFICATIVA:

Por construção, \hat{P} é um ângulo formado por dois ângulos adjacentes congruentes a \hat{A} e \hat{B} . Dessa forma, $\text{med}(\hat{P}) = \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B})$.

2.7 Ângulo cuja medida é igual à diferença entre as medidas de dois ângulos dados

Agora construiremos um ângulo cuja medida é igual à diferença entre as medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{B} apresentados na seção anterior.

Figura 2.10: Construção de um ângulo cuja medida é a diferença entre as medidas de dois ângulos



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um ângulo com vértice \hat{Q} congruente ao ângulo \hat{A} (ver Seção 2.1);
2. Usando um dos lados e o vértice do ângulo anterior, construa um ângulo congruente ao ângulo \hat{B} tal que o outro lado deste ângulo esteja na região delimitada pelo ângulo construído anteriormente (ver Seção 2.1);
3. Apague o lado comum aos dois ângulos construídos e os demais elementos auxiliares. O ângulo obtido satisfaz o que queremos.

Observação: Essa construção também nos permite construir vários ângulos. Por exemplo, podemos construir o de 15° a partir dos ângulos de 45° e 30° , o de 135° a partir do de

180° e 45° .

JUSTIFICATIVA:

Perceba que o ângulo foi obtido removendo de um ângulo congruente a \hat{A} um ângulo congruente a \hat{B} . Dessa forma, $\text{med}(\hat{Q}) = \text{med}(\hat{A}) - \text{med}(\hat{B})$.

Capítulo 3

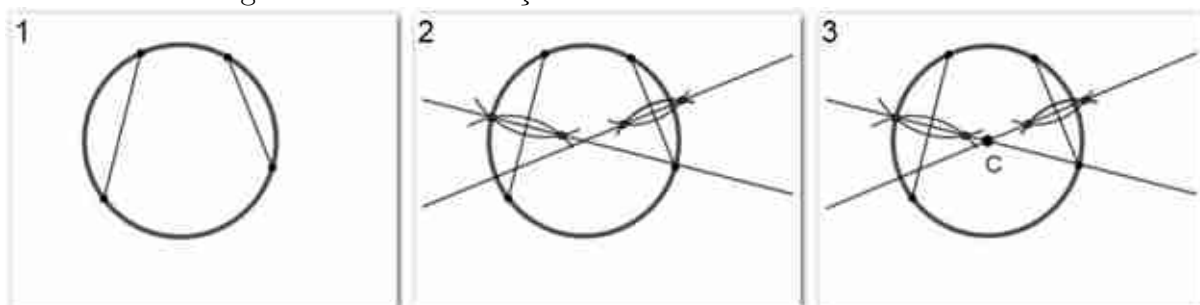
Circunferências

Lembre-se que dados um ponto O do plano e um número real positivo r , a figura geométrica formada por todos os pontos do plano cuja distância dos mesmos até O é igual a r denomina-se circunferência de centro O e raio r . Além disso, a palavra raio é usada para expressar a distância do centro a qualquer um dos pontos da circunferência como também denomina um segmento com extremidades no centro e em um dos pontos da circunferência. Agora estudaremos construções relacionadas a essa figura.

3.1 Determinação do centro de uma circunferência

Vejamos como determinar seu centro C .

Figura 3.1: Determinação do centro de uma circunferência



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace duas cordas da circunferência;
2. Trace as mediatrizes das cordas (ver Seção 1.2);

3. Marque um ponto na interseção das mediatrizes. Ele é o centro da circunferência.

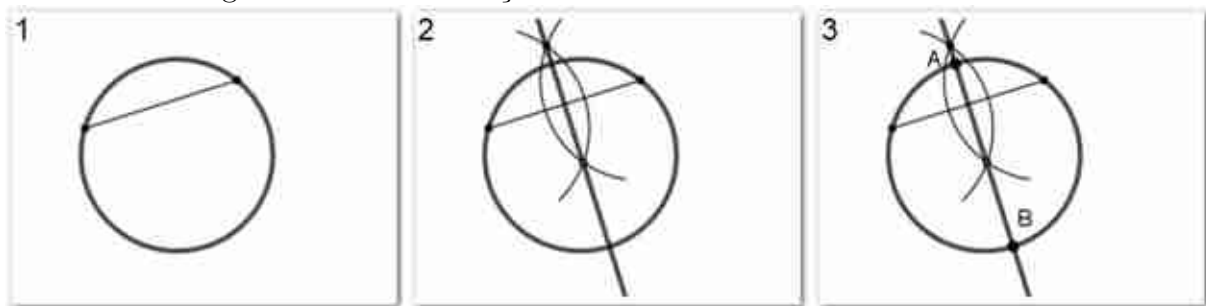
JUSTIFICATIVA:

Como o centro de uma circunferência é equidistante de todos os seus pontos, ele pertence à mediatriz de qualquer corda. Logo, o centro da circunferência pertence às duas mediatrizes, ou seja, é o ponto na interseção das mesmas.

3.2 Determinação do diâmetro de uma circunferência

Um diâmetro da circunferência é qualquer corda que passe pelo seu centro. Vamos determiná-lo.

Figura 3.2: Determinação do diâmetro de uma circunferência



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace uma corda qualquer da circunferência;
2. Construa a mediatriz dessa corda (ver Seção 1.2);
3. Marque os pontos A e B na interseção da mediatriz com a circunferência. O segmento \overline{AB} é um diâmetro da circunferência.

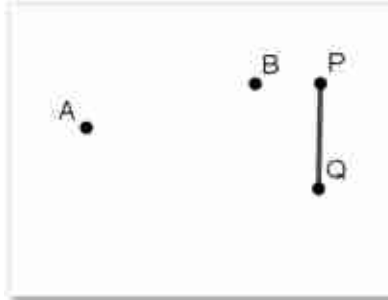
JUSTIFICATIVA:

Como o centro de uma circunferência é equidistante de todos os pontos da mesma, ele pertence à mediatriz de qualquer corda da circunferência, uma vez que a mediatriz contém todos os pontos equidistantes dos extremos da corda, o que inclui o centro. Desta forma, o segmento que pertence à mediatriz de uma corda com extremidades em pontos da circunferência é um diâmetro.

3.3 Construção de uma circunferência conhecendo o raio e dois de seus pontos

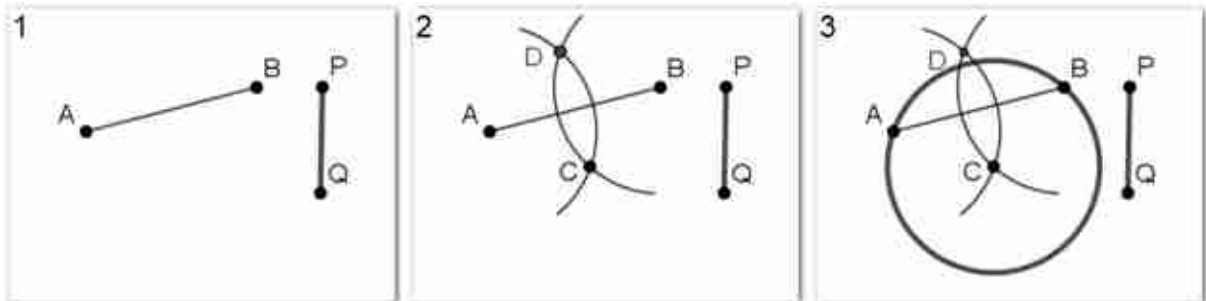
Sejam A e B dois pontos e \overline{PQ} um segmento. Vamos construir uma circunferência que contém os pontos A e B e cujo raio tenha a mesma medida do segmento \overline{PQ} .

Figura 3.3: Segmento \overline{PQ} e pontos A e B



Fonte: Autor

Figura 3.4: Construção de uma circunferência conhecendo-se dois de seus pontos e a medida de seu raio



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa o segmento \overline{AB} ;
2. Com a abertura do compasso igual à medida do segmento \overline{PQ} , trace dois arcos, um com centro no ponto A e o outro no ponto B , intersectando-se nos pontos C e D ;
3. Escolha um dos pontos C e D para ser o centro da circunferência e com a ponta seca do compasso sobre ele e o grafite sobre A ou B , trace a circunferência procurada. Na ilustração, optamos por construir a circunferência com centro em C , mas

poderíamos ter feito com centro em D pois as duas satisfazem o que queremos.

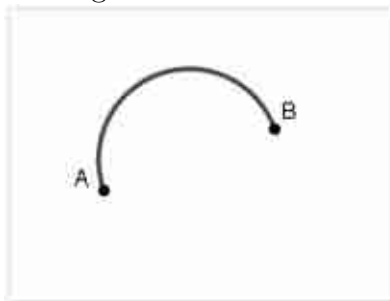
JUSTIFICATIVA:

Por construção, \overline{AC} , \overline{BC} e \overline{PQ} são congruentes, visto que os dois arcos da construção foram obtidos com a abertura do compasso igual a $\text{med}(\overline{PQ})$ e \overline{AC} e \overline{BC} são raios desses arcos. Portanto, a circunferência centrada em C e que contém A e B atende os requisitos esperados.

3.4 Ponto médio de um arco

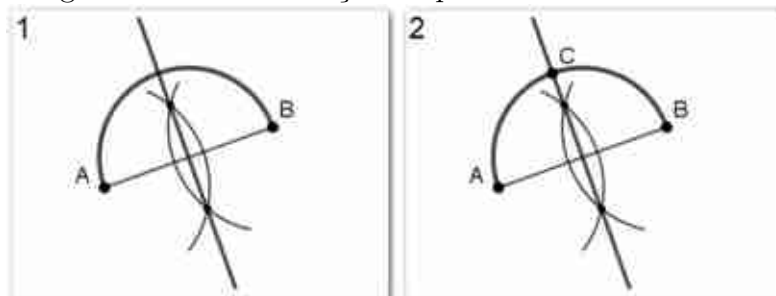
Definimos o ponto médio de um arco \widehat{AB} como sendo o ponto M do mesmo tal que os arcos \widehat{AM} e \widehat{MB} por ele determinado possuam o mesmo comprimento. Isto ocorre se os arcos apresentarem raios e ângulos centrais congruentes ou, por fazerem parte da mesma circunferência, as cordas determinadas por seus extremos forem congruentes. Agora vamos determinar o ponto médio de \widehat{AB} .

Figura 3.5: Arco \widehat{AB}



Fonte: Autor

Figura 3.6: Determinação do ponto médio de um arco



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace a mediatriz do segmento \overline{AB} (ver Seção 1.2). Não é obrigatória a construção do segmento \overline{AB} , a fizemos apenas pra facilitar a compreensão da construção.
2. Marque o ponto C de interseção da mediatriz com o arco. Este é o ponto procurado.

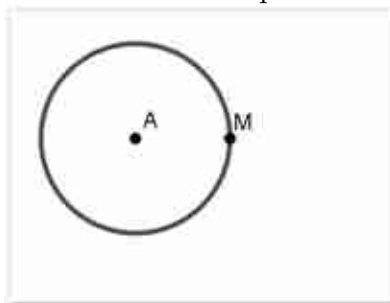
JUSTIFICATIVA:

Como a reta mediatriz de \overleftrightarrow{AB} contém todos os pontos equidistantes dos seus extremos, seu ponto de interseção C com o arco \widehat{AB} determina as cordas \overline{AC} e \overline{BC} congruentes. Como os arcos \widehat{AC} e \widehat{BC} pertencem a mesma circunferência e as cordas determinadas por seus extremos são congruentes, segue que C é o ponto médio de \widehat{AB} .

3.5 Reta tangente a uma circunferência no ponto M

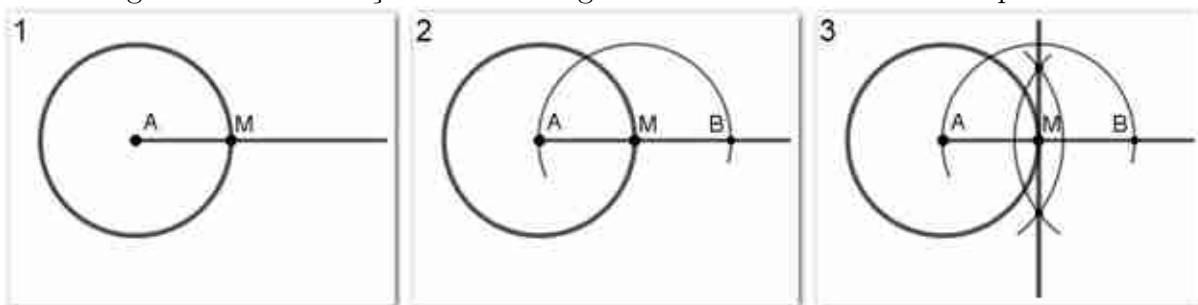
Traçaremos uma reta tangente a uma circunferência de centro A por um de seus pontos M.

Figura 3.7: Circunferência de centro no ponto A que contém o ponto M



Fonte: Autor

Figura 3.8: Construção da reta tangente a uma circunferência no ponto M



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace a semirreta \overrightarrow{AM} ;
2. Com a ponta seca do compasso sobre o ponto M , construa um arco passando por A e intersectando a semirreta \overrightarrow{AM} no ponto B ;
3. Trace a mediatriz de \overline{AB} (ver Seção 1.2). Ela é tangente à circunferência no ponto M .

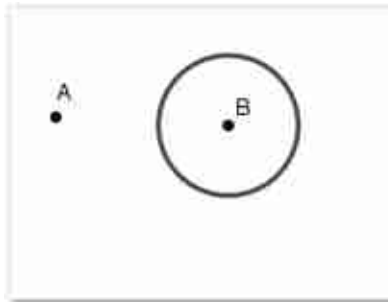
JUSTIFICATIVA:

A mediatriz de \overline{AB} passa pelo ponto M que, por construção, é ponto médio de \overline{AB} , e é perpendicular ao raio \overline{AM} , visto que ela é perpendicular a \overline{AB} . Portanto a reta é tangente à circunferência.

3.6 Tangentes a uma circunferência que passam por um ponto fora dela

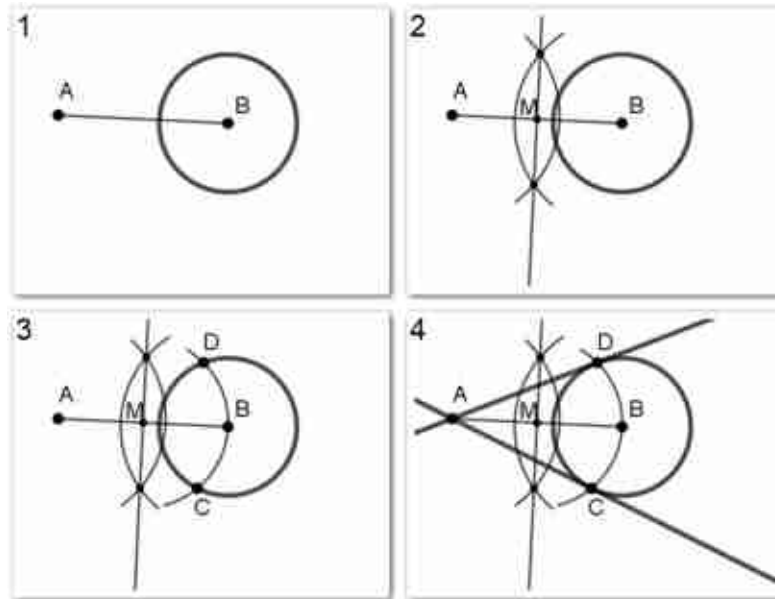
Seja A um ponto fora da circunferência de centro B . Traçaremos as retas que passam por A e são tangentes à circunferência

Figura 3.9: Ponto A e circunferência de centro B



Fonte: Autor

Figura 3.10: Construção de retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto fora dela



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace o segmento \overline{AB} ;
2. Marque o ponto médio M do segmento \overline{AB} (ver seção 1.3);
3. Com a ponta seca em M trace um arco que passe por B , intersecando a circunferência nos pontos C e D ;
4. Trace as retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{AD} . Elas passam por A e são tangentes à circunferência.

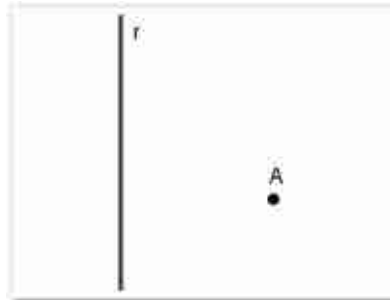
JUSTIFICATIVA:

Olhe a última parte da ilustração da construção e imagine que os triângulos ACB e ADB e a circunferência de centro em M que contém os pontos A e B estejam construídos. Perceba que os triângulos ACD e ADB estão inscritos em semicircunferências, o que implica que eles são triângulos retângulos, onde \hat{ACB} e \hat{ADB} são retos. Portanto $\overline{BC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ e $\overline{BD} \perp \overleftrightarrow{AD}$.

3.7 Circunferência tangente a uma reta e que passa por um ponto fora dela

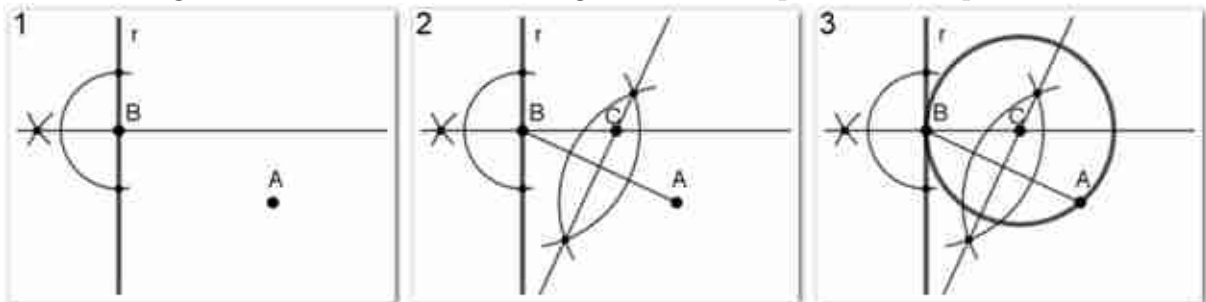
Sejam A um ponto e r uma reta, vamos construir uma circunferência que passa por A e é tangente a r .

Figura 3.11: Reta r e ponto A



Fonte: Autor

Figura 3.12: Circunferência tangente à reta r que contém o ponto A



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace uma reta perpendicular a r , intersectando-a no ponto B (ver observação da Seção 1.5);
2. Trace a mediatriz do segmento \overline{AB} , intersectando a perpendicular a r no ponto C ;
3. Construa a circunferência com centro em C e passando pelos pontos A e B . Esta é a circunferência procurada.

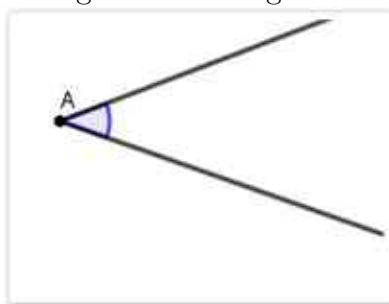
JUSTIFICATIVA:

Por construção, o ponto C é centro da circunferência que contém os pontos A e B , pois C é equidistante dos mesmos e $\overline{BC} \perp r$, visto que a reta \overleftrightarrow{BC} , que contém \overline{BC} , é perpendicular à reta r . Portanto, a circunferência contém A e a reta r é tangente à mesma no ponto B .

3.8 Circunferência tangente aos lados de um ângulo

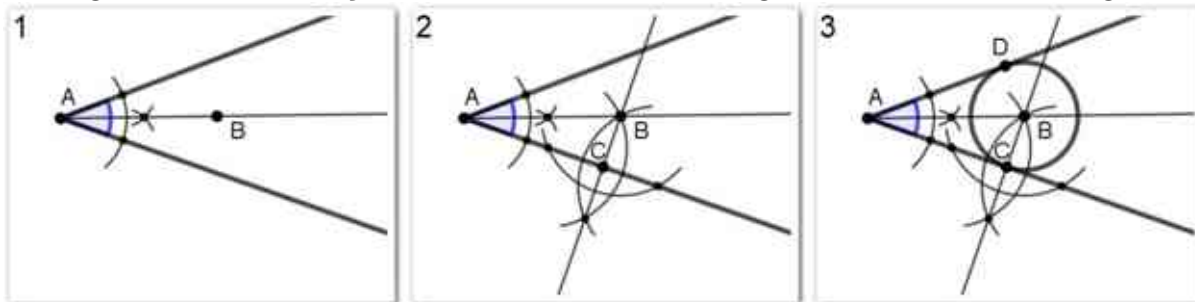
Vamos traçar a circunferência tangente aos lados de um ângulo \hat{A} .

Figura 3.13: Ângulo \hat{A}



Fonte: Autor

Figura 3.14: Construção de uma circunferência tangente aos lados de um ângulo



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace a bissetriz do ângulo \hat{A} e marque o ponto B sobre a mesma (ver Seção 2.2);
2. Trace uma reta que passe por B e seja perpendicular a um dos lados do ângulo \hat{A} , intersectando-o no ponto C . (ver Seção 1.5);
3. Com a ponta seca do compasso em B e a grafite em C , construa uma circunferência, intersectando o outro lado no ponto D . Esta circunferência é tangente aos lados do

ângulo nos pontos C e D.

