



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL**

**VANESSA ALVES DE LIMA**

**GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DA REFORMA DE FRANCISCO CAMPOS  
AO NOVO ENSINO MÉDIO**

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2019**

**VANESSA ALVES DE LIMA**

**GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DA REFORMA DE FRANCISCO  
CAMPOS AO NOVO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientadora: Professora. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa

JUAZEIRO DO NORTE

2019



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

---

## Geometria na Educação Básica: da Reforma de Francisco Campos ao Novo Ensino Médio

***VANESSA ALVES DE LIMA***

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 10 de julho de 2019.

### Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Silvana Alcântara Costa  
Orientadora

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade  
UFCA

Érica Boizan Batista

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Érica Boizan Batista  
UFCA

Dedico este trabalho ao meu Tio Raimundo Florêncio (in memoriam) e a meu esposo Franco Tardelio.

# Agradecimentos

À Deus pela dádiva da Vida.

À meu esposo Franco Tardelio pelo amor e dedicação. Por me proporcionar a realização de sonhos, que antes, pareciam impossíveis. Pelo abraço que foi capaz de curar as feridas mais profundas.

À minha Mãe Francimar e Meu pai José Dilson pelo exemplo de honestidade e humildade.

À minha família Danilo, Rosemeire, Erich, Raquel, Júlia e Gabriel que nos momentos mais difíceis foram meu alicerce.

À todos que fazem parte do Colégio Estadual Celso Araújo e EEEP Francisca de Albuquerque Moura pela compreensão e apoio.

À Professora e orientadora Professora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa pelo exemplo de uma profissional admirável e por toda dedicação para realização deste trabalho.

À todos os professores e colegas do PROFMAT que contribuíram para esta etapa da minha formação.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade de cursar o PROFMAT.

À CAPES pelo suporte financeiro.

*"Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe Geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial".*

Blaise Pascal

## Resumo

Neste trabalho apresentamos um breve relato das principais reformas educacionais desde o Brasil Colônia até os dias atuais, relacionando as mudanças propostas com a conjuntura histórica do período. Apresentamos as modificações no Ensino da Geometria, comparando os currículos propostos na Reforma Francisco Campos e Gustavo Capanema, passando pelas modificações com a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais e analisando a proposta da Base Nacional Comum Curricular e do Novo Ensino Médio. Mostramos o impacto das reformas na construção do currículo e na metodologia do ensino-aprendizagem da Geometria por meio da exploração das questões propostas em cada período estudado. Em seguida, expomos sugestões metodológicas com auxílio de *softwares* (Poly Pro, GeoGebra e Cinderella) e material concreto (Geolig) que contribuem para o Ensino de Geometria na perspectiva proposta pela BNCC do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Ensino da Geometria, Base Nacional Comum Curricular, Geometria Dinâmica, PCN's.

## **Abstract**

In this paper we present a brief account of the main educational reforms from Colonial Brazil to the present day, relating the proposed changes with the historical conjuncture of the period. We present the modifications in the Geometry Teaching, comparing the proposed curricula in the Francisco Campos and Gustavo Capanema Reform, passing the modifications with the implementation of the National Curriculum Parameters and analyzing the proposal of the Common National Curriculum Base and the New High School. We show the impact of the reforms in the construction of the curriculum and the methodology of teaching - learning of geometry through the exploration of the proposed questions in each studied period. Then, we present methodological suggestions with the help of (Poly Pro, GeoGebra and Cinderella) and concrete material (Geolig) that contribute to the teaching of geometry from the perspective proposed by BNCC High School