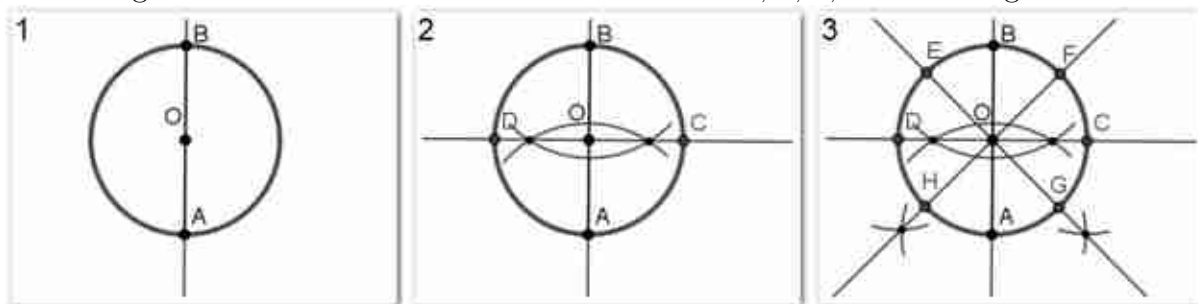
JUSTIFICATIVA:

Perceba que, por construção, a semirreta \overrightarrow{AC} é tangente à circunferência pois o raio \overline{BC} é perpendicular a \overrightarrow{AC} . Por outro lado, como os pontos pertencentes a bissetriz de um ângulo são equidistantes dos lados do mesmo, segue que existe um ponto na outra semirreta cuja distância dele ao ponto B é igual a $\text{med}(\overline{BC})$. Tal ponto é D, pois $\overline{BC} \cong \overline{BD}$, visto que são raios da mesma circunferência. Portanto, como \overrightarrow{AD} e a circunferência têm um único ponto em comum, ou seja, o ponto D, segue que \overrightarrow{AD} é tangente à circunferência.

3.9 Divisão de uma circunferência em 2, 4, 8,... arcos congruentes

Vejamos como dividir uma circunferência de centro O em 2, 4, 8,... arcos congruentes.

Figura 3.15: Dividindo uma circunferência em 2, 4, 8,... arcos congruentes



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Trace uma reta passando pelo centro da circunferência intersectando-a nos pontos A e B. O segmento \overline{AB} é um diâmetro e seus extremos dividem a circunferência em dois arcos congruentes.
2. Trace a mediatriz do diâmetro \overline{AB} intersectando a circunferência nos pontos C e D. Os pontos A, C, B e D, nessa ordem, dividem a circunferência em quatro arcos congruentes (ver Seção 1.2);

3. Trace as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} (ver Seção 2.2), intersectando a circunferência nos pontos G, F, E e H. Os pontos A, G, C, F, B, E, D e H, nessa ordem, dividem a circunferência em oito arcos congruentes.

Observação: Seguindo essa ideia de traçar bissetrizes dos ângulos formados por retas existentes, podemos dividir a circunferência em 16, 32,... arcos congruentes.

JUSTIFICATIVA:

Na Figura 1, os dois arcos com extremidades nos pontos A e B pertencem à mesma circunferência, logo possuem o mesmo raio e ângulos centrais congruentes, que no caso medem 180° . Portanto são arcos congruentes.

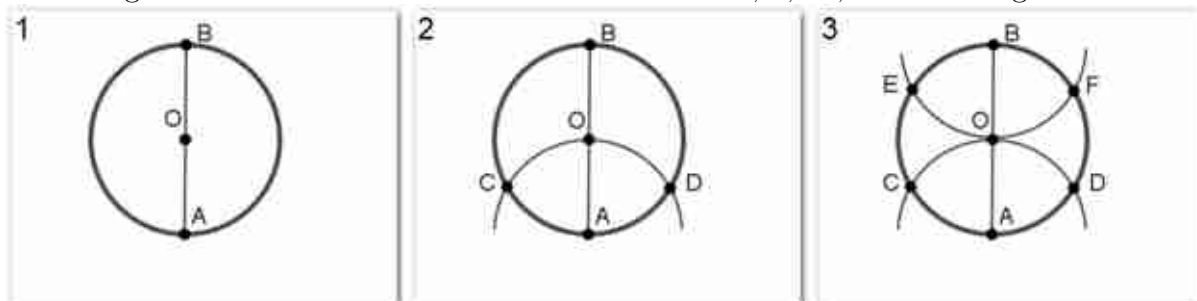
Na Figura 2, os quatro arcos \widehat{AC} , \widehat{CB} , \widehat{BD} e \widehat{DA} pertencem à mesma circunferência e possuem ângulos centrais medindo 90° , visto que por construção $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Portanto estes arcos são congruentes.

Na Figura 3, as bissetrizes traçadas dividiram cada um dos quatro ângulos congruentes em dois ângulos congruentes, obtendo assim oito ângulos congruentes que determinam oito arcos congruentes sobre a circunferência.

3.10 Divisão de uma circunferência em 3, 6, 12,... arcos congruentes

Vejamos como dividir uma circunferência de centro O em 3, 6, 12,... arcos congruentes.

Figura 3.16: Dividindo uma circunferência em 3, 6, 12,... arcos congruentes



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} com extremidades na circunferência e passando pelo centro da mesma. O segmento \overline{AB} é um diâmetro.
2. Com a abertura do compasso igual à medida do segmento \overline{AO} ou \overline{BO} , coloque a ponta seca em A , ou B , e construa um arco intersectando a circunferência nos pontos C e D . Os pontos B , C e D dividem a circunferência em três arcos congruentes.
3. Repita a etapa anterior usando a outra extremidade do segmento como centro do arco. Sejam E e F os pontos de interseção desse arco construído com a circunferência. Os pontos A , D , F , B , E e C dividem a circunferência em seis partes congruentes.

Observação: Para dividir a circunferência em 12, 24,... arcos congruentes, basta ir traçando as bissetrizes dos ângulos centrais dos arcos, de modo semelhante à construção anterior.

JUSTIFICATIVA:

No passo 2 da ilustração, imagine que estejam construídos os segmentos \overline{OC} , \overline{OD} , \overline{AC} e \overline{AD} . Perceba que, por construção, os triângulos OCA e OAD são equiláteros, pois seus lados são raios de arcos e da circunferência que foram construídos com a mesma abertura do compasso. Daí segue que \widehat{AOB} e \widehat{AOD} são ângulos com 60° e \widehat{BOC} e \widehat{BOD} , que são suplementos de \widehat{AOB} e \widehat{AOD} , medem 120° assim como \widehat{COD} , cuja medida é a soma das medidas de \widehat{AOB} e \widehat{AOD} . Como \widehat{BC} , \widehat{CD} e \widehat{DB} são arcos de uma mesma circunferência, o que implica que possuem o mesmo raio, e possuem ângulos centrais congruentes, no caso \widehat{BOC} , \widehat{COD} e \widehat{DOB} , segue que eles são congruentes e portanto os pontos B , C e D dividem a circunferência em três arcos congruentes.

No passo 3 da ilustração, imagine traçados os segmentos \overline{OC} , \overline{OD} , \overline{OE} , \overline{OF} , \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{BF} . Note que os triângulos OAC , OAD , OBE e OBF são equiláteros, pois seus lados são raios de arcos e da circunferência que foram construídos com a mesma abertura do compasso. com isso, os ângulos \widehat{COA} , \widehat{AOD} , \widehat{EOB} e \widehat{BOF} são ângulos com 60° . Como $\text{med}(\widehat{COA}) + \text{med}(\widehat{EOC}) + \text{med}(\widehat{BOC}) = \text{med}(\widehat{AOB}) = 180^\circ$ e $\text{med}(\widehat{AOD}) + \text{med}(\widehat{DOF}) + \text{med}(\widehat{FOB}) = \text{med}(\widehat{AOB}) = 180^\circ$ segue que \widehat{EOC} e \widehat{DOF} são ângulos com 60° . Logo os arcos \widehat{AD} , \widehat{DF} , \widehat{FB} , \widehat{BE} , \widehat{EC} e \widehat{CA} são congruentes, pois possuem raios e ângulos centrais congruentes, e, portanto, os pontos A , D , F , B , E , C , nessa ordem, dividem a circunferência em seis arcos congruentes.

Capítulo 4

Polígonos

Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontos do plano. O polígono com vértices $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ é a figura plana constituída dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$, chamados de lados, que satisfazem as seguintes condições:

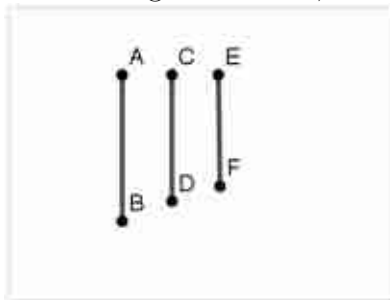
1. Os segmentos se interseçam apenas nas suas extremidades;
2. Cada vértice é extremidade de dois lados;
3. Dois segmentos consecutivos não são colineares.

Neste capítulo, vamos construir polígonos.

4.1 Construção de um triângulo sabendo o comprimento dos seus lados

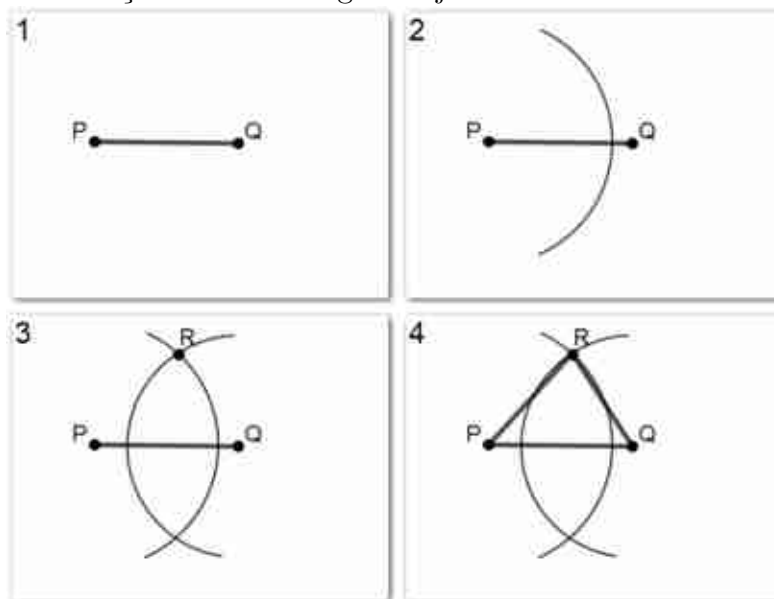
Vamos construir um triângulo cujas medidas dos lados sejam iguais às medidas dos segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}$ e \overline{EF} .

Figura 4.1: Segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}$ e \overline{EF}



Fonte: Autor

Figura 4.2: Construção de um triângulo cujas medidas dos lados são conhecidos.



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{PQ} congruente a um dos segmentos dados. No caso, escolhamos o segmento \overline{AB} (ver Seção 1.1);
2. Com a abertura do compasso igual à medida de um dos segmentos ainda não utilizados, no caso, usamos \overline{CD} , coloque a ponta seca sobre P e construa um arco;
3. Agora, com a abertura do compasso igual à medida do terceiro segmento, no caso \overline{EF} , coloque a ponta seca sobre Q e construa um outro arco intersecando o já construído. Seja R um desses pontos de interseção dos arcos;
4. Construa os segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} e \overline{PR} . Eles formam o triângulo que queremos.

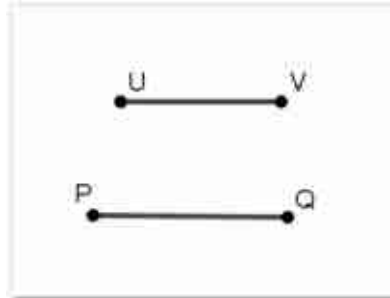
JUSTIFICATIVA:

Por construção, $\overline{PQ} \cong \overline{AB}$, $\overline{PR} \cong \overline{CD}$ e $\overline{QR} \cong \overline{EF}$, pois \overline{PQ} , \overline{PR} e \overline{QR} são raios de arcos construídos com aberturas iguais às medidas de \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} , respectivamente. Portanto, o triângulo PQR tem as medidas esperadas.

4.2 Construção de um triângulo sabendo-se as medidas da base e da altura

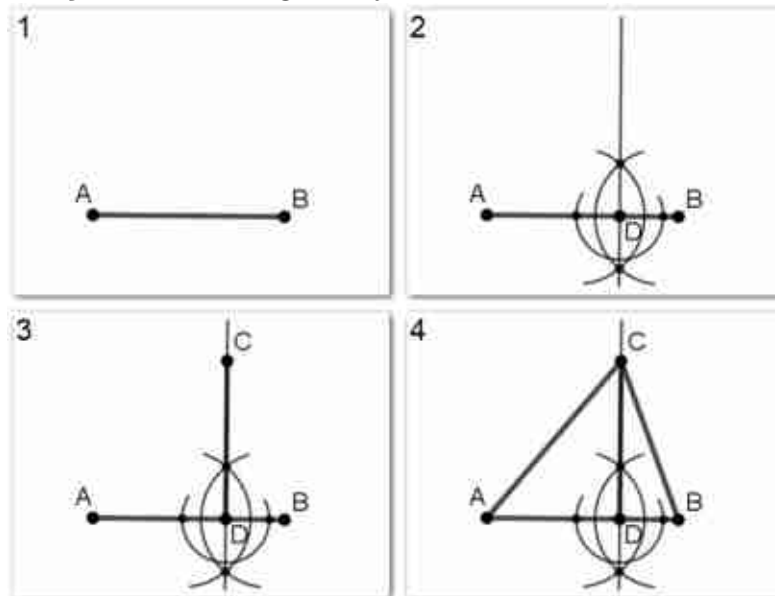
Vamos construir um triângulo cuja base tenha a mesma medida de \overline{PQ} e a altura, a mesma medida de \overline{UV} .

Figura 4.3: Segmentos \overline{PQ} e \overline{UV}



Fonte: Autor

Figura 4.4: Construção de um triângulo cujas medidas da base e da altura são conhecidas



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa o segmento \overline{AB} congruente a \overline{PQ} (ver Seção 1.1);
2. Marque um ponto D qualquer sobre \overline{AB} e construa uma reta perpendicular a este segmento passando por D; (ver observação da Seção 1.5)

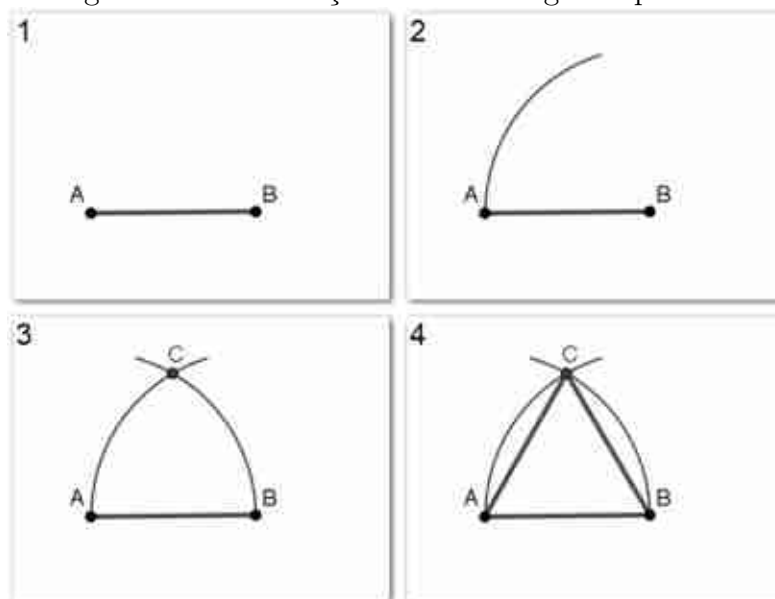
3. Construa o segmento \overline{DC} congruente a \overline{UV} sobre a perpendicular traçada anteriormente (ver Seção 1.1);
4. Construa os segmentos \overline{AC} e \overline{CB} . O triângulo ABC satisfaz as condições desejadas.

JUSTIFICATIVA:

Por construção, $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{CD} \cong \overline{UV}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, pois \overline{BC} está contido numa reta perpendicular a \overline{AB} , e D é um ponto comum aos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} . Daí, como o segmento \overline{CD} tem extremidade no vértice C do triângulo ABC , é perpendicular e intersecta no seu outro extremo o lado oposto a este vértice, segue que \overline{CD} é a altura do triângulo ABC relativa ao lado \overline{AB} .

4.3 Construção de um triângulo equilátero

Figura 4.5: Construção de um triângulo equilátero



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} qualquer.
2. Construa um arco centrado em B, partindo do ponto A;

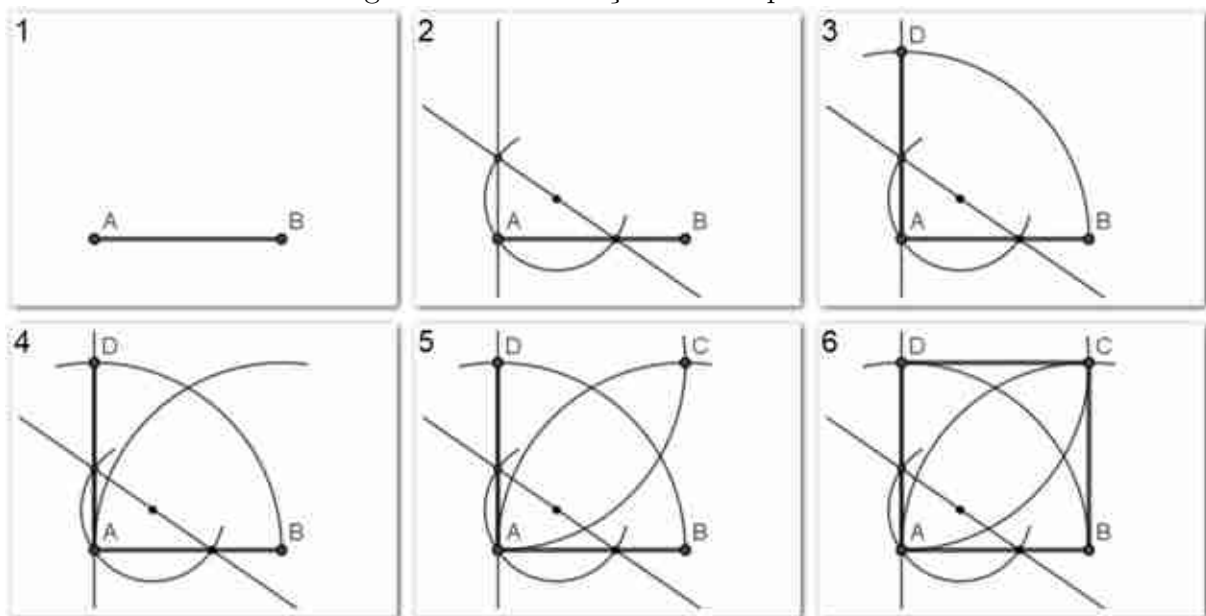
3. Construa um arco centrado em A , partindo de B e intersectando o anterior no ponto C ;
4. Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , que são os lados do triângulo equilátero.

JUSTIFICATIVA:

Perceba que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$, pois \overline{BC} e \overline{AC} são raios de arcos construídos com a abertura do compasso igual à medida de \overline{AB} . Portanto, o triângulo ABC é equilátero.

4.4 Construção de um quadrado

Figura 4.6: Construção de um quadrado



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} . Este segmento será um dos lados do quadrado;
2. Construa uma reta perpendicular ao segmento passando pelo ponto A (ver seção 1.6);
3. Com a ponta seca sobre A e o grafite sobre B , trace um arco intersectando a perpendicular no ponto D ;

4. Com a ponta seca em B e a grafite em A, construa outro arco;
5. Com a ponta seca em D e a grafite em A, construa um arco intersecando o anterior no ponto C;
6. Construa os segmentos \overline{BC} e \overline{CD} . O polígono ABCD é um quadrado.

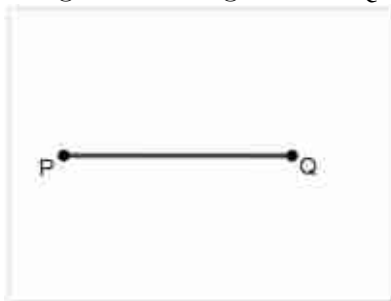
JUSTIFICATIVA:

Por construção $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$, pois \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} são raios de arcos construídos com a abertura do compasso igual à medida de \overline{AB} , e o ângulo \widehat{BAD} é reto, pois $\overrightarrow{AD} \perp \overline{AB}$. Imaginemos que estejam traçadas as diagonais \overline{BD} e \overline{AC} , temos então $ABD \cong CBD$ e $ABC \cong ADC$, pelo caso LLL. Da primeira congruência entre os triângulos, segue que o ângulo \widehat{BCD} é reto pois ele é congruente a \widehat{BAD} . Da segunda congruência, segue que $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC}$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360° e $\text{med}(\widehat{BCD}) = \text{med}(\widehat{BAD}) = 90^\circ$, segue que $\text{med}(\widehat{ABC}) + \text{med}(\widehat{ADC}) = 180^\circ$ e, conseqüentemente, \widehat{ABC} e \widehat{ADC} são ângulos retos. Portanto, o quadrilátero ABCD é um quadrado.

4.5 Construção de um quadrado sabendo-se o comprimento da diagonal

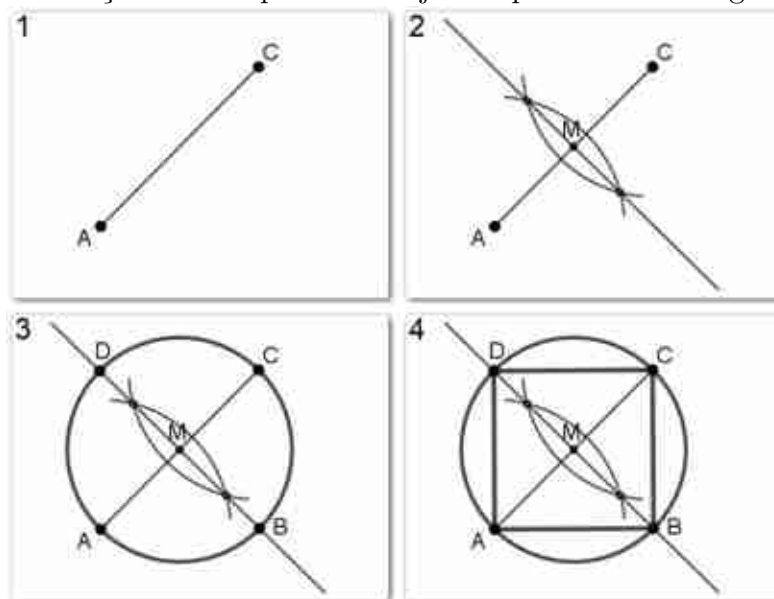
Vejamos como construir um quadrado cuja diagonal seja congruente ao segmento \overline{PQ} .

Figura 4.7: Segmento \overline{PQ}



Fonte: Autor

Figura 4.8: Construção de um quadrado cujo comprimento da diagonal é conhecido



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa a diagonal \overline{AC} ;
2. Construa a mediatriz e o ponto médio M do segmento \overline{AC} (ver Seção 1.3);
3. Construa uma circunferência com centro em M e que passa por A intersectando a mediatriz de \overline{AC} nos pontos B e D ;
4. Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} . O polígono $ABCD$ é o quadrado procurado.

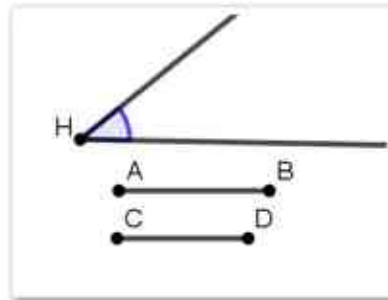
JUSTIFICATIVA:

Por construção, as diagonais do quadrilátero possuem a mesma medida do segmento \overline{AB} e os quatro triângulos com um dos vértice em M que formam o quadrilátero são congruentes pelo caso LAL, visto que os lados com um dos extremos em M são congruentes, por serem raios do mesmo círculo, e os ângulos com vértices em M são retos, pelo fato da reta \overleftrightarrow{RS} ser perpendicular a \overline{AB} . Logo, todos os lados do quadrilátero são congruentes. Por outro lado, os triângulos PRQ , RQS , QSP e SPR são triângulos retângulos, pois estão inscritos em uma semicircunferência. Logo, os ângulos $\hat{P}RQ$, $\hat{R}QS$, $\hat{Q}SP$ e $\hat{S}PR$ são retos. Portanto, por tudo o que foi exposto, segue que $PRQS$ é um quadrado.

4.6 Construção de um paralelogramo sabendo-se as medidas de dois lados e do ângulo entre eles

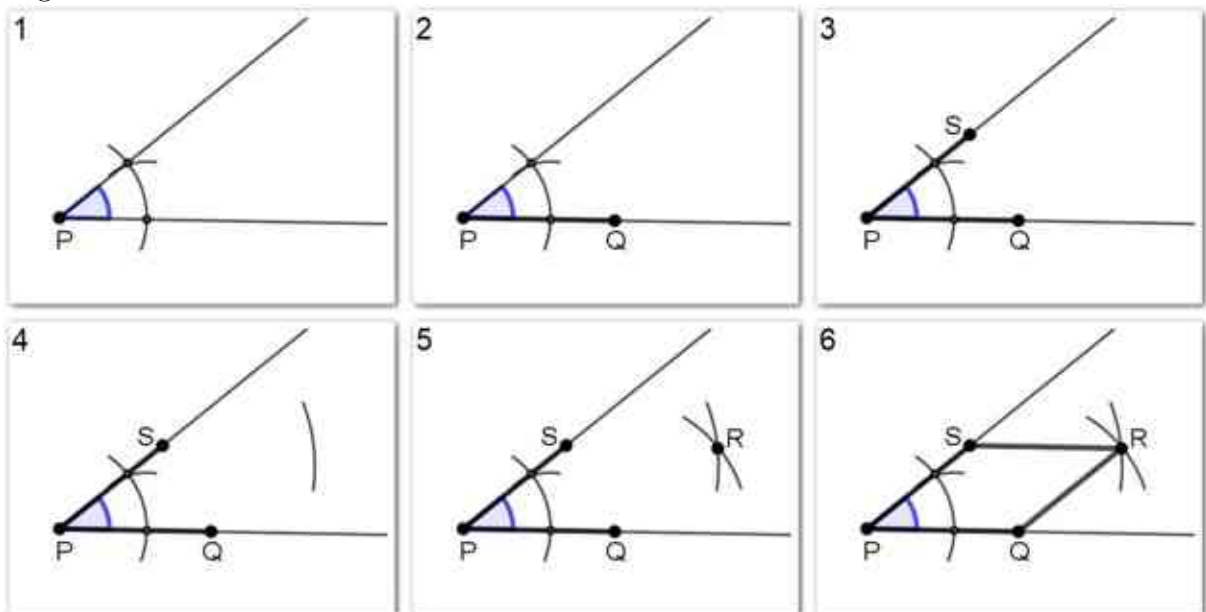
Dados os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} e o ângulo \hat{H} , vamos construir um paralelogramo cujos lados e o ângulo entre eles sejam congruentes a \overline{AB} , \overline{CD} e \hat{H} , respectivamente.

Figura 4.9: Ângulo \hat{H} e segmentos \overline{AB} e \overline{CD}



Fonte: Autor

Figura 4.10: Construção de um paralelogramo sabendo-se as medidas de dois lados e do ângulo entre eles



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um ângulo \hat{P} , congruente ao ângulo \hat{H} (ver Seção 2.1);

2. Construa o segmento \overline{PQ} , congruente a \overline{AB} , sobre um dos lados do ângulo \hat{P} (ver Seção 1.1);
3. Sobre o outro lado do ângulo, construa o segmento \overline{PS} , congruente a \overline{CD} (ver Seção 1.1);
4. Com a abertura do compasso igual à medida de \overline{AB} , coloque a ponta seca em S e construa um arco na região interna ao ângulo;
5. Com a abertura do compasso igual a medida de \overline{CD} , coloque a ponta seca em P e construa um arco intersecando o anterior no ponto R ;
6. Construa os segmentos \overline{QR} e \overline{RS} . O polígono $PQRS$ é o paralelogramo procurado.

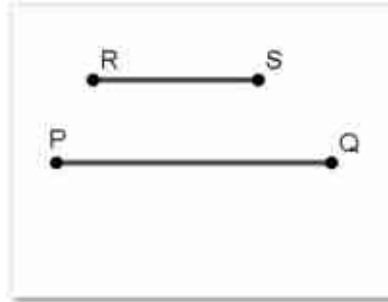
JUSTIFICATIVA:

Por construção, o polígono tem as medidas desejadas. Agora vamos justificar porque ele é um paralelogramo. Perceba que $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$ e $\overline{PS} \cong \overline{QR}$, pois cada par de segmentos foi obtido com a mesma abertura do compasso. Imagine as diagonais \overline{QS} e \overline{PR} construídas. Os triângulos QPS e SRQ são congruentes, pelo caso LLL, e os triângulos PQR e RSP também são congruentes pelo mesmo caso. Dessas congruências segue que $\hat{QPS} \cong \hat{SRQ}$ e $\hat{PQR} \cong \hat{RSP}$. Como todo quadrilátero convexo cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo, conclui-se que o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo.

4.7 Construção de um losango sabendo-se as medidas dos lados e de uma diagonal

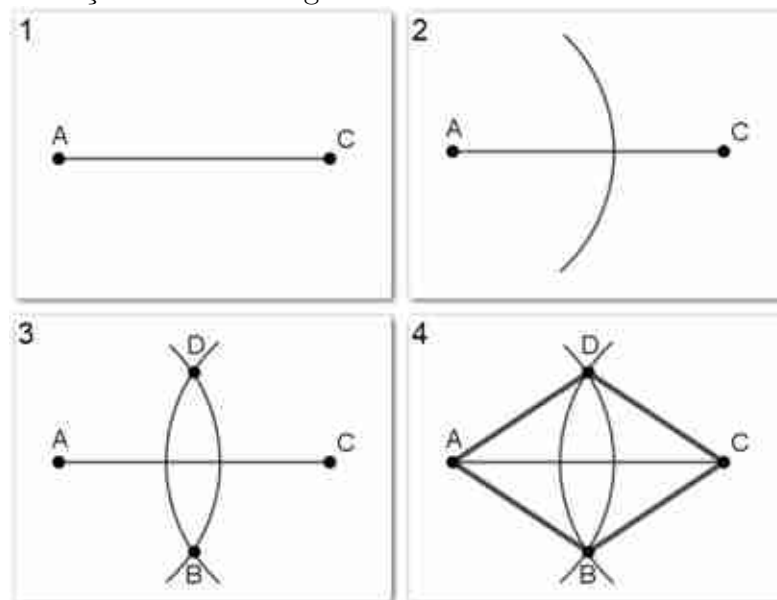
Sejam \overline{PQ} e \overline{RS} dois segmentos. Vamos construir um losango cujas diagonais sejam congruentes a \overline{PQ} e \overline{RS} .

Figura 4.11: Segmentos \overline{PQ} e \overline{RS}



Fonte: Autor

Figura 4.12: Construção de um losango sabendo as medidas dos lados e de uma diagonal



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AC} congruente a um dos segmentos dados, digamos \overline{PQ} (ver seção 1.1);
2. Com a abertura do compasso igual à medida do outro segmento, no caso \overline{RS} , construa um arco centrado em A ;
3. Com a abertura do item anterior, construa um arco centrado em C ;
4. Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} . O polígono $ABCD$ é o losango que atende às condições dadas.

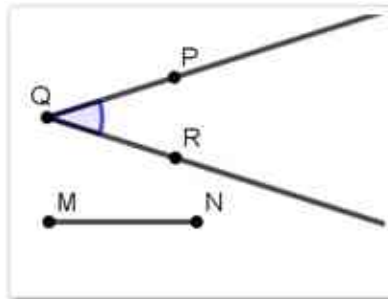
JUSTIFICATIVA:

Por construção, todos os lados do polígono são congruentes a \overline{PQ} , visto que eles são raios de arcos construídos com a abertura igual à medida deste segmento, e a diagonal \overline{AC} tem a mesma medida de \overline{PQ} . Portanto, como os quatro lados do polígono $ABCD$ são congruentes e suas medidas satisfazem as condições da construção, segue que ele é o losango procurado.

4.8 Construção de um losango sabendo-se as medidas dos lados e de um ângulo

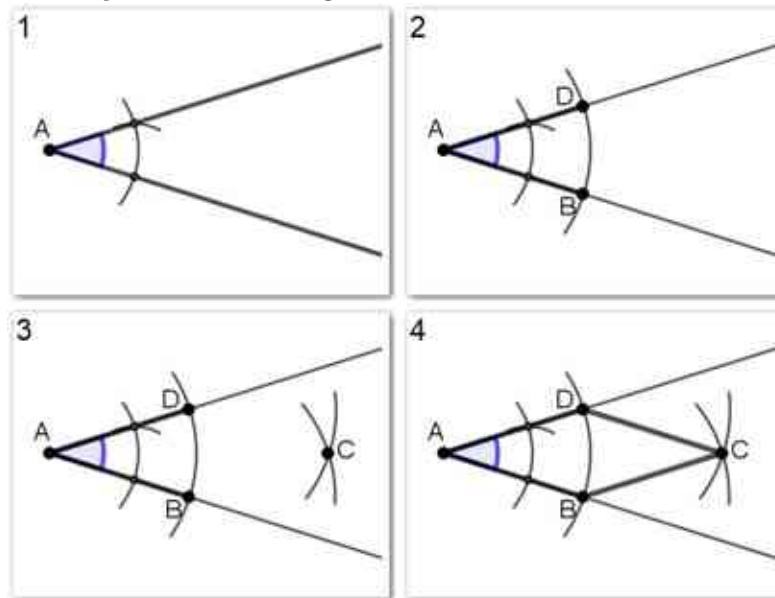
Conhecidos o segmento \overline{MN} e o ângulo \widehat{PQR} , vamos construir um losango cujos lados são congruentes a \overline{MN} e dois de seus ângulos são congruentes ao ângulo \widehat{PQR} .

Figura 4.13: Ângulo \widehat{PQR} e segmento \overline{MN}



Fonte: Autor

Figura 4.14: Construção de um losango sabendo as medidas dos lados e de um ângulo



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

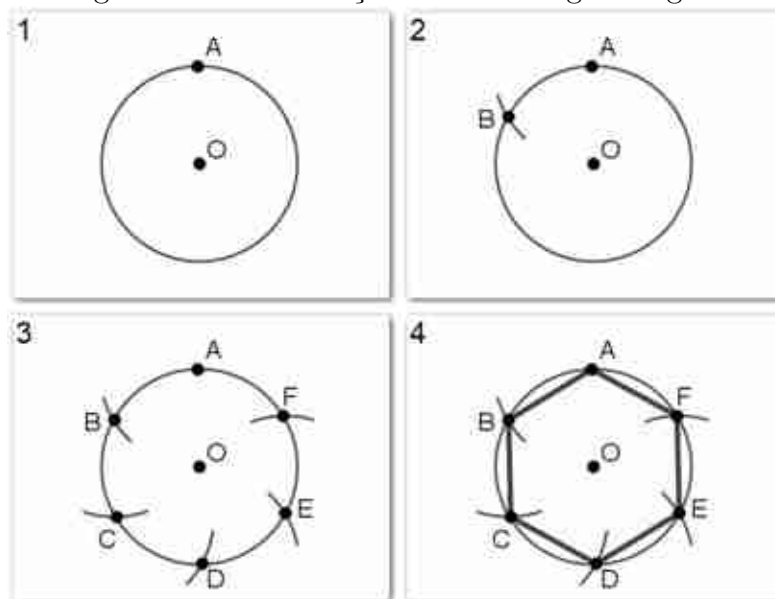
1. Construa um ângulo \hat{A} congruente ao ângulo \hat{PQR} (ver seção 2.1);
2. Com a abertura do compasso igual à medida de \overline{MN} , coloque a ponta seca sobre A e construa um arco intersecando as semirretas do ângulo nos pontos B e D ;
3. Ainda com abertura igual à medida de \overline{MN} , construa dois arcos, um centrado em B e o outro em D , que se intersecam no ponto C ;
4. Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DC} , formando o losango procurado.

JUSTIFICATIVA:

Os lados do polígono são congruentes a \overline{MN} e o ângulo \hat{BAD} é congruente a \hat{RQP} por construção. Portanto $ABCD$ é um losango com as medidas esperadas.

4.9 Construção de um hexágono regular

Figura 4.15: Construção de um hexágono regular



Fonte: Autor

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma circunferência de centro O , passando por um ponto A ;
2. Com a abertura do compasso igual à medida do raio \overline{OA} , coloque a ponta seca sobre B e marque um ponto C sobre a circunferência;
3. A partir do ponto B , obtenha o ponto C seguindo a mesma ideia do passo anterior e repita o mesmo procedimento obtendo os pontos D , E e F sobre a circunferência.
4. Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} e \overline{FA} , obtendo o hexágono $ABCDEF$.

JUSTIFICATIVA:

Perceba que, por construção, os triângulos AOB , BOC , COD , DOE e EOF são equiláteros e congruentes entre si. Por sua vez, o triângulo FOA também é congruente aos demais pelo caso LAL, visto que \overline{OA} e \overline{OF} , assim como os lados com extremos em O dos outros triângulos, são raios da circunferência e o ângulo $F\hat{O}A$ mede 60° , pois ele somado com os 5 ângulos de 60° com vértice em O formam um ângulo de 360° . Portanto, o polígono $ABCDEF$ é um hexágono regular.

Capítulo 5

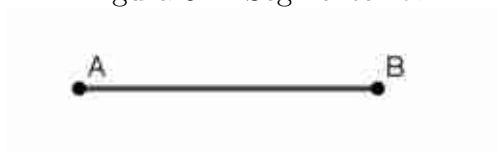
Exercícios e soluções

Neste capítulo apresentaremos alguns exercícios, com as respectivas soluções, que abordam construções geométricas com régua e compasso. Tais questões têm objetivo de reforçar os conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores, verificar por meio de construções as propriedades de algumas figuras, revisar conceitos e propriedades geométricas.

5.1 Exercícios

Questão 1: Conhecendo-se \overline{AB} , construa o segmento:

Figura 5.1: Segmento \overline{AB}

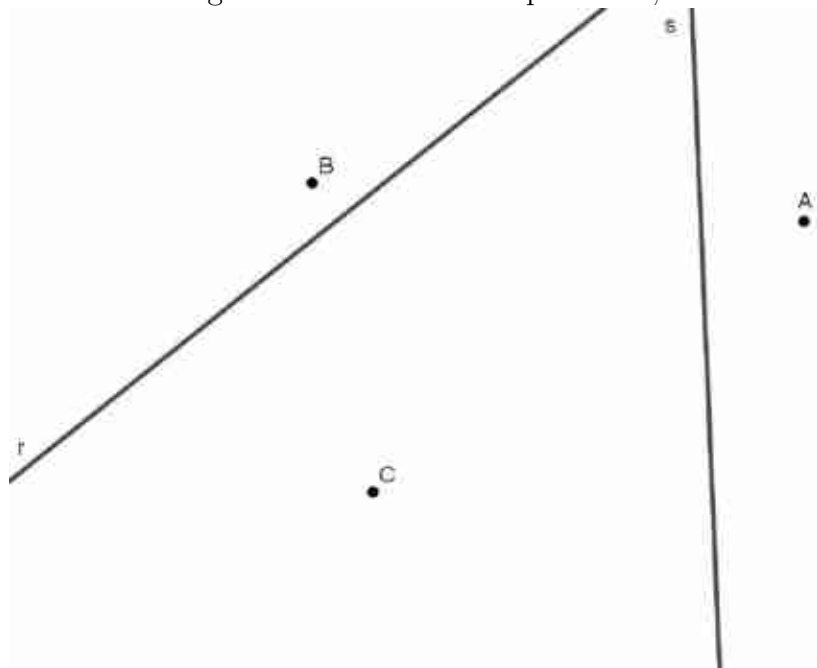


Fonte: Autor

- a) Que tenha o dobro da medida de \overline{AB} ;
- b) Que tenha a metade da medida de \overline{AB} ;
- c) Cujas medida seja $3/2$ da medida de \overline{AB} ;
- d) Cujas medida seja $1/4$ da medida de \overline{AB} .

Questão 2: Dadas as retas r e s e os pontos A , B e C , construa o que se pede:

Figura 5.2: Retas r e s e pontos A , B e C

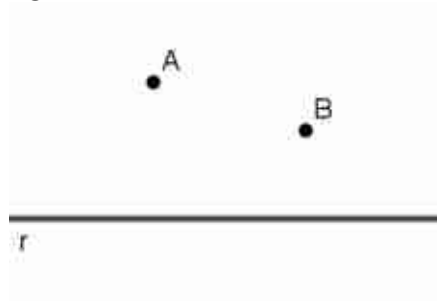


Fonte: Autor

- a) Uma reta paralela a r , passando por A ;
- b) Uma reta perpendicular a s e que contenha A ;
- c) A reta que contém B e é perpendicular à reta \overleftrightarrow{AC} ;
- d) O ponto de interseção entre as retas perpendiculares a r e s nos pontos B e C , respectivamente.

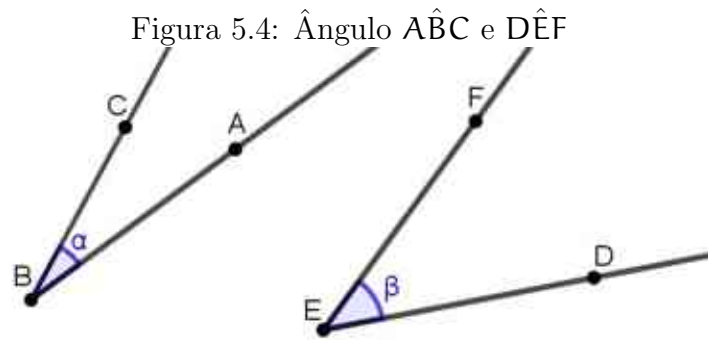
Questão 3: Determine o ponto M da reta r que é equidistante dos pontos A e B .

Figura 5.3: Pontos A e B e reta r



Fonte: Autor

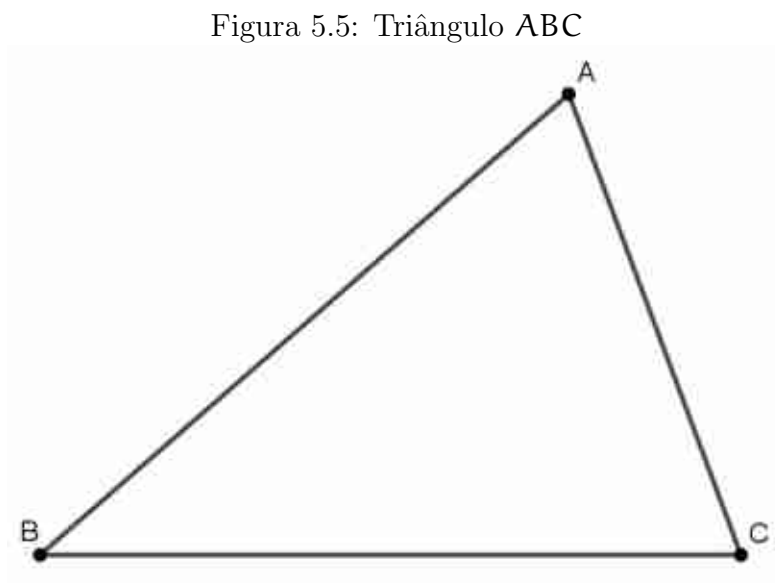
Questão 4: Dados os ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{D}EF$ de medidas α e β , respectivamente, construa:



Fonte: Autor

- A bissetriz \overrightarrow{BV} do ângulo $\hat{D}EF$;
- Um ângulo cuja medida seja $\alpha + \beta$;
- Um ângulo cuja medida seja 3α ;
- Um ângulo cuja medida seja $3\alpha - \beta/2$.