**Keywords:** Geometry Teaching, National Common Curricular Base, Dynamic Geometry, PCN's.



## Lista de Figuras

1	Análise das Reformas no Ensino Médio . . . . .	29
2	Vestibular Unificado UFPB 1993 - Questão 8 . . . . .	44
3	Exame Nacional do Ensino Médio 2013 . . . . .	48
4	Resultado de Matemática do SAEB 2017 . . . . .	53
5	Currículo de Geometria nas Reformas do Ensino Médio . . . . .	58
6	Interface Poly Pro 1.2 . . . . .	61
7	Figura 4: Planificação do Octaedro . . . . .	62
8	Figura 5: Animação da transição do dodecaedro no modelo 2D para 3D. . . . .	63
9	Poly Pro: Animação do Cubo 2D para 3D . . . . .	64
10	Poly Pro: Tetraedro . . . . .	65
11	Poly Pro: Octaedro . . . . .	65
12	Poly Pro: Animação do Icosaedro do Modelo 2D para 3D . . . . .	66
13	Poly Pro: Dodecaedro . . . . .	66
14	Poly Pro: Icosaedro Truncado . . . . .	69
15	Poly Pro: Planificação do Icosaedro Truncado . . . . .	69
16	Poly Pro: Icosidodecaedro Snub . . . . .	70
17	Poly Pro: Planificação do Icosidodecaedro Snub . . . . .	70
18	Peças do Kit Geolig 230 peças. . . . .	71
19	Geolig: Triângulos Isósceles . . . . .	73
20	Geolig: Triângulos Equiláteros . . . . .	73
21	Geolig: Pentágono Regular . . . . .	75
22	Geolig: Hexágono Regular . . . . .	75
23	Geolig: Partição do Pentágono Regular . . . . .	77
24	Geolig: Partição do Hexágono . . . . .	78
25	Tetraedro Regular . . . . .	79
26	Geolig: Octaedro Regular . . . . .	80
27	Geolig: Icosaedro Regular . . . . .	81
28	Poliedro Não Convexo . . . . .	81
29	Interface GeoGebra . . . . .	83
30	Ambiente GeoGebra Janela 3D . . . . .	84
31	Configuração do Controle Deslizante . . . . .	85
32	Construção de Círculo de raio $r$ e centro na origem . . . . .	86
33	Construção de Cilindro . . . . .	87

34	Cilindro Reto de $r=h=4$ . . . . .	87
35	Dodecaedro . . . . .	88
36	Planificação do Dodecaedro . . . . .	89
37	Interface do Cinderella . . . . .	90
38	Elipse . . . . .	91
39	Cinderella: Construção de Cônicas - Elipse . . . . .	92
40	Cinderella: Elipse . . . . .	92
41	Elementos da Elipse . . . . .	93
42	Hipérbole . . . . .	94
43	Cinderella: Construção de Cônicas - Hipérbole . . . . .	95
44	Cinderella: Hipérbole . . . . .	95
45	Elementos da Hipérbole . . . . .	96
46	Parábola . . . . .	97
47	Cinderella: Construção de Cônicas - Parábola . . . . .	98
48	Cinderella: Parábola . . . . .	98
49	Elementos da Parábola . . . . .	99

## Lista de Tabelas

1	Distribuição da Disciplina de Matemática . . . . .	35
2	Características dos Sólidos de Platão - Aluno . . . . .	67
3	Características dos Sólidos de Platão . . . . .	67

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>As Principais Reformas Educacionais do Brasil</b>	<b>14</b>
2.1	Educação do Brasil Colônia ao Fim do Império . . . . .	14
2.2	Reforma do Ensino Secundário . . . . .	16
2.3	Lei de Diretrizes e Base da Educação . . . . .	18
2.4	Educação para Todos - Os Parâmetros Curriculares Nacionais . . . . .	21
2.5	O Novo Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular . . . . .	24
2.6	O Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Ensino de Geometria no Brasil</b>	<b>32</b>
3.1	Matemática e Geometria na Reforma do Ensino Secundário . . . . .	32
3.2	A Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais . . . . .	43
3.3	Aprendizagem de Geometria pela Análise do SAEB . . . . .	50
3.4	Geometria no Novo Ensino Médio e Base Nacional Comum Curricular . . . . .	54
3.5	Comparando os Currículos de Geometria nas Reformas . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Sugestões Metodológicas para o Ensino de Geometria</b>	<b>60</b>
4.1	Geometria Espacial com Poly Pro . . . . .	60
4.2	O Geolig como Recurso de Aprendizagem de Geometria . . . . .	71
4.3	O GeoGebra no Ensino de Geometria . . . . .	82
4.4	O Cinderella no Ensino de Geometria . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>100</b>
<b>6</b>	<b>Apêndices</b>	<b>106</b>
6.1	Planificação do Cubo . . . . .	107
6.2	Planificação do Tetraedro . . . . .	108
6.3	Planificação do Dodecaedro . . . . .	109
6.4	Planificação do Octaedro . . . . .	110
6.5	Planificação do Icosaedro . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Anexos</b>	<b>112</b>
7.1	Programa Curricular de Matemática do Curso Fundamental da Reforma Francisco Campos . . . . .	112

# 1 Introdução

A origem da Geometria está intimamente associada a própria existência humana. Ela relaciona-se inicialmente as necessidades de medições, para divisões de terras e confecções de utensílios, por exemplo. Este fato é facilmente verificado ao analisar registros das primeiras unidades de medidas: polegada, braça, pé, bem como a própria etimologia da palavra. De origem grega, Geometria, significa "Medição da Terra".