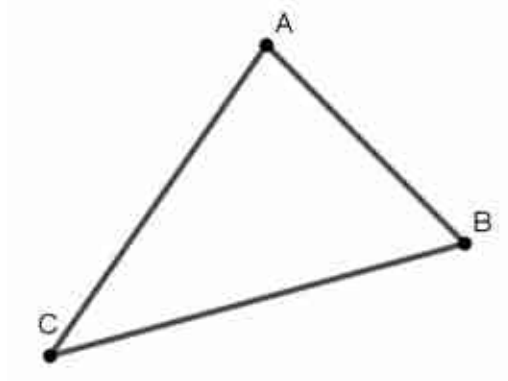
Questão 5: Dado o triângulo ABC , construa:



Fonte: Autor

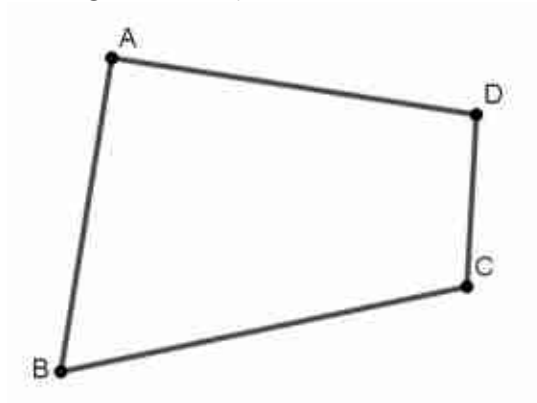
- A mediana relativa a \overline{BC} ;
- A altura relativa a \overline{AC} ;
- A bissetriz relativa ao ângulo \hat{A} ;
- A mediatriz relativa a \overline{AB} .

Questão 6: Dado o triângulo ABC , verifique, através de uma construção, que a soma das medidas de seus ângulos internos é 180° .

Figura 5.6: Triângulo ABC 

Fonte: Autor

Questão 7: Dado o quadrilátero $ABCD$, verifique, através de uma construção, que a soma das medidas de seus ângulos internos é 360° .

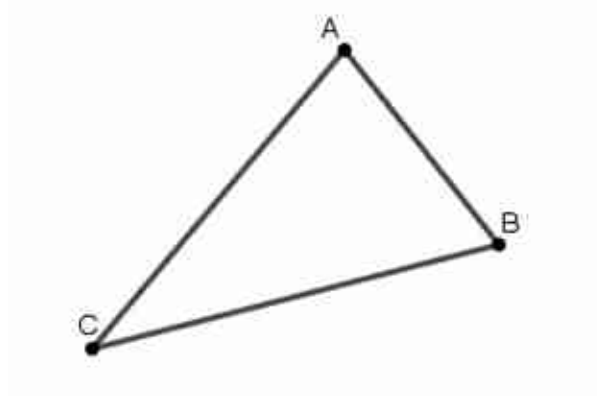
Figura 5.7: Quadrilátero $ABCD$ 

Fonte: Autor

Questão 8: Construa um triângulo e determine seu incentro.

Questão 9: Determine o ortocentro do triângulo ABC a seguir.

Figura 5.8: Triângulo ABC

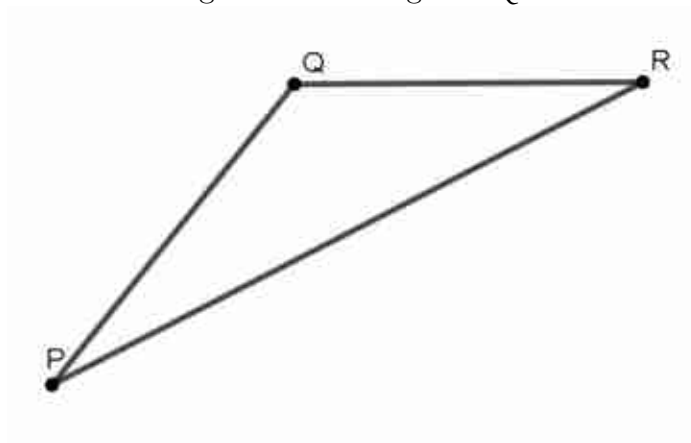


Fonte: Autor

Questão 10: Construa um triângulo e determine seu baricentro.

Questão 11: Determine o circuncentro do triângulo a seguir.

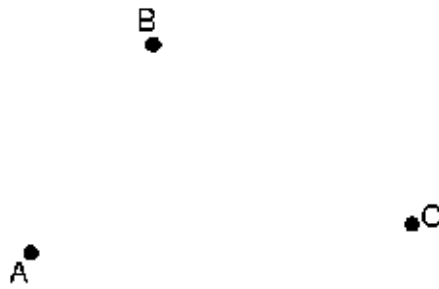
Figura 5.9: Triângulo PQR



Fonte: Autor

Questão 12: Construa uma circunferência que contenha os pontos A, B e C.

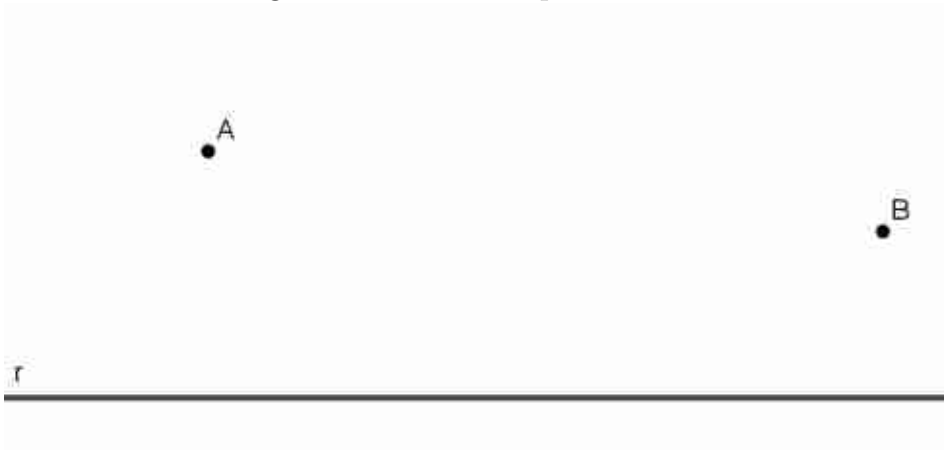
Figura 5.10: Pontos A, B e C



Fonte: Autor

Questão 13: Dados os pontos A e B e a reta r, determine o ponto H, pertencente a r, tal que a soma $\text{med}(\overline{AH}) + \text{med}(\overline{HB})$ seja a menor possível.

Figura 5.11: Reta r e pontos A e B



Fonte: Autor

Questão 14: Dado o segmento \overline{PQ} , construa um retângulo cujas medidas de dois lados consecutivos sejam o dobro e a metade da medida de \overline{PQ} .

Figura 5.12: Segmento \overline{PQ}

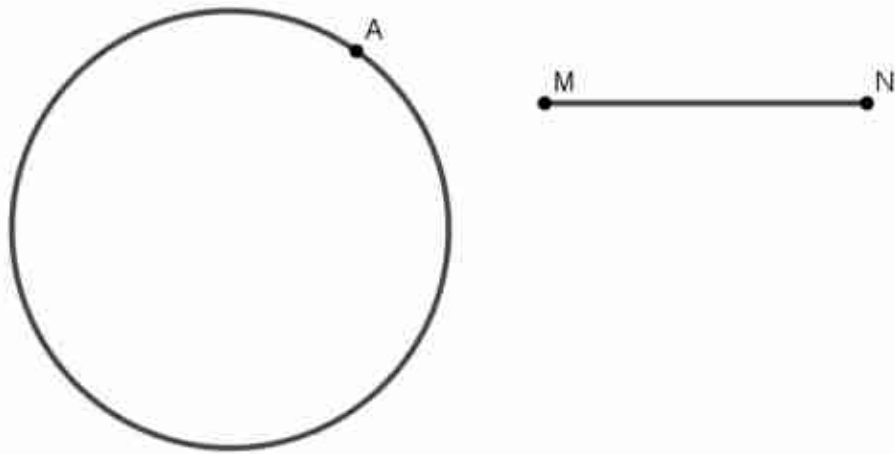


Fonte: Autor

Questão 15: Dados o segmento \overline{MN} e a circunferência que contém o ponto A, determine

as cordas dessa circunferência que são congruentes a \overline{MN} e possuem como uma das extremidades o ponto A .

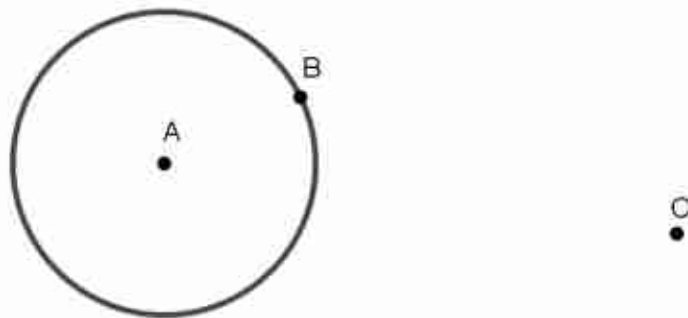
Figura 5.13: Circunferência contendo o ponto A e segmento \overline{MN}



Fonte: Autor

Questão 16: Dados a circunferência de centro em A e os pontos B e C , construa uma circunferência que a tangencie em B e contenha o ponto C .

Figura 5.14: Circunferência de centro em A e pontos B e C



Fonte: Autor

Questão 17: Dados os segmentos \overline{PQ} e \overline{RS} , construa duas circunferências tangentes tais que a soma de seus raios seja igual à medida de \overline{PQ} e a diferença seja igual à medida de \overline{RS} .

Figura 5.15: Segmentos \overline{PQ} e \overline{RS}



Fonte: Autor

Questão 18: Construa um quadrado cujo apótema tenha a mesma medida do segmento \overline{AB}

Figura 5.16: Segmento \overline{PQ}



Fonte: Autor

Questão 19: Das relações métricas no triângulo retângulo, sabemos que a medida da altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a mesma. Usando esta ideia, construa um segmento de medida $\sqrt{a \cdot b}$, onde a e b são, respectivamente, as medidas de \overline{AB} e \overline{BC} .

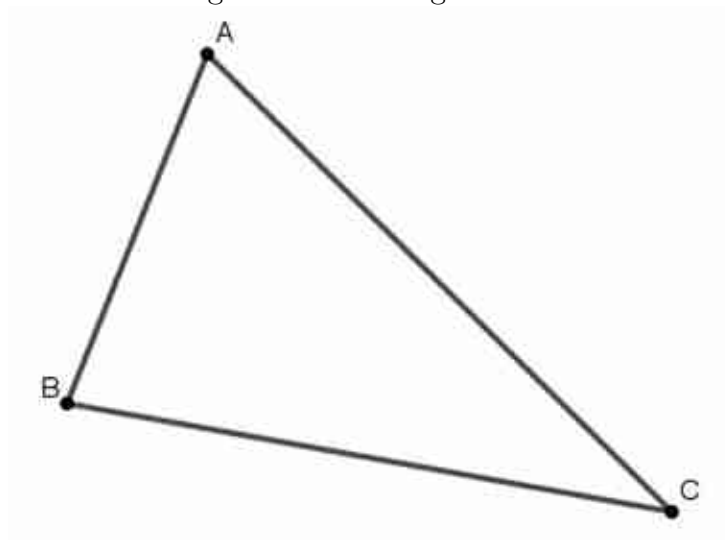
Figura 5.17: Segmentos \overline{PQ} e \overline{RS}



Fonte: Autor

Questão 20: Inscreva uma circunferência no triângulo ABC.

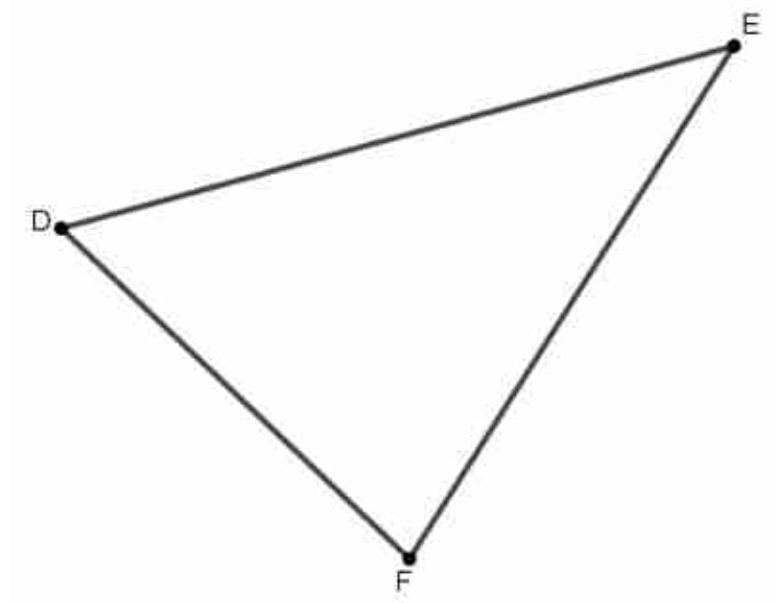
Figura 5.18: Triângulo ABC



Fonte: Autor

Questão 21: Circunscreva uma circunferência no triângulo DEF.

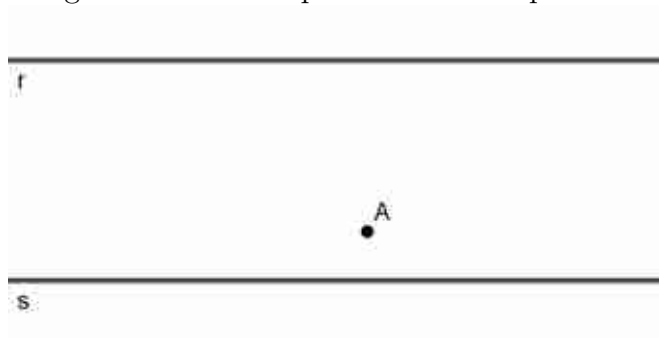
Figura 5.19: Triângulo DEF



Fonte: Autor

Questão 22: Dadas as retas paralelas r e s e o ponto A entre elas, conforme figura abaixo, construa uma circunferência que passe por A e seja tangente às retas.

Figura 5.20: Retas paralelas r e s e ponto A



Fonte: Autor

Questão 23: Dado o segmento \overline{MN} de medida a , construa:

Figura 5.21: Segmento \overline{MN}



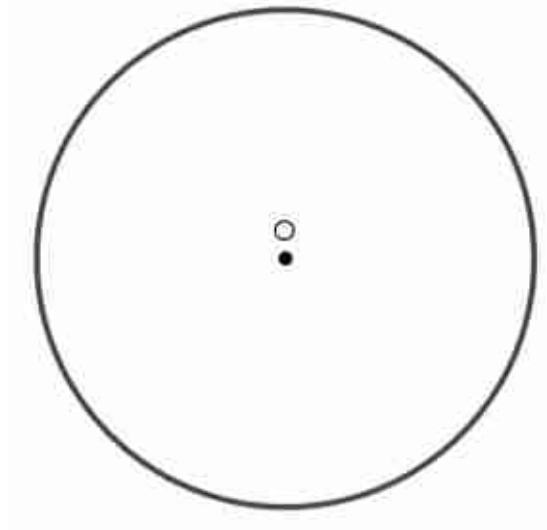
Fonte: Autor

- a) Um triângulo equilátero cujo lado mede a .
- b) Um quadrado cujo lado mede a .

c) Um hexágono regular cujo lado mede a .

Questão 24: Circunscreva um triângulo na circunferência de centro O .

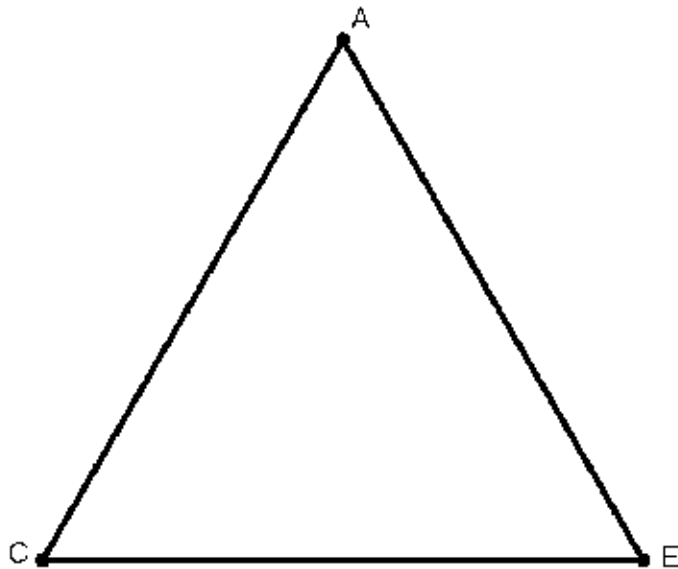
Figura 5.22: Circunferência de centro no ponto O



Fonte: Autor

Questão 25: A partir do triângulo equilátero abaixo, construa um hexágono regular.

Figura 5.23: Triângulo ACE



Fonte: Autor

Questão 26: Dado um segmento \overline{PQ} de medida a , construa um segmento de medida

$a\sqrt{2}$. Dica: Tente obter este valor usando o teorema de Pitágoras e depois construa uma figura que represente essa situação.

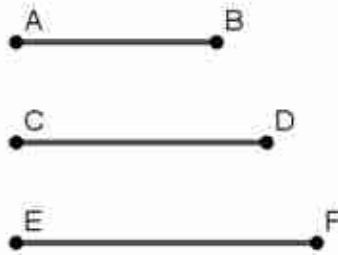
Figura 5.24: Segmento \overline{PQ}



Fonte: Autor

Questão 27: Dados os segmentos \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} de medidas a , b e c , respectivamente, construa um segmento de medida $\frac{b \cdot c}{a}$. Dica: Tente obter esse valor usando o teorema de Tales e depois construa uma figura que represente essa situação.

Figura 5.25: Segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD}



Fonte: Autor

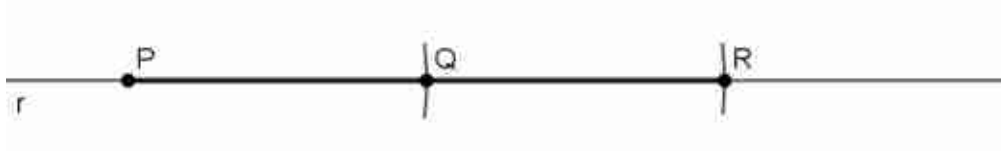
5.2 Soluções

Questão 1:

a) Perceba que para construir o segmento desejado devemos construir dois segmentos colineares e consecutivos congruentes a \overline{AB} .

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma reta suporte r ;
2. Sobre a reta r , construa um segmento \overline{PQ} , congruente a \overline{AB} (ver Seção 1.1);
3. Construa o segmento \overline{QR} , congruente a \overline{AB} , sobre a reta r (ver Seção 1.1). O segmento \overline{PR} tem o dobro de medida de \overline{AB} .

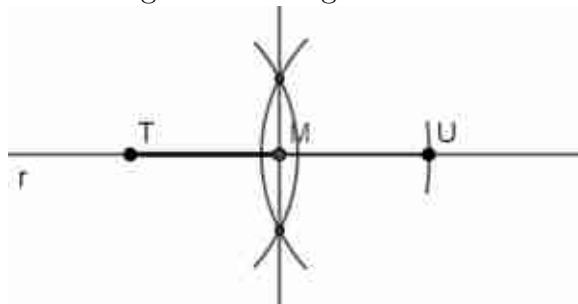
Figura 5.26: Segmento \overline{PR} 

Fonte: Autor

b) Esse problema é facilmente resolvido determinando o ponto médio de um segmento congruente a \overline{AB} pois este ponto determina dois segmentos com a medida esperada.

DESCRIZAÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{TU} , congruente a \overline{AB} (ver Seção 1.1);
2. Determine o ponto médio M do segmento \overline{TU} (ver Seção 1.3). O segmento \overline{TM} , assim como o segmento \overline{MU} , possui metade da medida de \overline{AB} .

Figura 5.27: Segmento \overline{TM} 

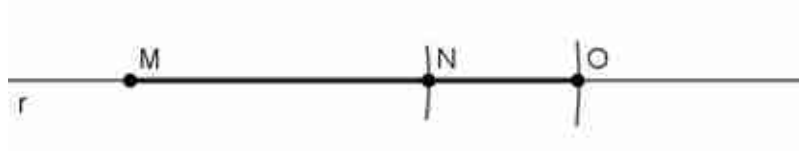
Fonte: Autor

c) Nessa construção, devemos construir um segmento cuja medida seja a soma das medidas de um segmento congruente a \overline{AB} com um segmento congruente ao obtido no item anterior. Tal segmento medirá $3/2$ da medida de \overline{AB} .

DESCRIZAÇÃO:

1. Construa uma reta suporte r ;
2. Sobre r , construa um segmento \overline{MN} , congruente a \overline{AB} (ver Seção 1.1);
3. Ainda sobre r , construa um segmento \overline{NO} , congruente ao segmento obtido no item b) (ver Seção 1.1). O segmento \overline{MO} atende ao esperado.

Figura 5.28: Segmento \overline{MO}



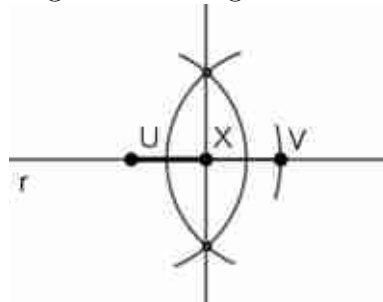
Fonte: Autor

d) Repita o procedimento do item b) em um segmento congruente ao obtido no mesmo item.

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{UV} , congruente ao obtido no item b) (ver Seção 1.1);
2. Determine o ponto médio X do segmento \overline{AB} (ver Seção 1.3). O segmento \overline{UX} , em destaque, ou o segmento \overline{XV} , possuem metade da metade da medida de \overline{AB} , ou seja, medem $1/4$ da medida de \overline{AB} .

Figura 5.29: Segmento \overline{UX}



Fonte: Autor

Questão 2:

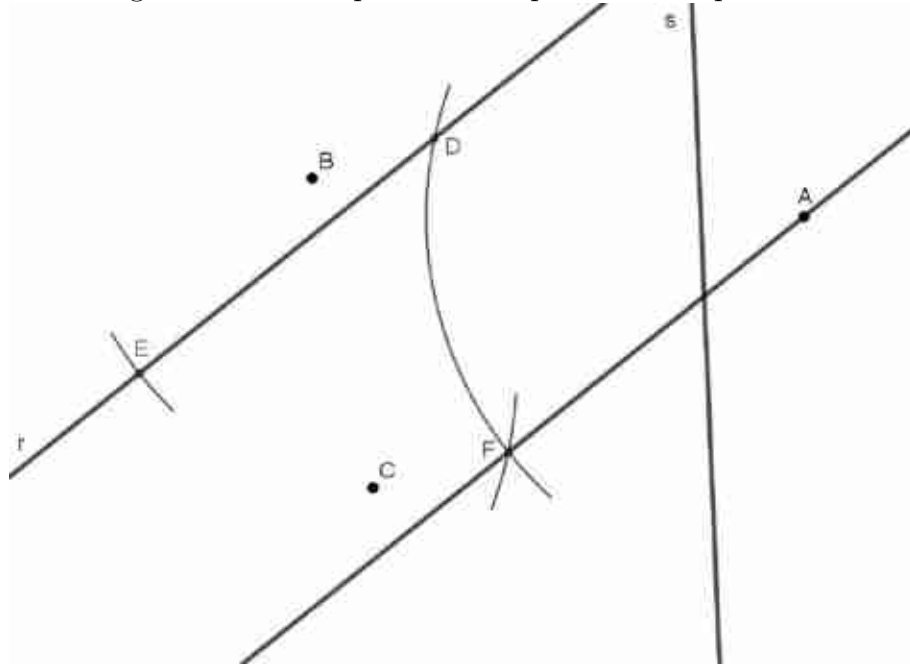
a) Siga os passos da construção de uma reta paralela passando por um ponto dado (ver Seção 1.9).

DESCRIÇÃO:

1. Com a ponta seca em A , construa um arco intersectando r em D . Preserve a abertura do compasso para a construção dos outros arcos;
2. Construa um arco centrado em D , intersectando r em E ;

3. Construa outro arco, agora centrado em E, intersecando o primeiro arco construído em F;
4. Construa a reta \overline{AF} , que é paralela a r.

Figura 5.30: Reta paralela a r que contém o ponto A

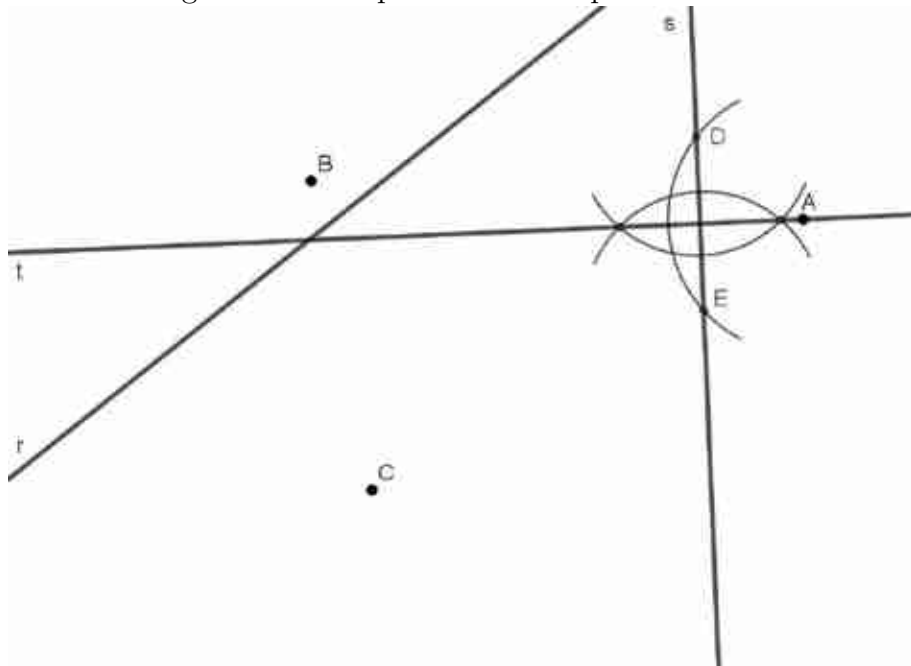


Fonte: Autor

- b) Siga os passos da construção de uma reta perpendicular passando por um ponto dado (ver Seção 1.5).

DESCRIÇÃO:

1. Com a ponta-seca em A, trace um arco intersecando s em D e E;
2. Construa dois arcos, um centrado em D e o outro em E, com a mesma abertura do compasso que se intersetem em dois pontos;
3. Trace a reta passando pelos pontos de interseção dos arcos. Esta é a reta procurada.

Figura 5.31: Perpendicular a s que contém A 

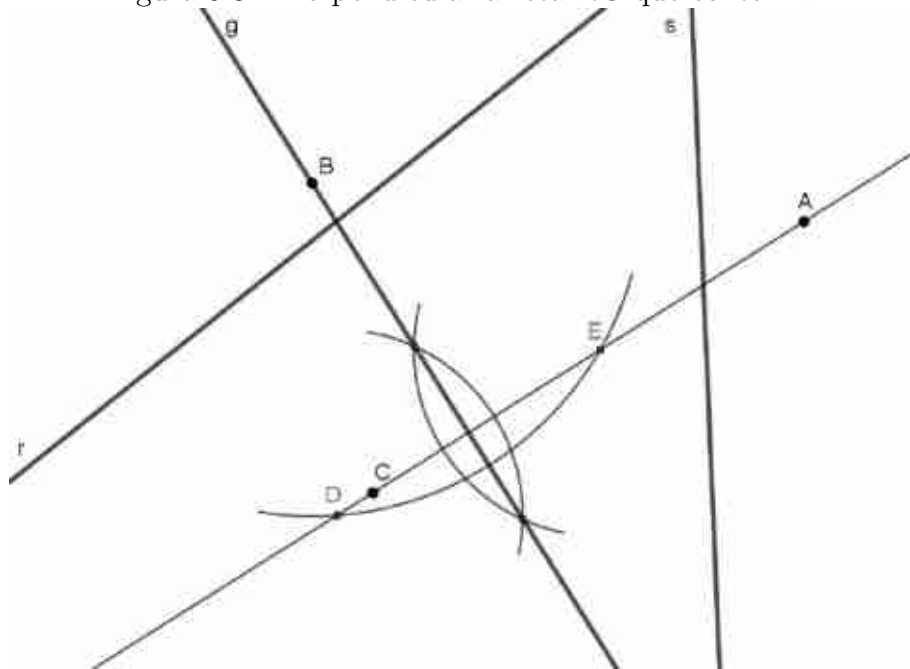
Fonte: Autor

c) Trace a reta \overleftrightarrow{AC} e depois a perpendicular a esta passando por B (ver Seção 1.5).

DESCRIÇÃO:

1. Trace a reta \overleftrightarrow{AC} ;
2. Com a ponta seca do compasso em B , construa um arco intersectando \overleftrightarrow{AC} nos pontos D e E ;
3. Trace dois arcos com a mesma abertura do compasso, sendo um centrado em D e o outro em E ;
4. Trace a reta g pelos pontos de interseção dos dois últimos arcos construídos. Esta reta contém B e é perpendicular a \overleftrightarrow{AC} .

Figura 5.32: Perpendicular à reta \overleftrightarrow{AC} que contém B



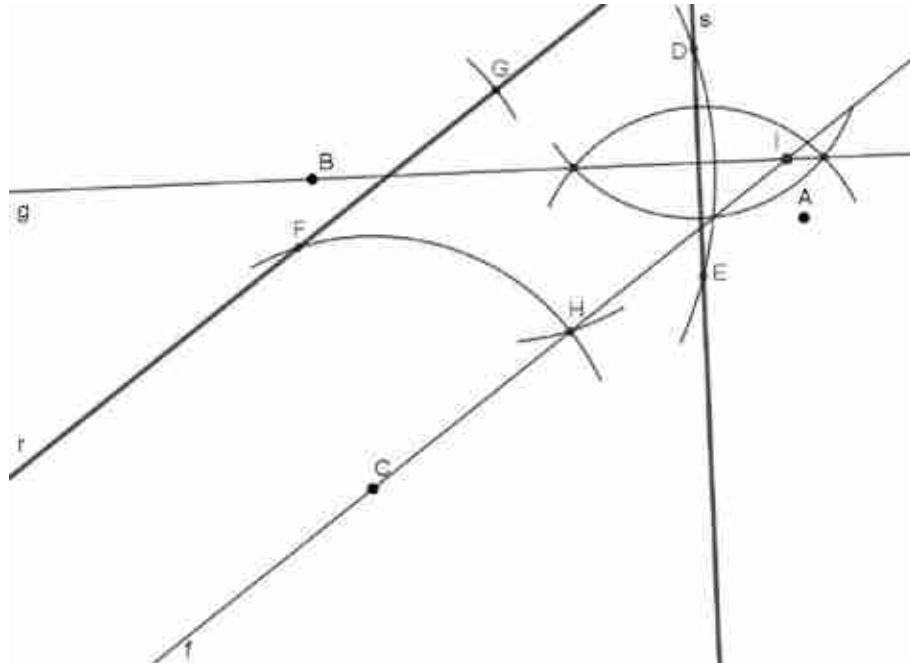
Fonte: Autor

d) Basta traçar as retas pedidas e indicar o ponto onde elas se intersectam.

DESCRIÇÃO:

1. Trace uma paralela a r que contenha C . Siga os passos do item a);
2. Trace a perpendicular a s passando por B . Siga os passos do item b);
3. Marque o ponto I de interseção das duas retas.

Figura 5.33: Ponto I na interseção entre as perpendiculares das retas r e s nos pontos B e A, respectivamente



Fonte: Autor

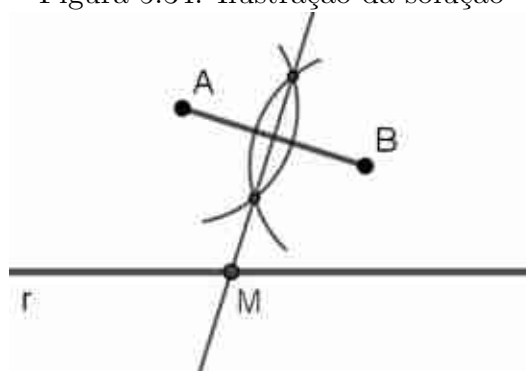
Questão 3:

Como a reta mediatriz do segmento de extremidades A e B contém todos os pontos equidistantes de A e B, o ponto de interseção desta mediatriz com a reta r é solução para o problema.

DESCRIÇÃO:

1. Construa a mediatriz do segmento \overline{AB} (ver Seção 1.2);
2. Marque o ponto de interseção da mediatriz com a reta, que é a solução da questão.

Figura 5.34: Ilustração da solução



Fonte: Autor

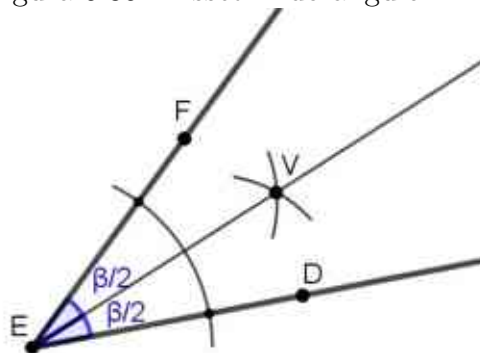
Questão 4:

a) Para essa construção, basta traçarmos a bissetriz do ângulo dado.

DESCRIÇÃO:

1. Trace a bissetriz \vec{EV} do ângulo $\hat{D}EF$ (ver Seção 2.2). Ela divide o ângulo $\hat{D}EF$ em dois ângulos congruentes de medida $\frac{\beta}{2}$.

Figura 5.35: Bissetriz do ângulo $\hat{D}EF$



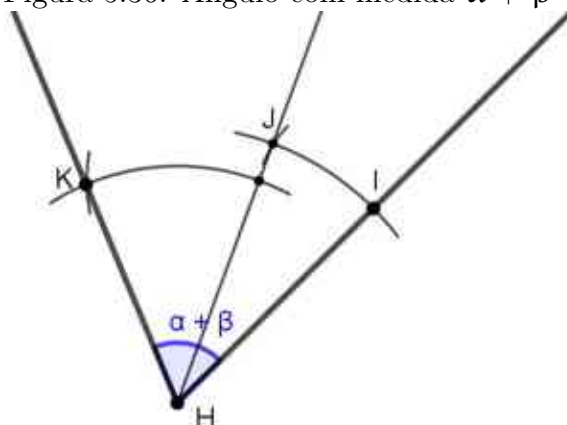
Fonte: Autor

b) Construa um ângulo cuja medida seja a soma dos dois ângulos dados (ver Seção 2.6).

DESCRIÇÃO:

1. Construa o ângulo $\hat{I}HJ$, congruente à $\hat{A}BC$ (ver Seção 2.1);
2. Construa o ângulo $\hat{J}HK$, congruente a $\hat{D}EF$ (ver Seção 2.1) e adjacente a $\hat{I}HJ$. A medida de $\hat{I}HK$ é $\alpha + \beta$.

Figura 5.36: Ângulo com medida $\alpha + \beta$



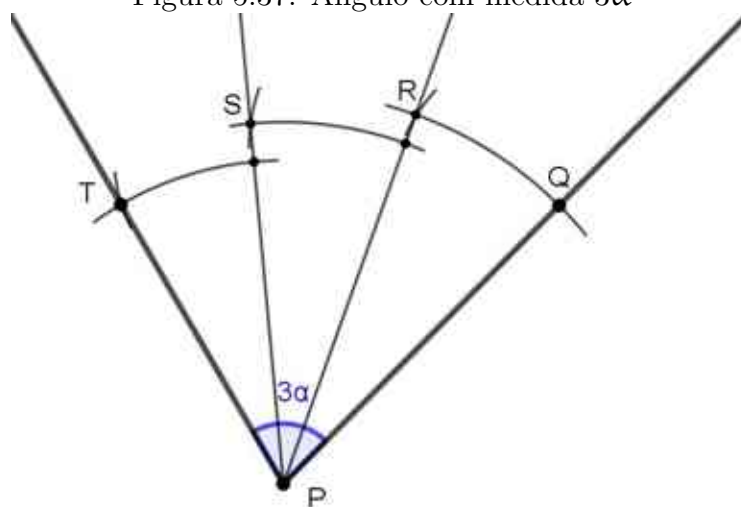
Fonte: Autor

c) Basta fazer a soma de 3 ângulos congruentes a $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ (ver Seção 2.6).

DESCRIÇÃO:

1. Construa o ângulo $\hat{Q}\hat{P}\hat{R}$, congruente a $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ (ver Seção 2.1);
2. Construa o ângulo $\hat{R}\hat{P}\hat{S}$, congruente a $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ (ver Seção 2.1) adjacente a $\hat{Q}\hat{P}\hat{R}$;
3. Construa o ângulo $\hat{S}\hat{P}\hat{T}$, congruente a $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ (ver Seção 2.1) e adjacente a $\hat{R}\hat{P}\hat{S}$. A medida de $\hat{Q}\hat{P}\hat{T}$ é 3α .

Figura 5.37: Ângulo com medida 3α



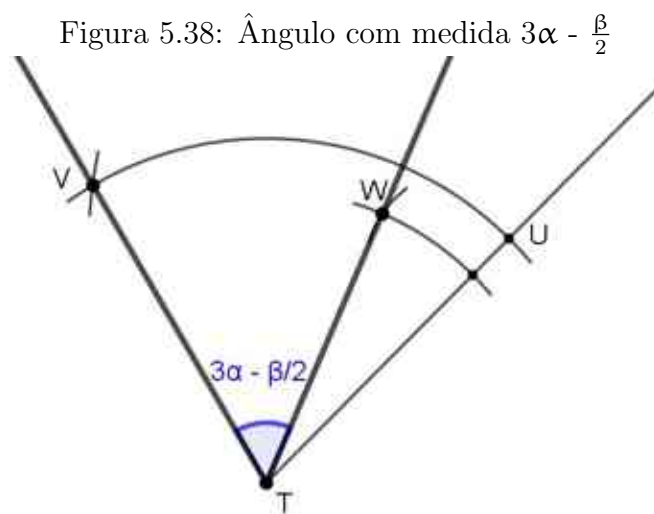
Fonte: Autor

d) Siga os passos da construção diferença de ângulos com os ângulos obtidos nos itens c)

e a) (ver Seção 2.7).

DESCRIÇÃO:

1. Construa o ângulo $\widehat{U\hat{T}V}$, congruente ao ângulo $\widehat{Q\hat{P}T}$ (ver Seção 2.1), obtido no item c);
2. Construa o ângulo $\widehat{U\hat{T}W}$, congruente a um dos ângulos obtidos no item a) (ver Seção 2.1) tal que ele seja interno ao ângulo $\widehat{U\hat{T}V}$. O ângulo $\widehat{W\hat{T}V}$ mede $3\alpha - \frac{\beta}{2}$.



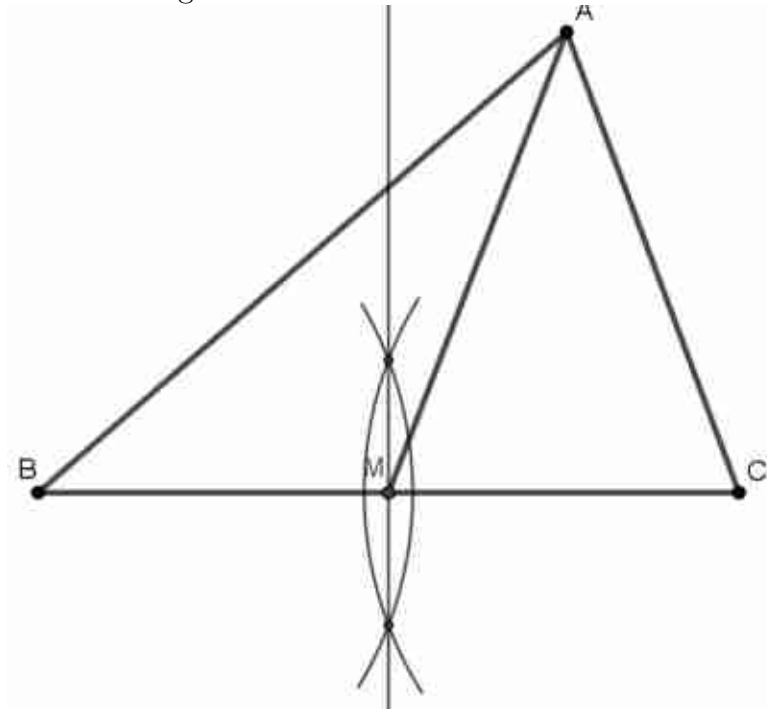
Fonte: Autor

Questão 5:

a) A mediana de um triângulo é um segmento com extremidades em um de seus vértices e no ponto médio do lado oposto a este vértice. Dessa forma, precisamos apenas determinar o ponto médio do lado \overline{BC} e traçar o segmento desejado.

DESCRIÇÃO:

1. Determine o ponto médio M do lado \overline{BC} (ver Seção 1.3);
2. Trace o segmento \overline{AM} .

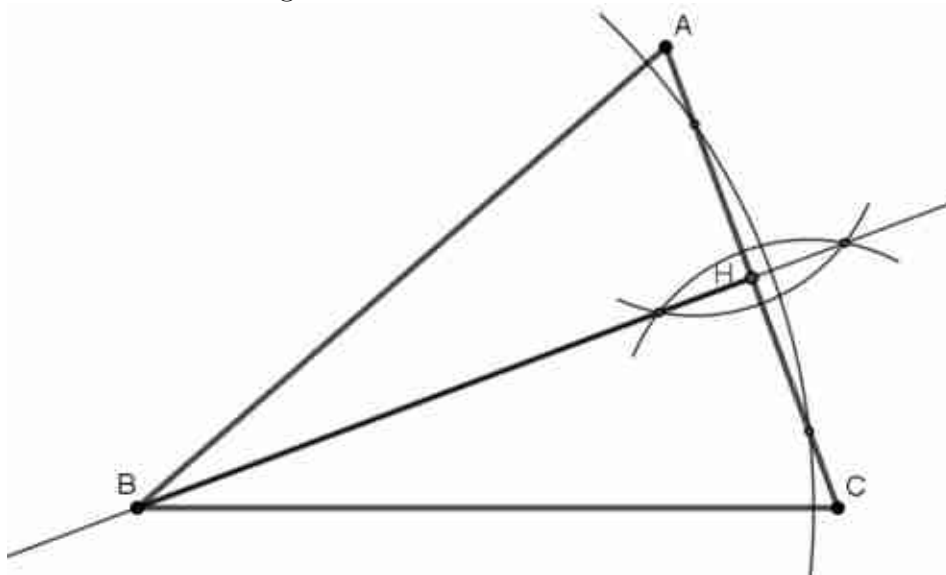
Figura 5.39: Mediana relativa a \overline{BC} 

Fonte: Autor

b) A altura de um triângulo é um segmento com uma extremidade em um de seus vértices e a outra extremidade no lado oposto a este vértice, sendo perpendicular ao lado que toca. Assim sendo, devemos traçar uma perpendicular a \overline{AC} passando por B, que conterá o segmento procurado.