Apesar do historiador grego Heródoto escrever que a Geometria nasceu no antigo Egito, os registros mais antigos de atividades humanas no campo da Geometria de que dispomos remontam à época dos babilônios há talvez cerca de cinco mil anos e foram aparentemente motivadas por problemas práticos de agrimensura.([25], p.1)

Diversos povos antigos já deixaram registros de utilização de Geometria, como os hindus, chineses, egípcios e babilônios. Porém o marco para construção do conhecimento geométrico está registrado na Grécia antiga com a consolidação do pensamento dedutivo. Tales de Mileto juntamente com Pitágoras, conseguiram registrar os conhecimentos das civilizações anteriores e aplicá-los nos mais diversos campos em prol da evolução humana. Construções arquitetônicas, navegações, estudos relacionados às artes são exemplos de aplicações desta ciência na antiguidade. O desenvolvimento da Geometria se disseminou rapidamente com o surgimento das escolas pitagóricas e a importância dos estudos gregos nesta área do conhecimento é evidente como salienta Michel Serrs em [37].

No mundo e através da história, todas as culturas, em maior ou menor grau, fizeram contas, conheceram alguns números, observaram o movimento do céu, seguiram um calendário, tentaram tratar doenças. Mas só uma cultura inventou a representação de forma como quadrado, o círculo, a esfera... e conseguiu discorrer sobre elas com rigor. Mas então onde e quando é que surgiu esta Geometria? Na Grécia, exatamente há vinte e seis séculos.(p.3)

Esta soberania grega é ratificada com *Os Elementos de Euclides*. Publicado pelo pai da Geometria, Euclides, traz nesta obra, composta por 13 volumes, diversos temas da Matemática e um conjunto de axiomas em qual se baseia para construção do que chamamos de Geometria Euclidiana. Mais do que um compêndio do conhecimento matemático da época, a obra apresentava cada tópico com estrutura e rigor matemático, que são utilizados até hoje. A evolução da Geometria continua ligada à necessidade humana, o estudo de Geometrias

não Euclidianas e Geometria Diferencial, são exemplos de sua constante adaptação como instrumento para construção de nossa história.

Em virtude do exposto, é natural que a Geometria seja inserida no âmbito escolar de todos os níveis de ensino, como forma de continuidade deste desenvolvimento. Neste trabalho nos propomos a analisar o Ensino de Geometria no âmbito escolar brasileiro com foco em compreender as mudanças oriundas das principais reformas educacionais no currículo de Geometria como elemento primordial para construção da nova perspectiva de aprendizagem proposta pela Base Nacional Comum Curricular. No primeiro capítulo, registramos um breve relato das principais reformas educacionais, do que hoje, chamamos de Ensino Médio procurando evidenciar os aspectos históricos destas mudanças e seus impactos para construção da sociedade. Nos permitimos omitir alguns fatos históricos na busca de realizar um recorte com direcionamento nas mudanças pertinentes ao Ensino da Matemática. Ainda neste capítulo, realizamos uma breve exposição sobre Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB.

O início do segundo capítulo traz uma investigação sobre a composição do currículo de Geometria proposto pelo ministro da época Francisco Campos e do papel atuante de Euclides Roxo diretor do Colégio Pedro II, nestas mudanças, ressaltando a influência do Movimento Matemática Moderna, iniciado na Europa. Depois propomos uma análise da continuidade e alterações desta reforma sob a gestão de Gustavo Capanema. Após o estudo desta reforma apresentamos as alterações com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, corroborando com as mudanças apresentadas no capítulo anterior, evidenciamos às novas nuances propostas para o Ensino de Geometria, e como esta se entrelaça às demais disciplinas diante da proposta interdisciplinar e do Exame Nacional do Ensino Médio. Para finalizar este capítulo refletimos sobre a Base Nacional Comum Curricular, aprovada em 2018, que passa a vigorar nas escolas brasileiras a partir de 2020 de forma amostral e será implementada integralmente em 2021. A BNCC não tem como objetivo delimitar um currículo, mas objetiva em sua caracterização mudanças relativas a metodologia de ensino por meio de competências e habilidades que tenham impacto direto na construção social.

Por fim, no último capítulo deste trabalho, apresentamos algumas sugestões de metodologias para o Ensino de Geometria que corroborem com a proposta da BNCC do Ensino Médio, oferecendo propostas de *softwares* e materiais de fácil acesso que possibilitam a realização de atividades que estimulem o desenvolvimento do protagonismo na aprendizagem e uma construção significativa dos conceitos estudados.

## 2 As Principais Reformas Educacionais do Brasil

As mudanças nas Políticas Educacionais são reflexos do momento histórico e dos anseios da sociedade de cada período. Cada etapa vivenciada desde o descobrimento do Brasil deixa registrada na educação indícios desses objetivos. Sob esta perspectiva o presente capítulo apresenta de forma geral as principais modificações no processo educacional brasileiro no que hoje consideramos como etapa final da Educação Básica.

Nosso relato incia-se com uma análise da educação no Brasil colônia e no período imperial, apresentando a construção histórica que culminou para a primeira organização do Ensino Secundário, realizada por meio das reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema. Prossegue-se apresentando as principais mudanças ocasionadas com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais até compreender a proposta aprovada de implementação do Novo Ensino Médio e Base Nacional Comum Curricular. O relato visa apresentar as alterações gerais, relacionado-as com o momento histórico vivenciado fornecendo subsídios para compreensão das alterações curriculares apresentadas nos capítulos a seguir.

### 2.1 Educação do Brasil Colônia ao Fim do Império

Depois de quase 50 anos do descobrimento do Brasil, os portugueses enviaram os jesuítas liderados pelo Padre Manuel de Nóbrega, à nova colônia, para catequizar e “escolarizar” os nativos. A necessidade de ensinar a fé católica aos índios e estabelecer um convívio amistoso entre colonos e colonizadores, foi a mola propulsora para o início da educação escolar. O foco deste “modelo educacional” era o ensino da leitura e escrita. Posteriormente foram oferecidos cursos de Letras e Filosofia, como continuidade da primeira etapa e o curso de Teologia para os interessados na carreira eclesiástica.

A metodologia adotada pelos jesuítas era baseada no *Ration Studiorum*, ou Plano de Estudo, que se configurava como um estatuto pedagógico. A educação almejada pelo *Ration* tinha como objetivo o desenvolvimento do homem perfeito, do bom cristão, e era centrada em um currículo de educação literária e humanista voltada para a elite colonial. Durante os anos de prevalência da educação jesuíta não ocorreram grandes avanços na organização educacional brasileira e apesar da criação de alguns colégios, o que prevalecia de fato era o interesse do colonizador em explorar as riquezas e posteriormente transformar o Brasil em sede do governo português, devido à iminente invasão francesa.

A necessidade de melhorar o treinamento militar na colônia, principalmente o trabalho dos soldados nas fortificações, impulsionou a criação, em 1699, da aula de fortificações.

O curso foi implementado 11 anos após seu surgimento, devido a falta de professores e material didático. Em 1759 ocorreu o rompimento da Coroa Portuguesa com a educação da Companhia de Jesus. O interesse passou a ser a organização da colônia para servir aos anseios do Estado. Esse momento é conhecido na história como Reforma Pombalina, pois foi desenvolvida pelo primeiro ministro de Portugal, José de Carvalho Melo, Marquês de Pombal.

Com a vinda da família real portuguesa em 1808 para a Colônia, o interesse na educação é direcionado à preparação da elite que assumiria a direção política e econômica do Brasil. Mesmo diante da independência do Brasil e publicação da Constituição de 1824, que instituiu a gratuidade do Ensino Primário em seu artigo 179, nenhuma mudança significativa ocorreu na educação brasileira. O ensino baseava-se no *Método Lancaster*, que consistia em um ambiente definido que atendia cerca de 100 alunos sendo que, nesse espaço só havia um professor e esse, por sua vez, escolhia um aluno, o mais adiantado, que deveria ensinar 10 outros. O decurião, como era conhecido o aluno escolhido, assumia a função de monitor da disciplina.

Em meados de 1835, na tentativa de condensar as diversas aulas avulsas e fornecer um ensino que se distanciasse do Método Lancaster, são criados os liceus, que tinham como objetivo principal a preparação para os exames de admissão dos cursos superiores. Apesar da intenção de organizar as aulas avulsas ministradas para os exames de admissão, os liceus ainda não possuíam nenhuma estrutura de organização curricular que fosse adotada em nível nacional.