DESCRIBÇÃO:

1. Trace uma perpendicular a \overline{AC} , passando por B (ver Seção 1.5);
2. Marque o ponto H de interseção de \overline{AC} com sua perpendicular. O segmento \overline{BH} é a altura procurada.

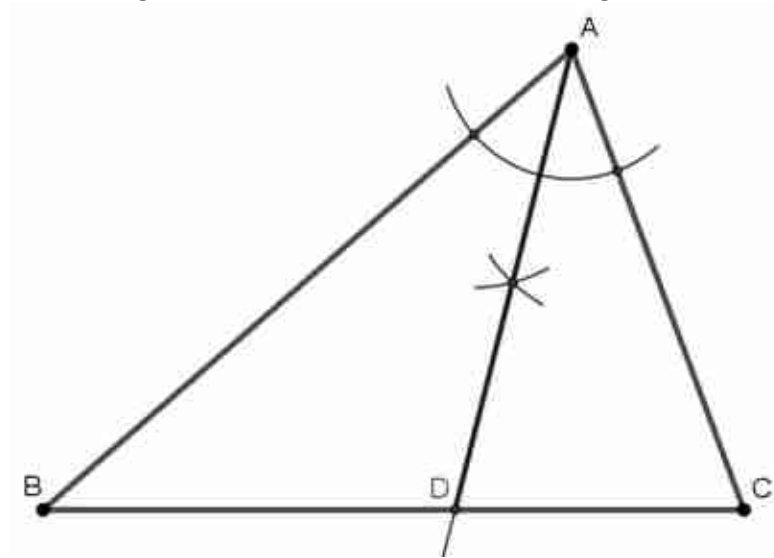
Figura 5.40: Altura relativa a \overline{AC} 

Fonte: Autor

c) Uma bissetriz do triângulo é um segmento com uma extremidade em um de seus vértices e a outra no lado oposto a este, sendo que ele divide o ângulo interno do qual contém o vértice em dois ângulos congruentes. Logo, nesta construção, devemos traçar a bissetriz do ângulo \hat{A} e destacar o segmento procurado.

DESCRIÇÃO:

1. Trace a bissetriz do ângulo interno do triângulo com vértice em A (ver Seção 2.2);
2. Marque o ponto D de interseção da bissetriz com o lado \overline{BC} . \overline{AD} é a bissetriz do triângulo procurada.

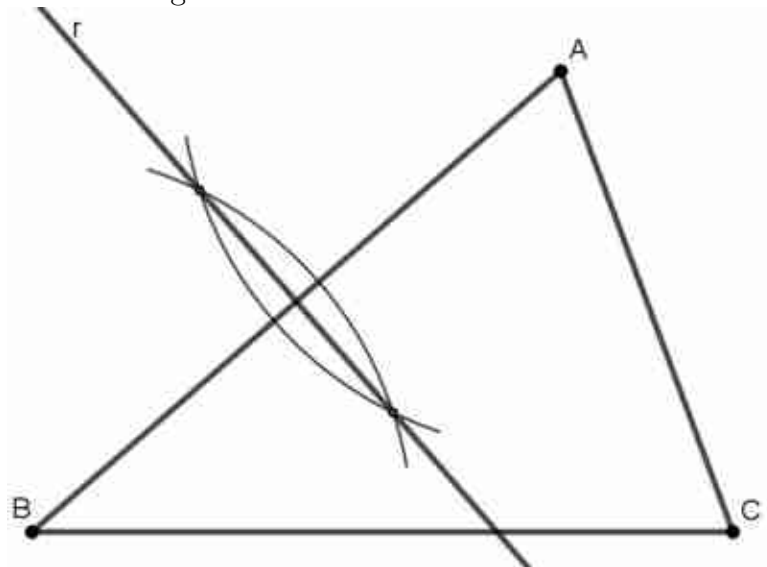
Figura 5.41: Bissetriz relativa ao ângulo \hat{A} 

Fonte: Autor

d) A mediatriz de um lado do triângulo é uma reta perpendicular a um dos seus lados que o intersesta em seu ponto médio e cuja construção já sabemos como fazer (ver Seção 1.2).

DESCRIÇÃO:

1. Trace dois arcos com a mesma abertura sendo um centrado em A e o outro em B ;
2. Trace uma reta r pelos pontos de interseção dos dois arcos. A reta r é a mediatriz de \overline{AB} .

Figura 5.42: Mediatriz relativa a \overline{AB} 

Fonte: Autor

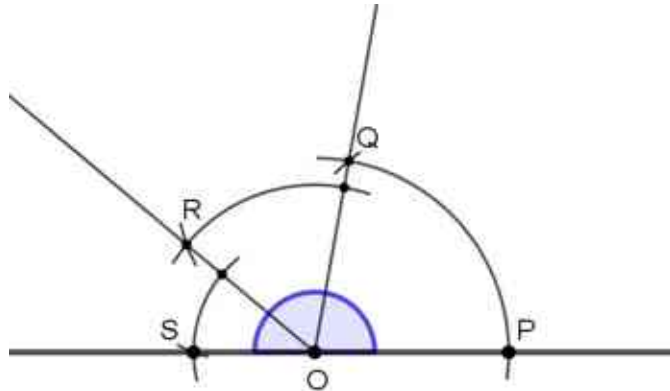
Questão 6:

Basta construirmos um ângulo cuja medida seja a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo (ver Seção 2.6).

DESCRIÇÃO:

1. Construa o ângulo $\widehat{PÔQ}$, congruente a $\widehat{B\hat{A}C}$ (ver Seção 2.1);
2. Construa o ângulo $\widehat{QÔR}$, congruente a $\widehat{A\hat{B}C}$ e adjacente a $\widehat{B\hat{A}C}$ (ver Seção 2.1);
3. Construa o ângulo $\widehat{RÔS}$, congruente a $\widehat{A\hat{C}B}$ e adjacente a $\widehat{A\hat{B}C}$ (ver Seção 2.1).
Note que $\widehat{PÔS}$ é um ângulo cuja medida é a soma dos ângulos do triângulo ABC e mede 180° .

Figura 5.43: Ângulo $\widehat{P\hat{O}S}$ cuja medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC



Fonte: Autor

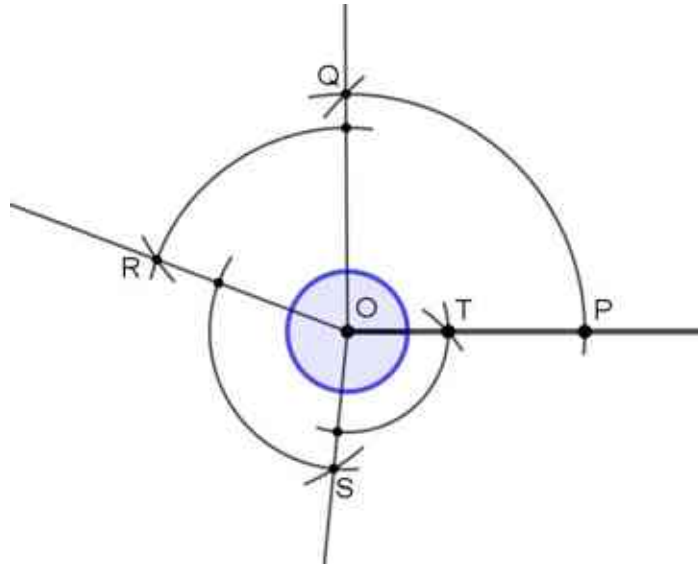
Questão 7:

Basta construirmos um ângulo cuja medida seja a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero (ver Seção 2.6).

DESCRIÇÃO:

1. Construa o ângulo $\widehat{P\hat{O}Q}$, congruente a $\widehat{B\hat{A}C}$ (ver Seção 2.1);
2. Construa o ângulo $\widehat{Q\hat{O}R}$, congruente a $\widehat{A\hat{B}C}$ e adjacente a $\widehat{P\hat{O}Q}$ (ver Seção 2.1);
3. Construa o ângulo $\widehat{R\hat{O}S}$, congruente a $\widehat{A\hat{C}B}$ e adjacente a $\widehat{Q\hat{O}R}$ (ver Seção 2.1);
4. Construa o ângulo $\widehat{S\hat{O}T}$, congruente a $\widehat{D\hat{A}B}$ e adjacente a $\widehat{R\hat{O}S}$ (ver Seção 2.1).
Perceba que $\widehat{P\hat{O}T}$ é um ângulo cuja medida é a soma dos ângulos do quadrilátero $ABCD$ e mede 360° .

Figura 5.44: Ângulo $\hat{P}ÔT$ cuja medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero ABCD



Fonte: Autor

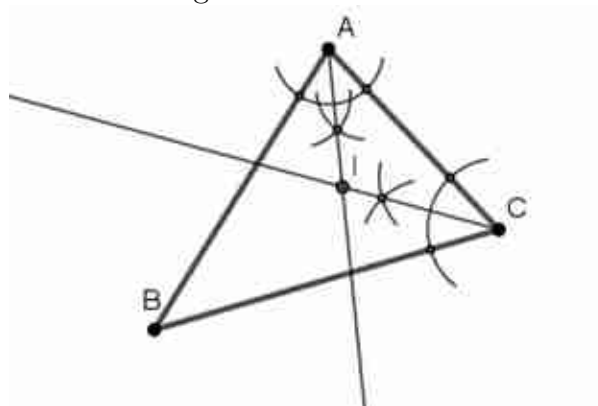
Questão 8:

O incentro é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. Como todas concorrem no mesmo ponto, traçando duas já podemos determinar o incentro.

DESCRIÇÃO:

1. Construa um triângulo;
2. Trace uma bissetriz de um dos ângulos do triângulo (ver solução do item c) da Questão 5);
3. Trace outra bissetriz (ver solução do item c) da Questão 5) e marque o ponto de interseção desta com a anterior. Este ponto é o incentro.

Figura 5.45: Incentro



Fonte: Autor

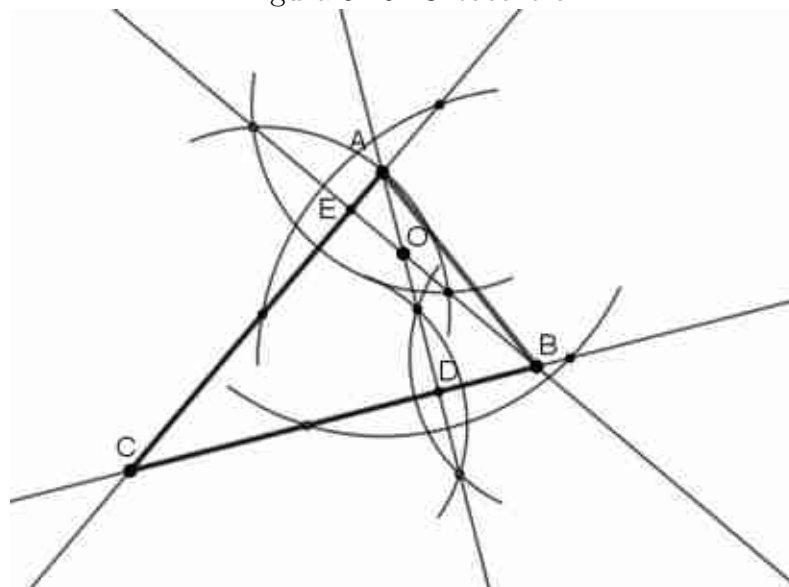
Questão 9:

O ortocentro é o ponto de interseção das alturas do triângulo. Dessa forma, devemos construir duas alturas e o ponto de interseção delas é o ortocentro.

DESCRIÇÃO:

1. Trace uma altura do triângulo (ver solução do item b) da Questão 5);
2. Trace outra altura do triângulo (ver solução do item b) da Questão 5);
3. Marque o ponto O de interseção das alturas. Ele é o ortocentro.

Figura 5.46: Ortocentro



Fonte: Autor

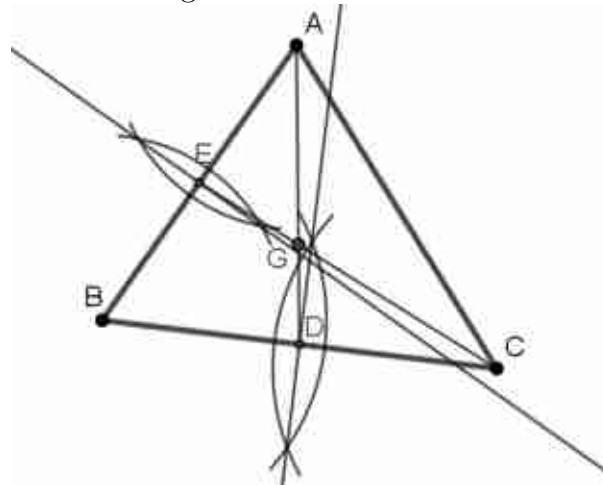
Questão 10:

O baricentro é o ponto de interseção das medianas do triângulo. Assim, devemos construir duas medianas.

DESCRIÇÃO:

1. Construa um triângulo;
2. Construa uma mediana relativa a um lado do triângulo (ver solução do item a) da Questão 5);
3. Construa outra mediana do triângulo (ver solução do item a) da Questão 5) e marque o ponto de interseção desta com a mediana anterior. Este ponto é o baricentro.

Figura 5.47: Baricentro



Fonte: Autor

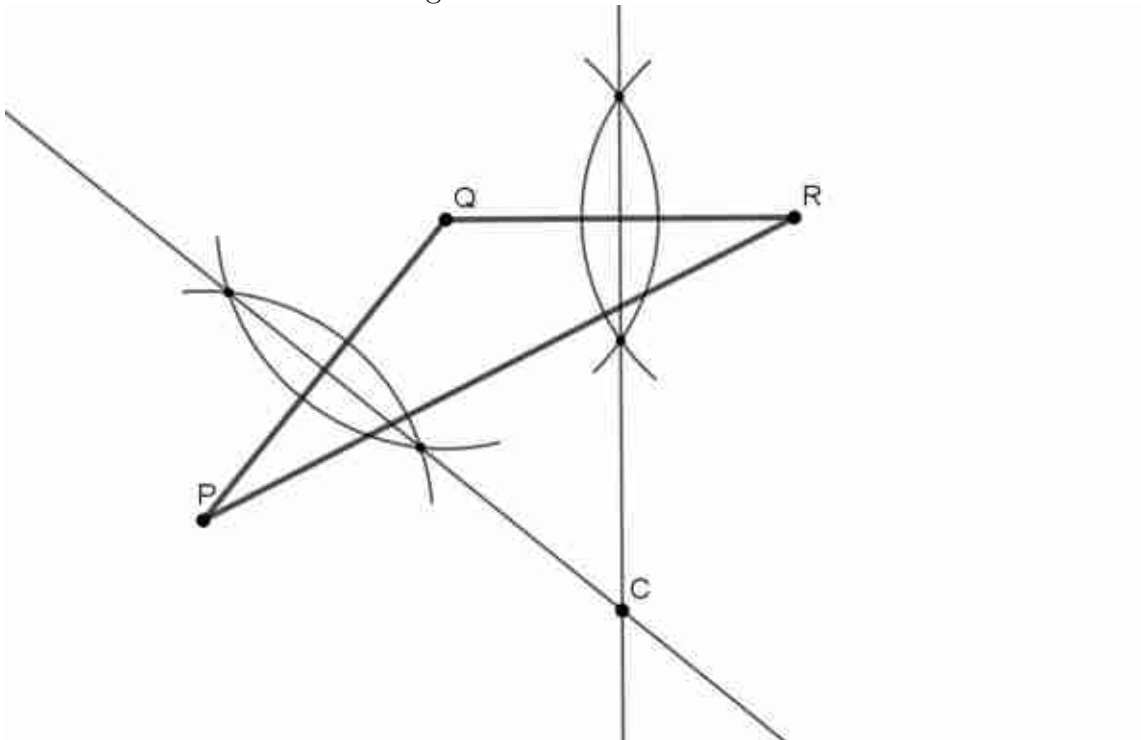
Questão 11:

O circuncentro é o ponto de interseção das retas mediatrizes dos lados do triângulo. Dessa forma, vamos construir duas mediatrizes e obter o circuncentro.

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma reta mediatriz de um dos lados do triângulo (ver solução do item d) da Questão 5 ou Seção 1.2);
2. Construa outra mediatriz (ver solução do item d) da Questão 5 ou Seção 1.2) e marque o ponto de interseção desta com a mediatriz anterior, obtendo o circuncentro.

Figura 5.48: Circuncentro



Fonte: Autor

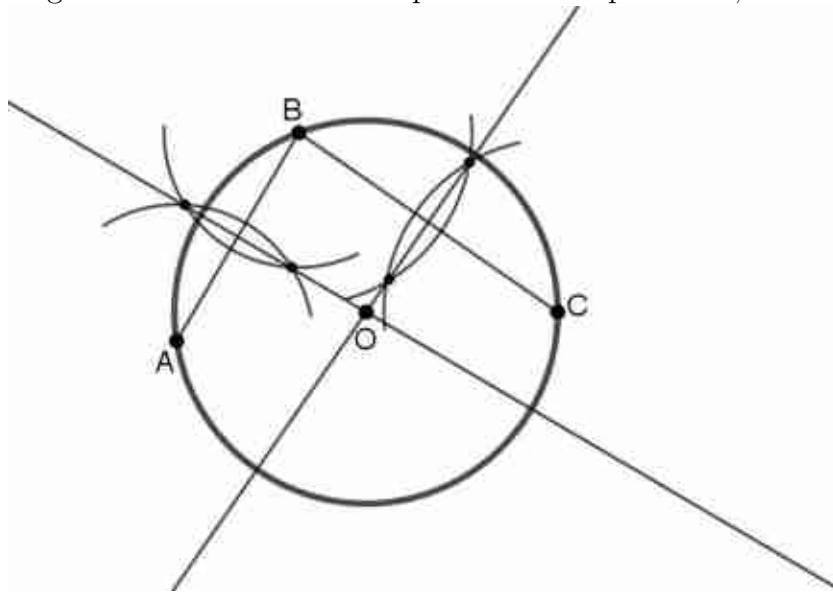
Questão 12:

Já vimos que a mediatriz de uma corda contém o centro da circunferência. Sendo, assim, dois segmentos com extremidades nos pontos da circunferência serão cordas e suas mediatrizes conterão o centro. Como as duas mediatrizes contêm o centro, ele é o ponto de interseção delas. Agora, é só fazer a circunferência centrada nesse ponto passando pelos pontos dados.

DESCRIÇÃO:

1. Trace os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} ;
2. Construa as mediatrizes dos dois segmentos (ver Seção 1.2) e marque o ponto O de interseção das mesmas;
3. Com a ponta seca do compasso sobre C , trace a circunferência passando pelos pontos A , B e C como queríamos.

Figura 5.49: Circunferência que contém os pontos A, B e C



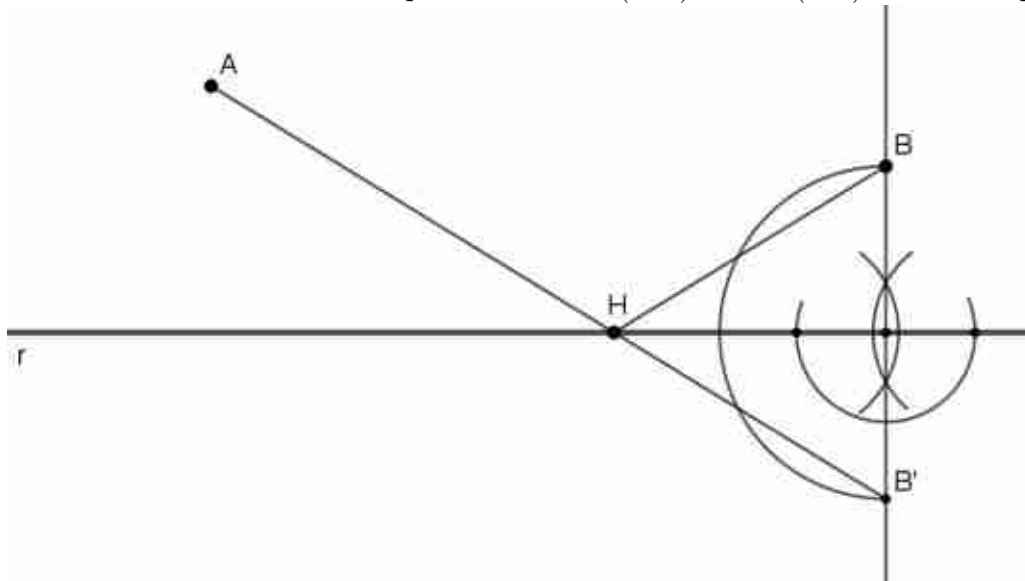
Fonte: Autor

Questão 13:

Imagine um ponto H qualquer sobre uma reta r e os pontos B e B' fora dela tais que eles sejam simétricos em relação a reta. A distância de P a B é igual à distância de P a B' , pois o eixo de simetria de dois pontos é mediatriz do segmento com extremidades nesses pontos. Dessa forma, a soma $\text{med}(\overline{AH}) + \text{med}(\overline{HB})$ será a menor possível se a $\text{med}(\overline{AH}) + \text{med}(\overline{HB'})$ também for, o que ocorre se os pontos A , H e B forem colineares. Portanto, a construção é solucionada determinando o ponto B' , simétrico de B em relação a r , e marcando o ponto H de interseção do segmento $\overline{AB'}$ com r .

DESCRIÇÃO:

1. Construa o ponto B' simétrico de B (ver Seção 1.7);
2. Trace a reta $\overline{AB'}$ e marque o ponto H de interseção desta com a reta r . H é o ponto procurado.

Figura 5.50: Ponto H da reta r tal que a soma $\text{med}(\overline{AH}) + \text{med}(\overline{HB})$ é a menor possível

Fonte: Autor

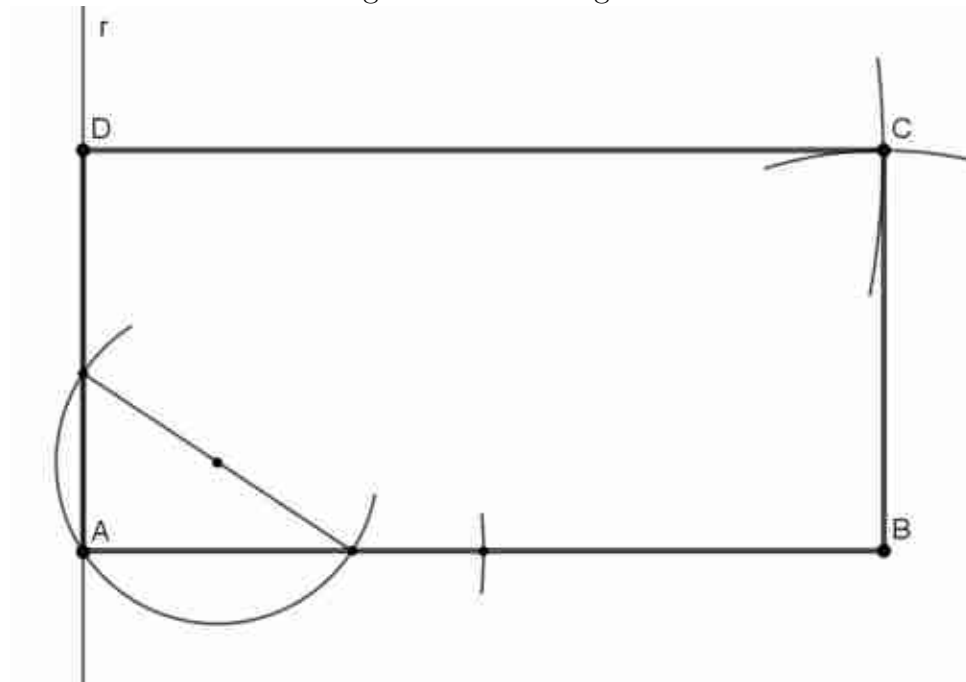
Questão 14:

Nesta construção, devemos inicialmente traçar dois segmentos consecutivos e perpendiculares com medidas $2a$ e a . Depois, determinamos o ponto que simultaneamente dista $2a$ do extremo de segmento menor e a do extremo de segmento maior. Agora é só traçarmos os segmentos que completam o retângulo que tem extremidades nesse ponto.

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} com o dobro da medida de \overline{PQ} (ver solução do item b) da Questão 1);
2. Trace uma reta perpendicular ao segmento \overline{AB} no ponto A (ver Seção 1.6);
3. Construa o segmento \overline{AD} sobre r congruente a \overline{PQ} (ver Seção 1.1);
4. Construa um arco centrado em B e com abertura igual à medida de PQ;
5. Construa outro arco, agora centrado em D e com abertura igual à medida de \overline{AB} , intersectando o arco anterior no ponto C;
6. Construa os segmentos \overline{BC} e \overline{CD} , obtendo o retângulo ABCD.

Figura 5.51: Retângulo



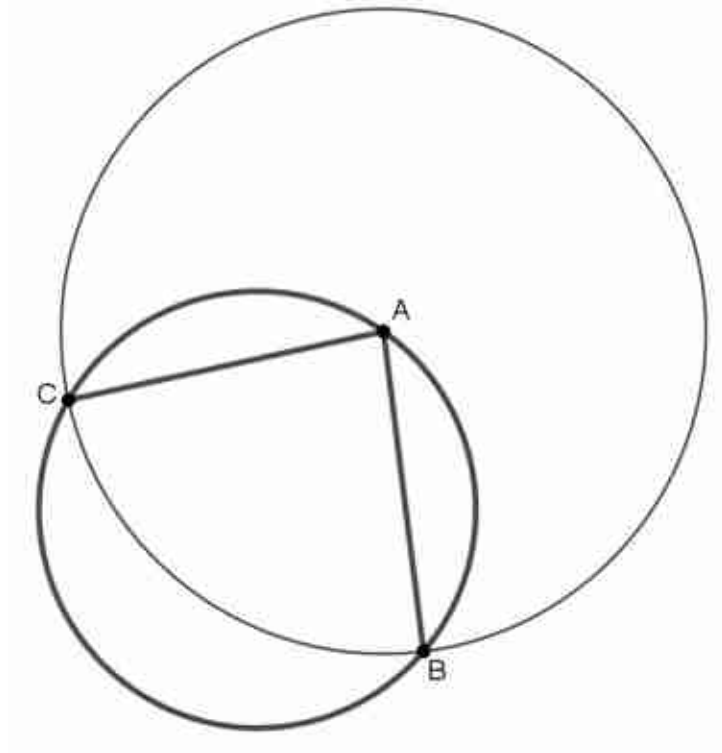
Fonte: Autor

Questão 15:

Para encontrarmos os segmentos procurados, construímos uma circunferência de centro em A e raio com medida igual ao comprimento de \overline{MN} . Os segmentos com extremidades em A e nos pontos de interseção das duas circunferências atendem o esperado.

DESCRIÇÃO:

1. Com abertura do compasso igual ao comprimento de \overline{MN} , coloque a ponta seca no ponto A e construa uma circunferência intersecando a circunferência inicial nos pontos B e C ;
2. Construa os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} , que são os segmentos procurados.

Figura 5.52: Segmentos \overline{AB} e \overline{AC} congruentes a \overline{MN} 

Fonte: Autor

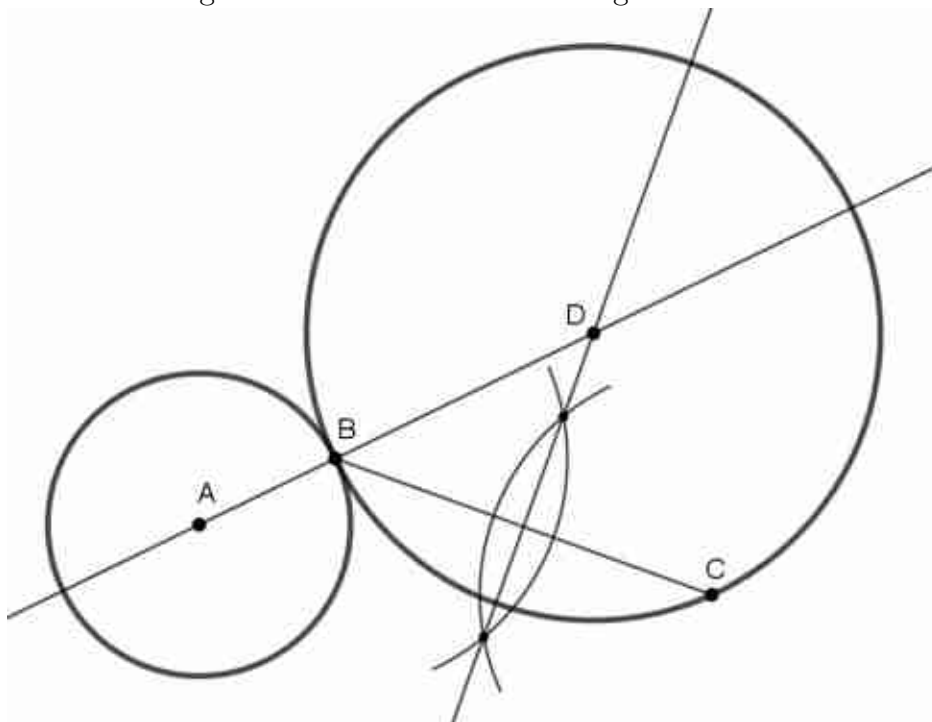
Questão 16:

Essa construção é facilmente feita traçando duas retas distintas que contenham o centro da circunferência procurada, pois este centro será o ponto de interseção das mesmas. Neste caso, podemos traçar a reta que contém o centro da circunferência conhecida e o ponto de tangência, visto que ela conterá um raio da circunferência desconhecida e contendo um raio contém o centro, e a mediatriz de \overline{BC} , pois \overline{BC} é uma corda da circunferência procurada e mediatrizes de cordas contêm o centro.

DESCRIÇÃO:

1. Trace o segmento BC e sua mediatriz (ver Seção 1.2);
2. Construa a reta AB e marque o ponto D de interseção desta com a mediatriz construída anteriormente;
3. Com a ponta seca sobre D , construa uma circunferência passando pelos pontos B e C . Esta circunferência é a procurada.

Figura 5.53: Circunferências tangentes em B



Fonte: Autor

Questão 17:

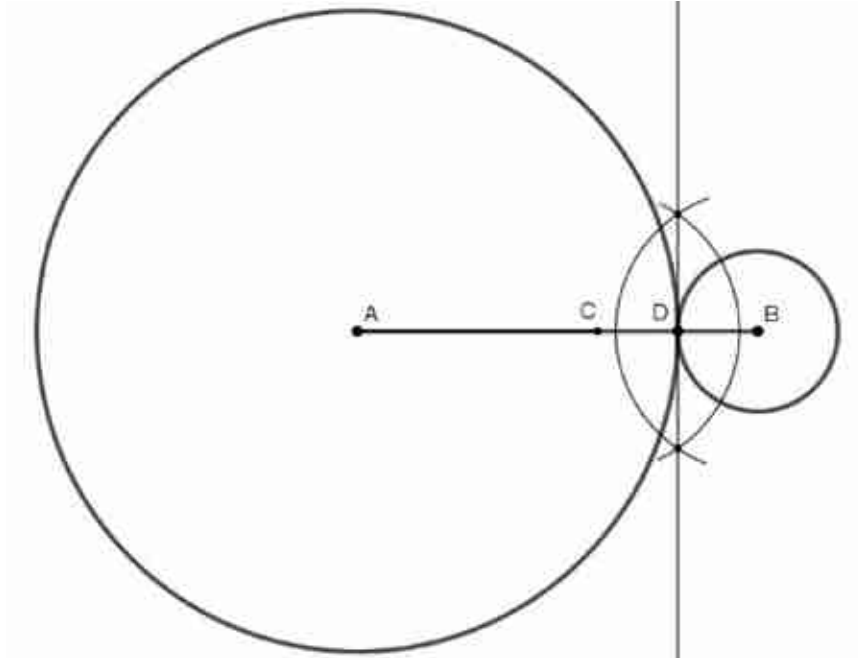
Em primeiro lugar, para que a soma dos raios das circunferências tenha a medida de \overline{PQ} , a distância entre seus centros deve ser igual à medida de \overline{PQ} , o que é resolvido traçando um segmento \overline{AB} congruente a ele e construindo as circunferências centradas nos extremos deste segmento. Agora, para que a diferença entre os raios seja igual à medida de \overline{RS} , a medida do raio maior tem que ser igual à soma da medida de \overline{RS} com a medida do raio menor. Dessa forma, devemos construir um segmento \overline{AC} congruente a \overline{RS} sobre \overline{AB} e determinar o ponto médio D do segmento \overline{CB} . Assim, tomando D como o ponto de tangência das circunferências, temos que o raio \overline{AD} tem medida igual a $\text{med}(\overline{AC}) + \text{med}(\overline{CD})$ e o raio \overline{DB} tem a mesma medida que \overline{CD} e, portanto, a diferença entre suas medidas é igual à medida de \overline{RS} .

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} , congruente a \overline{PQ} (ver Seção 1.1);
2. Marque o ponto C sobre \overline{PQ} tal que \overline{AC} seja congruente a \overline{RS} (ver Seção 1.1);
3. Determine o ponto médio D do segmento \overline{CB} (ver Seção 1.3);

4. Construa as circunferências de centros em A e B que se tangenciam em D . Elas apresentam as condições esperadas.

Figura 5.54: Circunferências tangentes externamente



Fonte: Autor

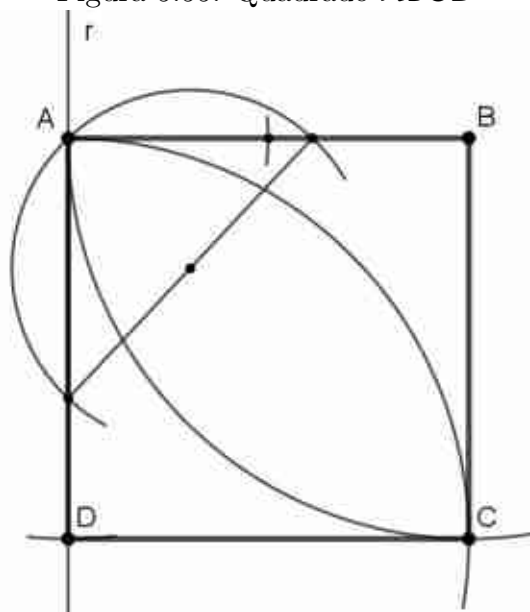
Questão 18:

Como a medida do lado de um quadrado é o dobro da medida de seu apótema, esta construção resume-se a construir um quadrado cujo lado meça o dobro de medida de \overline{PQ} .

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} com o dobro da medida de \overline{PQ} (ver solução do item a) da Questão 1);
2. Construa uma reta r , perpendicular a \overline{AB} em A (ver Seção 1.6);
3. Construa o segmento \overline{AD} , congruente a \overline{AB} sobre r (ver Seção 1.1);
4. Trace dois arcos, um centrado em B e outro em D , partindo de A e se intersectando em C ;
5. Construa os segmentos \overline{BC} e \overline{CD} . A medida do apótema do quadrado $ABCD$ é igual à medida do segmento \overline{PQ} .

Figura 5.55: Quadrado ABCD



Fonte: Autor

Questão 19:

Sejam h a altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa e a e b as projeções dos catetos sobre ela. A relação citada no enunciado nos diz que:

$$h^2 = a \cdot b, \text{ o que implica } h = \sqrt{a \cdot b}$$

Dessa forma, devemos construir um triângulo retângulo cujas projeções dos catetos meçam a e b . Para isso, devemos construir um triângulo inscrito numa semicircunferência, o que nos garantirá que ele é retângulo, cuja hipotenusa seja formada por dois segmentos consecutivos e colineares de medidas a e b . Dai, o segmento perpendicular à hipotenusa e com extremidades em um ponto da circunferência e no ponto da hipotenusa que a divide em dois segmentos de medida a e b será uma altura do triângulo e terá a medida desejada.

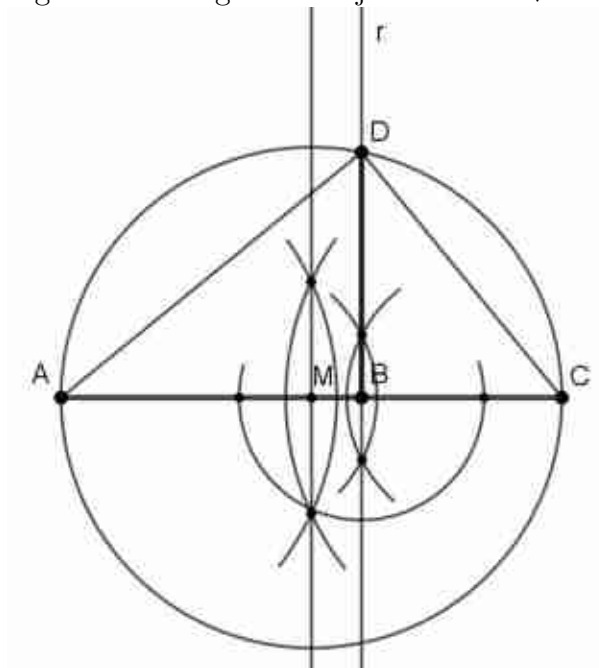
DESCRIÇÃO:

1. Trace o segmento \overline{AB} , congruente a \overline{PQ} , e o segmento \overline{BC} , congruente a \overline{RS} (ver Seção 1.1), tais que eles sejam colineares;
2. Determine o ponto médio M do segmento \overline{AC} (ver Seção 1.3);
3. Construa uma circunferência de centro em M e que passa pelos pontos A e C ;
4. Trace uma perpendicular ao segmento \overline{AC} passando pelo ponto B (ver Seção 1.5);

5. Seja D um dos pontos de interseção da perpendicular com a circunferência. O segmento \overline{BD} tem a medida desejada.

Observação: Traçamos os segmentos \overline{AD} e \overline{CD} para facilitar a visualização de que os pontos A , B e C são vértices de um triângulo inscrito numa semicircunferência e \overline{BD} é a altura relativa à hipotenusa.

Figura 5.56: Segmento cuja medida é $\sqrt{a \cdot b}$



Fonte: Autor

Questão 20:

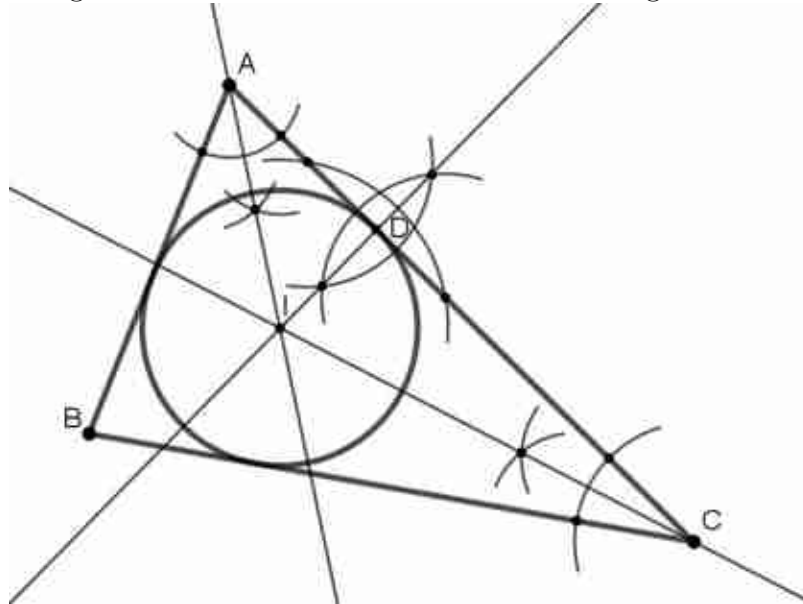
Nesta construção, devemos inicialmente determinar o incentro do triângulo, como feito na Questão 8. Em seguida, precisamos determinar o comprimento do raio da circunferência, o que pode ser feito traçando uma reta perpendicular a um dos lados passando pelo incentro, visto que o segmento com extremidades no incentro e no ponto de interseção do lado com a perpendicular será um raio.

DESCRIÇÃO:

1. Determine o incentro I do triângulo ABC (ver solução da Questão 8);
2. Trace uma reta perpendicular a um dos lados passando pelo incentro e marque o ponto D de interseção da perpendicular com o lado (ver solução da Questão 8);

3. Com a ponta seca do compasso sobre I, construa uma circunferência passando por D. Esta circunferência está inscrita no triângulo ABC.

Figura 5.57: Circunferência inscrita no triângulo ABC



Fonte: Autor

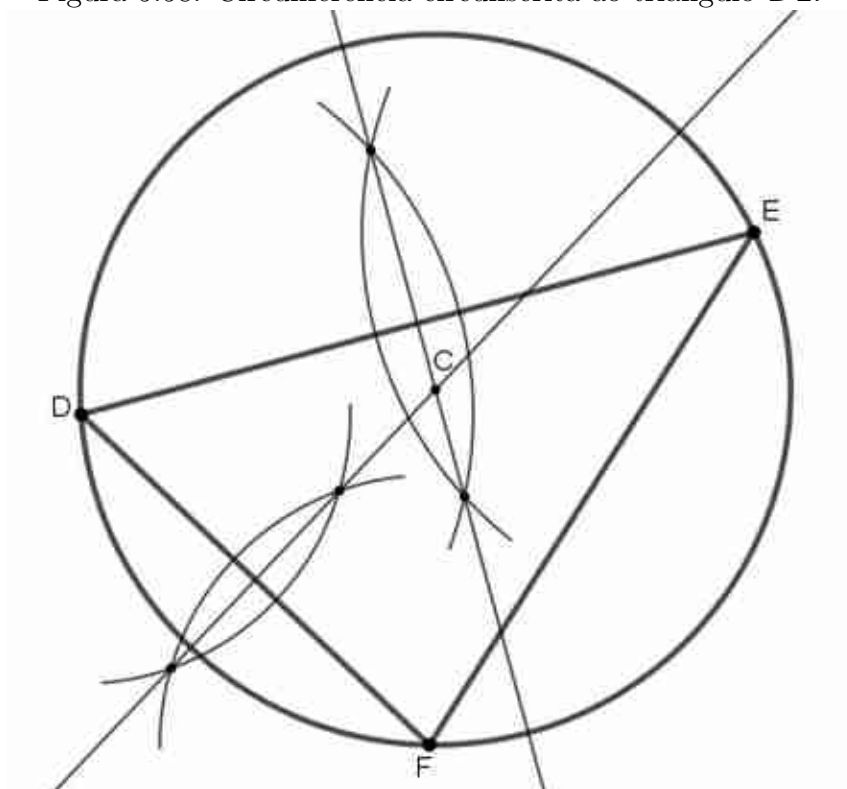
Questão 21:

Siga os passos da solução da Questão 11 para determinar o circuncentro do triângulo e em seguida construa uma circunferência com centro no circuncentro e que contenha os vértices do triângulo.

DESCRIBÇÃO:

1. Determine o circuncentro C do triângulo DEF (ver solução da Questão 11);
2. Com a ponta seca do compasso em C, construa uma circunferência passando pelos vértices do triângulo. Esta circunferência circunscreve o triângulo.

Figura 5.58: Circunferência circunscrita ao triângulo DEF



Fonte: Autor

Questão 22:

Para que a circunferência seja tangente às duas retas, seu centro deve ser equidistante das mesmas. Dessa forma, dado um segmento perpendicular às paralelas e com extremidades nas mesmas, a reta mediatriz do segmento é paralela às retas r e s e contém o centro da circunferência. Além disso, a medida do segmento em questão é igual à medida do diâmetro da circunferência, visto que ele é congruente ao diâmetro da circunferência com extremidades nos pontos de tangência com as retas. Dai, obtém-se a medida do raio e , com a ponta seca sobre o ponto A , constrói-se um arco que intersesta a paralela construída no centro da circunferência, que agora poderá ser construída.