Na tentativa de criar esse modelo, em 1837, o Seminário de São Joaquim é transformado em Colégio Pedro II, iniciando-se efetivas mudanças no Ensino Secundário, pois o colégio, influenciado pelos padrões europeus, é pioneiro na estruturação desta etapa do ensino, por meio da seriação. A criação do Colégio Pedro II deveria servir de modelo para organização dos demais colégios que ofereciam a educação secundarista, pois o mesmo, conferia ao aluno que concluísse esse nível de ensino o título de Bacharel em Letras e o acesso ao Ensino Superior sem a necessidade de realização dos exames de admissão.

A organização do colégio opunha-se ao modelo adotado pelos liceus, de aulas avulsas e preparatórias para os exames de ingresso na universidade. Haidar em ([26], p.93), descreve que as características do Ensino Secundário anterior à criação do Colégio Pedro II se destacavam por aulas esparsas, definidas a critério do corpo docente, que agia de forma isolada, não sistematizada, e isenta de inspeção séria.

De fato, não se pode falar de uma organização educacional neste período, apesar da preocupação afirmada na Constituição com o ensino, a presença do estado na regulamen-



tação de políticas públicas era imperceptível. O governo transferiu para as províncias a responsabilidade direta pelo Ensino Primário e Secundário, através das leis e decretos que vão sendo criados e aprovados, sem que sejam aplicados e fiscalizados.

Mesmo diante das mudanças propostas pelas transformações políticas ocorridas no Brasil, desde os jesuítas até o final da década de 20, o modelo educacional não ocorria de forma unificada no território brasileiro. A dinâmica política mundial e o trilhar histórico do Brasil apontavam para a urgente estruturação da educação, prioritariamente para o Ensino Secundário na perspectiva de romper com o modelo secular.

## 2.2 Reforma do Ensino Secundário

A herança deixada pelo modelo educacional proposto no Brasil império, não se adequava às necessidades advindas dos ideais republicanos de uma educação que corroborasse com a proposta democrática e popular. A tendência liberal defendia a educação da grande massa como forma de alavancar o progresso da nova nação. Contudo esses ideais influenciados pelas revoluções ocorridas na Europa não encontraram consonância com o modelo coronelista, vigente no Brasil conhecido como política café-com-leite, refletindo a frustração deste momento histórico. A revolução de 30 se inicia pondo fim a política café-com-leite, que consistia na alternância do poder entre as oligarquias dos estados de Minas Gerais e São Paulo. Em Março de 1930, Júlio Prestes ganhou a eleição presidencial e a oposição acusou fraude eleitoral. A partir daí, conspirações ganharam força, principalmente com a influência do movimento tenentista que culminaram com a tomada do poder por Getúlio Vargas.

Na década de 1930, durante o governo de Getúlio Vargas, foi criado o Ministério da Educação e Saúde Pública que teve como primeiro Ministro, o mineiro, Francisco Campos. Diante das mudanças apresentadas pelo novo regime e da revolução industrial que se iniciava no Brasil, Campos acreditava que o Ensino Secundarista deveria capacitar jovens para o desenvolvimento de profissões e não simplesmente para o ingresso no Ensino Superior.

A finalidade do Ensino Secundário é de fato mais ampla do que a que se costuma atribuir-lhe. Via de regra, o Ensino Secundário tem sido considerado entre nós como um simples instrumento de preparação dos candidatos ao Ensino Superior, desprezando-se, assim, a sua função eminentemente educativa que consiste, precisamente, no desenvolvimento das faculdades de apreciação, de juízo, de critério, essenciais a todos os ramos da atividade humana, e, particularmente, no treino da inteligência em colocar os problemas nos seus termos exatos e

procurar as suas soluções adequadas ([15], p.5).

A reforma Francisco Campos instituída pelo Decreto de nº 19.890, de 18 de abril de 1931, foi a primeira organização do Ensino Secundarista a nível nacional. Dentre suas principais modificações destaca-se a organização desta etapa do ensino em dois ciclos: Fundamental com duração de 5 anos e complementar realizado em 2 anos. A segunda etapa do Ensino Secundário, chamada de complementar tinha carácter preparativo para os cursos superiores de Direito, Medicina e Engenharia. Além da seriação, a lei estipulava a obrigatoriedade da presença em pelo menos três quartos da carga horária prevista, antes da realização dos exames finais.