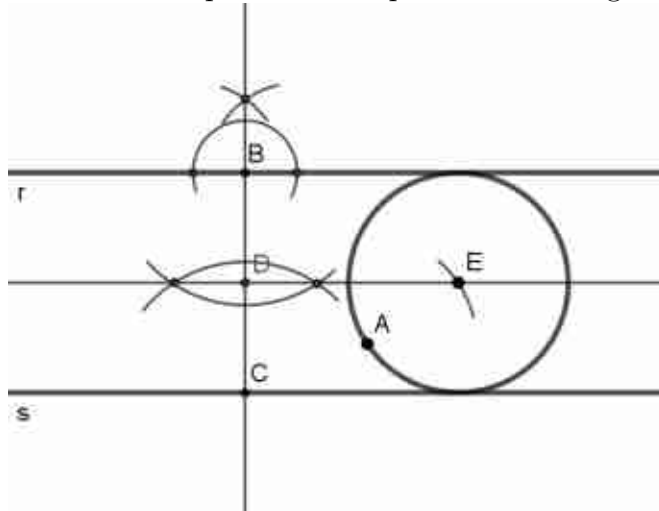
DESCRIÇÃO:

1. Trace uma reta perpendicular às paralelas intersetando-as nos pontos B e C (ver observação da Seção 1.5);
2. Construa a mediatriz do segmento \overline{BC} intersetando-o no ponto D ; (ver Seção 1.2);
3. Com a abertura do compasso igual à medida do segmento \overline{CD} , coloque a ponta seca

do compasso sobre A e marque o ponto E sobre a mediatriz;

4. Construa a circunferência com centro E , passando por A . Ela é tangente às paralelas.

Figura 5.59: Circunferência que contém o ponto A e é tangente às retas r e s



Fonte: Autor

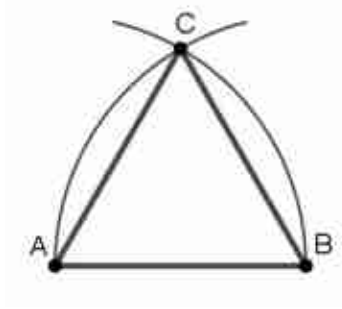
Questão 23:

- a) Repita os passos da construção de um triângulo equilátero (ver Seção 4.3).

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} , congruente a \overline{MN} (ver Seção 1.1);
2. Com a abertura do compasso igual à medida de \overline{MN} , construa dois arcos, cada um centrado em um dos extremos dos segmentos e partindo do outro extremo, intersectando-se no ponto C ;
3. Construa os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} , formando o triângulo equilátero ABC .

Figura 5.60: Triângulo equilátero ABC



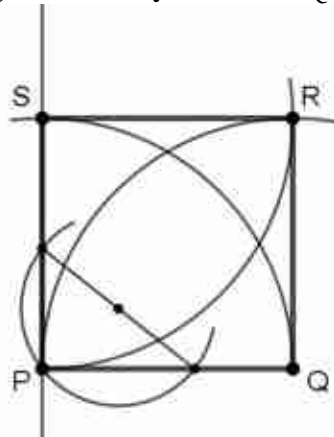
Fonte: Autor

b) Siga os passos da construção de um quadrado (ver Seção 4.4).

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{PQ} , congruente a \overline{MN} (ver Seção 1.1);
2. Construa uma reta perpendicular a \overline{PQ} em P (ver Seção 1.6);
3. Com a ponta seca do compasso sobre P, construa um arco partindo de Q e intersectando a perpendicular em S;
4. Com a ponta seca do compasso em S e depois em Q construa dois arcos partindo de P que se intersectam em R;
5. Construa os segmentos \overline{QR} e \overline{RS} , obtendo o quadrado PQRS.

Figura 5.61: Quadrado PQRS



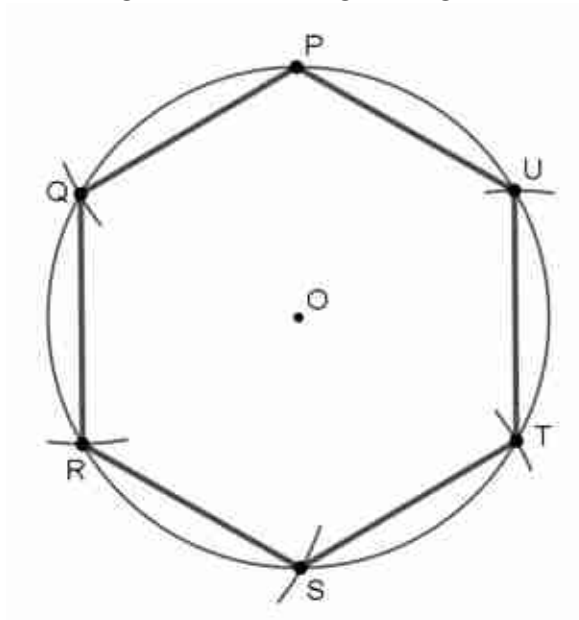
Fonte: Autor

c) Basta seguir a construção de um hexágono regular (ver Seção 4.10).

DESCRIÇÃO:

1. Construa uma circunferência de centro O com raio de medida igual ao comprimento de \overline{AB} e marque um ponto P qualquer sobre a mesma;
2. Com a abertura do compasso igual à medida de \overline{AB} , construa os pontos Q, R, S, T e U sobre a circunferência, determinando arcos congruentes;
3. Construa o hexágono $PQRSTU$.

Figura 5.62: Hexágono regular



Fonte: Autor

Questão 24:

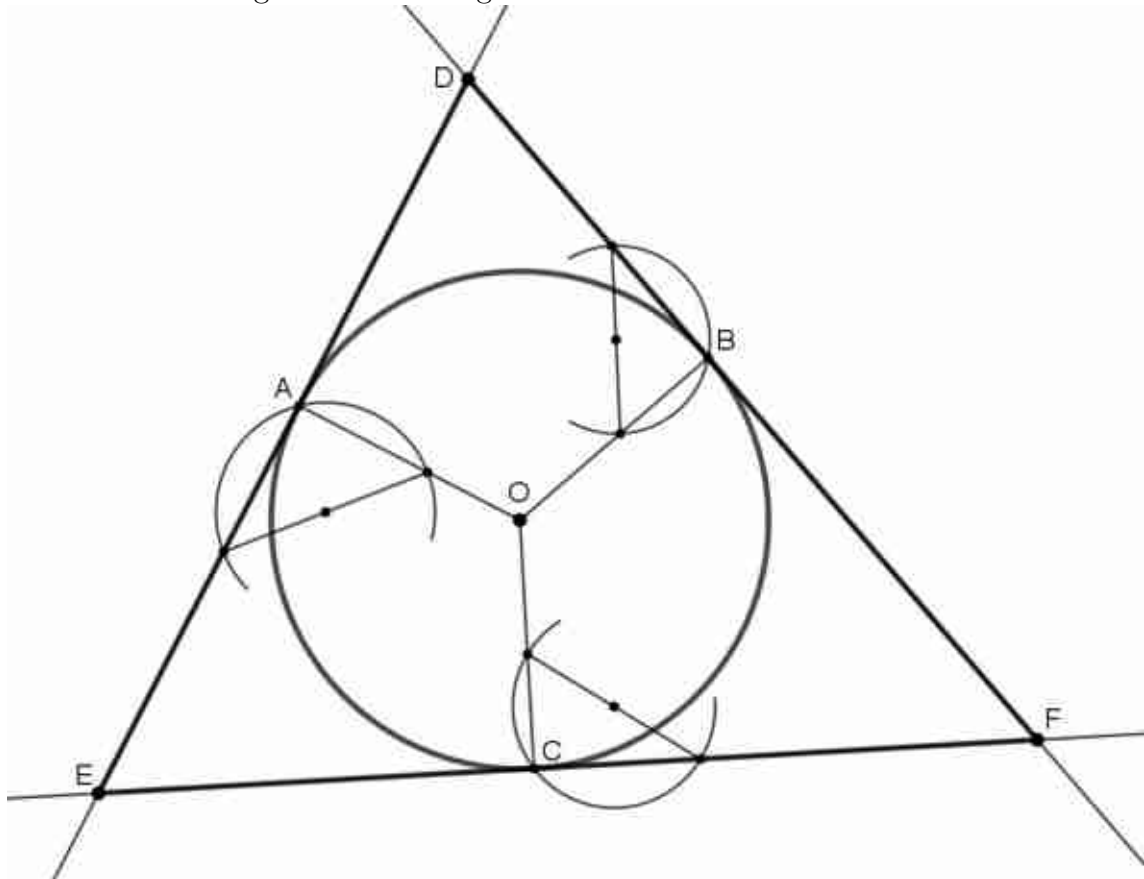
Inicialmente, escolheremos três pontos da circunferência para serem os pontos de tangência dos lados do triângulo com a mesma. Feito isso, basta traçarmos as retas tangentes à circunferência nos pontos escolhidos. O triângulo será determinado pelos pontos de interseção das retas tangentes.

DESCRIÇÃO:

1. Marque os pontos distintos A, B e C sobre a circunferência;

2. Construa as retas tangentes à circunferência que a intersecta nos pontos A, B e C (ver Seção 3.5);
3. Marque os pontos D, E e F na interseção das retas. Eles são os vértices do triângulo procurado.

Figura 5.63: Triângulo circunscrito à circunferência



Fonte: Autor

Questão 25:

Essa questão é facilmente resolvida construindo a circunferência circunscrita ao triângulo ACE e tomando os vértices deste e os pontos médios dos arcos determinados por eles como vértices do hexágono.

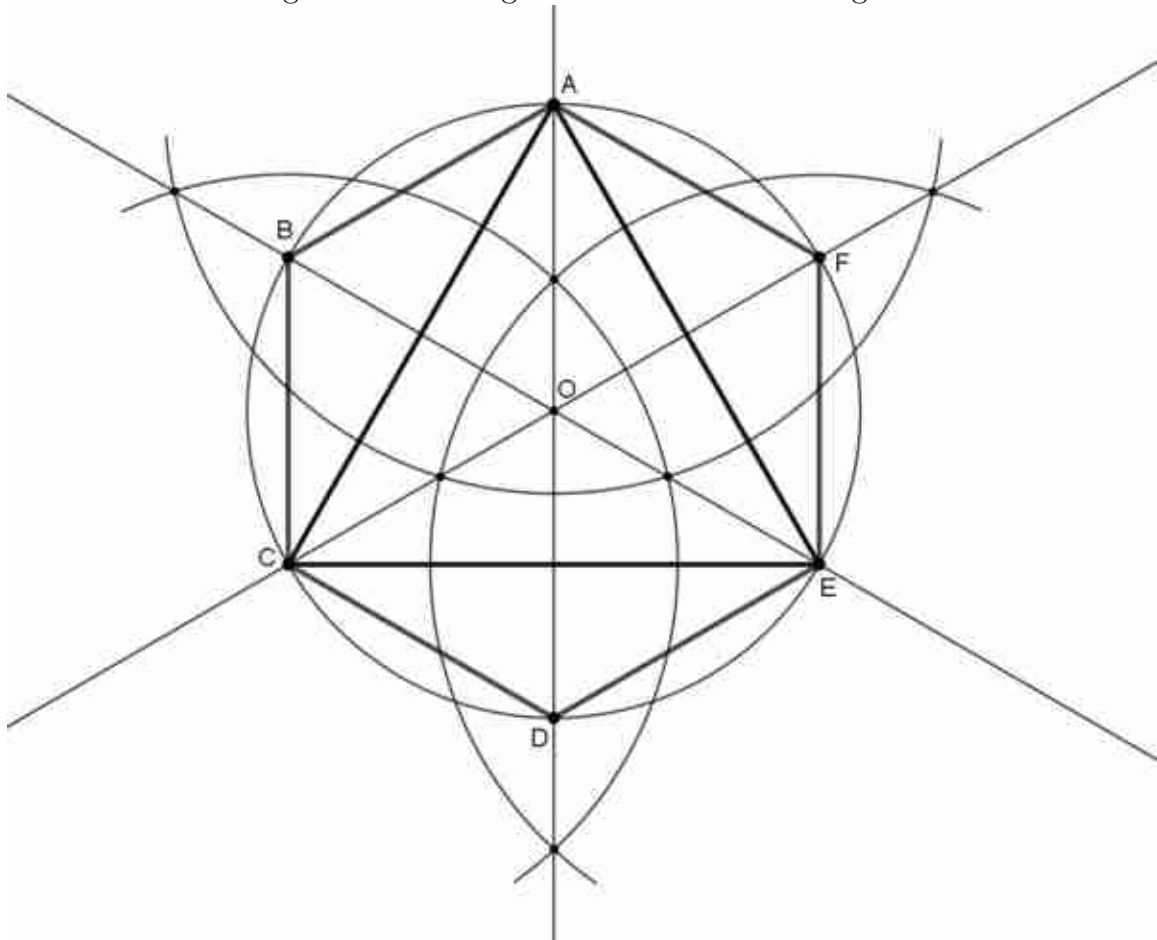
DESCRIÇÃO:

1. Trace as três mediatrizes dos lados do triângulo e marque o ponto O de interseção delas. Lembre-se que este ponto é o circuncentro do triângulo (ver solução da Questão 11);

2. Construa a circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, a circunferência com centro em O que passa pelos vértices do triângulo;
3. Marque os pontos B , D e F de interseção das mediatrizes dos segmentos \overline{AC} , \overline{CE} e \overline{EA} , respectivamente, com a circunferência;
4. Trace os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} e \overline{FA} , obtendo o hexágono $ABCDEF$.

Observação: Na solução a seguir, optamos por tomar uma abertura do compasso tal que o grafite não fique próximo do ponto médio dos lados do triângulo e traçamos os arcos para construirmos as mediatrizes com a mesma abertura, o que pode ser feito visto que o triângulo é equilátero. Dessa forma, os arcos terão partes em comum e ao invés de traçarmos seis arcos, podemos traçar apenas três. Vocês podem obter soluções um pouco diferentes, porém corretas, dependendo da abertura do compasso utilizada, de todos os arcos serem traçados com a mesma abertura e de construírem três ou seis arcos.

Figura 5.64: Hexágono circunscrito ao triângulo



Fonte: Autor

Questão 26:

Suponha que tenhamos um triângulo retângulo em que os comprimentos dos catetos sejam a e a e o da hipotenusa seja x . Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = a^2 + a^2$$

$$x^2 = 2a^2$$

$$x = a\sqrt{2}$$

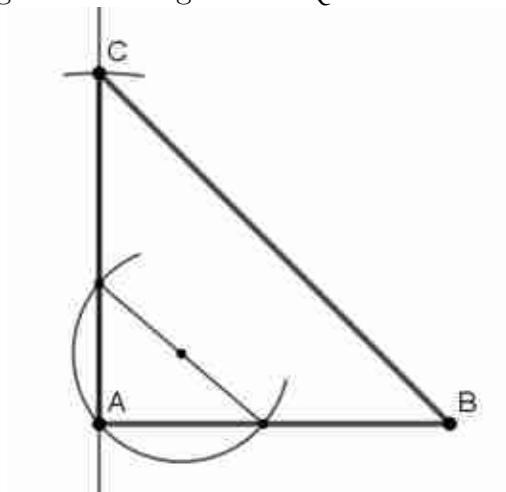
Portanto, a hipotenusa terá a medida procurada.

Agora é só construir um triângulo retângulo com catetos congruentes a \overline{PQ} que a hipotenusa será solução da construção.

DESCRIÇÃO:

1. Construa um segmento \overline{AB} , congruente a \overline{PQ} (ver Seção 1.1);
2. Trace uma reta perpendicular a \overline{AB} no ponto A (ver Seção 1.6) e sobre ela construa o segmento \overline{AC} , congruente a \overline{PQ} (ver Seção 1.1);
3. Trace o segmento \overline{BC} . Ele é hipotenusa do triângulo ABC e tem a medida esperada.

Figura 5.65: Segmento \overline{PQ} de medida $a\sqrt{2}$



Fonte: Autor

Questão 27:

Pelo teorema de Tales, sabemos que um feixe de retas paralelas determinam sobre retas concorrentes segmentos proporcionais. Dessa forma, se construirmos duas retas concorrentes tais que os segmentos determinados pelo ponto de interseção das retas e as retas

paralelas tenham medidas a , b , c e x , onde os dois primeiros segmentos pertencem à mesma reta e os últimos a outra teremos, pelo teorema de Tales que:

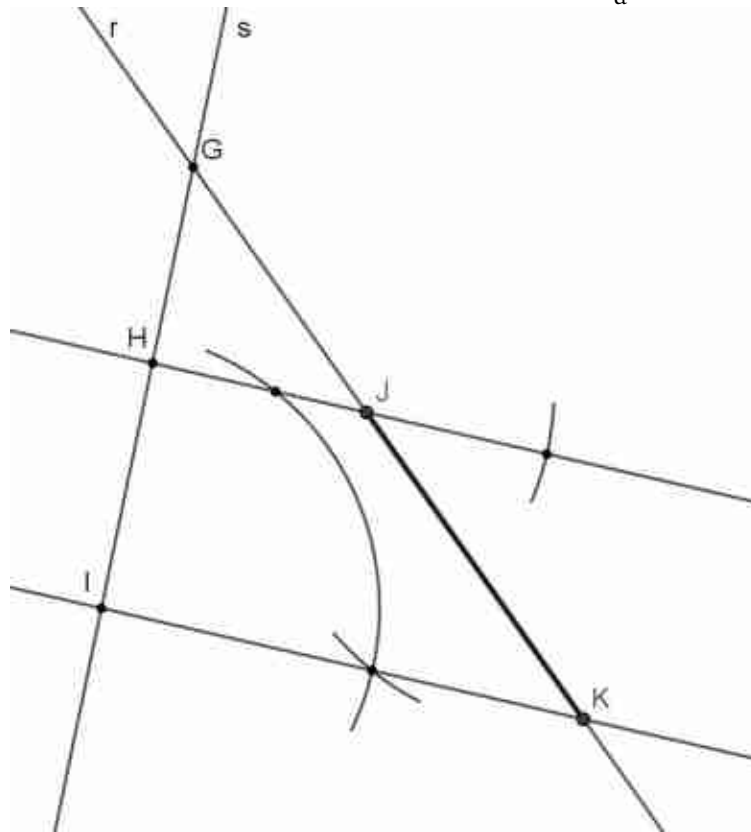
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \text{ o que implica que } x = \frac{b \cdot c}{a}$$

ou seja, o último segmento terá a medida desejada

DESCRIÇÃO:

1. Construa as retas r e s concorrentes em G ;
2. Sobre s , construa os segmentos consecutivos \overline{GH} e \overline{HI} tais que \overline{GH} seja congruente a \overline{AB} e \overline{HI} seja congruente a \overline{CD} (ver Seção 1.1);
3. Sobre r , construa o segmento \overline{GJ} congruente a \overline{EF} (ver Seção 1.1);
4. Construa a reta \overleftrightarrow{HJ} ;
5. Construa uma reta paralela a \overleftrightarrow{HJ} , passando por I , (ver Seção 1.9) e marque o ponto K de interseção desta com a reta r . Pelo teorema de Tales, o segmento \overline{JK} tem a medida procurada.

Figura 5.66: Segmento de medida $\frac{b \cdot c}{a}$



Fonte: Autor

Considerações Finais

Nesta dissertação, mostramos como as construções geométricas com régua e compasso podem ser uma ferramenta pedagógica importante para o ensino de Geometria, dadas as diversas habilidades que elas permitem trabalhar com os alunos. Além disso, o trabalho com os instrumentos promovem um momento de aprendizagem diferente, onde o aluno se torna um ser ativo, protagonista na construção de seu conhecimento, diversificando a metodologia no ensino de Matemática.

A abordagem das construções é feita pensando em reduzir as possíveis dificuldades que poderiam surgir durante a leitura, reunindo quatro elementos didáticos fundamentais: a ilustração passo a passo, a descrição, a justificativa e os exercícios com solução. Com isso, espera-se que essa dissertação possa ser usada por professores em sala de aula, mesmo sem nenhum conhecimento prévio sobre as construções, por alunos e curiosos, pois ela se apresenta de maneira compreensível pelo público a que se destina.

Diante disso, este trabalho atinge seu objetivo, fornecendo um material com muitos detalhes e de fácil entendimento sobre construções geométricas, tornando possível a sua apresentação em sala de aula e o resgate das mesmas como ferramenta pedagógica. Concluídos os estudos do material presente nessa dissertação, os alunos/leitores, poderão estudar outros materiais que o abordam, como as referências [3], [7], [8] e [9], aprofundando-se no tema.

Referências Bibliográficas

- [1] ALBRECHT, C. F; OLIVEIRA, L. B. **Desenho geométrico**. Viçosa: Ed. UFV, 2013. Disponível em: <https://www2.cead.ufv.br/serieconhecimento/wp-content/uploads/2015/06/desenho-geometrico.pdf>. Acesso em: 01 de junho de 2019.
- [2] BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] BRAGA, T. **Desenho linear geométrico**. 14. ed. São Paulo: Ícone, 1997.
- [4] BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.
- [5] MARMO, C; MARMO, N. **Construções geométricas**. Vol.1. São Paulo: Scipione, 1994.
- [6] MICELI, M. T; FERREIRA, P. **Desenho técnico básico**. Rio de Janeiro: Ed. Ao Livro Técnico, 2001.
- [7] NETO, A. C. M. **Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [8] NETTO, E. **Construções geométricas: exercícios e soluções**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [9] WAGNER, S. L. **Construções geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [10] ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. 2001. 211 p. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2001. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/handle/1843/FAEC-85DGQB>. Acesso em: 01 de Junho de 2019.