A reforma instituída pelo então ministro da Educação e Saúde Pública, Francisco Campos, além da organização estrutural do ensino, regulamentou no artigo 35 do Decreto de nº 19.890, o sistema de avaliação do Ensino Secundário.

Mensalmente, a partir de abril, deverá ser atribuída a cada aluno e em cada disciplina pelo respectivo professor, pelo menos uma nota relativa a arguição oral ou trabalhos práticos.([7], p.4).

No que se refere ao currículo escolar, a reforma Campos, aplicou o modelo adotado no Colégio Pedro II aos demais estabelecimentos de Ensino Secundário do país. Desta forma o aluno na primeira etapa, curso fundamental, estudaria as disciplinas de Português, Matemática, História da Civilização, Geografia e Desenho Técnico em todos os 5 anos e em pelo menos 3 anos Física, Química e Biologia. O estudo das línguas estrangeiras (inglês, alemão e latim) estavam distribuídas de forma tímida durante o curso com destaque para o Francês oferecido em quatro dos cinco anos de duração desta etapa.

A regulamentação do Ensino Secundário prevista na reforma de Campos, abrangeu os diversos aspectos do processo e estruturação do ensino no país, pois estipulava a nível nacional, quais saberes escolarizados deveriam ser repassados à todos os alunos secundaristas antes da realização dos exames de admissão para o Ensino Superior, por meio da organização das estruturas, dos currículos, da avaliação e até mesmo da regulamentação do processo de inspeção nesta etapa de ensino. Desta forma, considera-se a Reforma Francisco Campos como a primeira organização administrativa e didático-pedagógica do Ensino Secundário no país.

É importante ressaltar que o aumento significativo da duração do Ensino Secundário conferiu a esta etapa um carácter elitista como salientado em ([32], p.23).

A Reforma Francisco Campos modificava a educação para a elite, que, naquela conjuntura da vida brasileira, podia dar-se ao luxo de levar cinco anos formando sólida cultura geral.

Dando continuidade às alterações iniciadas por Francisco Campos, Gustavo Capanema, Ministro da Educação e Saúde Pública de 1934 -1945, organizou e implementou a Reforma do Ensino Secundário. A Reforma Capanema, ou Lei Orgânica do Ensino Secundário, promulgada em abril de 1942 dividia o mesmo em duas etapas: Ginásial com duração de 4 anos; Colegial com duração de 3 anos, sendo subdivida em Clássico ou Científico. Este momento também é marcado pelo acirrado debate proporcionado pela publicação do Manifesto dos Pioneiros da Educação, que defendia uma educação laica e para todos, e o grupo católico que pretendia manter no currículo o Ensino Religioso.

O Brasil vivenciou, de 1937 à 1945, um período de grande instabilidade política sob regime de um governo totalitário, instituído por Getúlio Vargas. O momento se configurou como um reflexo das disputas ideológicas geradas na Europa por regimes totalitários como o fascismo na Itália e o nazismo na Alemanha. A reforma Capanema foi amplamente criticada pelos educadores da época, pois era visivelmente influenciada pelo ambiente gerado pela Segunda Guerra Mundial e pelo regime totalitário Varguista. Um exemplo evidente desta imposição está no capítulo V, Artigo 20 do Decreto de Lei de número 4244 de 9 de abril de 1942, que instituiu a obrigatoriedade do Ensino Militar.

Art. 20 A educação militar será dada aos alunos do sexo masculino dos estabelecimentos de Ensino Secundário, ressalvados os casos de incapacidade física. Dar-se-á aos menores de dezesseis anos a instrução premilitar, e a instrução militar aos que tiverem completado essa idade.[8]

As reformas Francisco Campos e Capanema, principalmente a última, apesar de trazer muitos avanços para a regulamentação do Ensino Secundário, contribuiu de maneira significativa para manutenção da elitização do Ensino Superior, pois com o surgimento do SENAI e SENAC a classe trabalhadora era direcionada ao Ensino Profissionalizante, como preparação de mão de obra.

### 2.3 Lei de Diretrizes e Base da Educação

Seguindo a mesma orientação da Reforma do Ensino Secundário de Gustavo Capanema, foi promulgada em 2 de janeiro de 1946 a Lei Orgânica do Ensino Normal. O Decreto de

Lei de nº 8.530 que organizava o curso normal, em simetria com os demais cursos de nível secundário, dividindo esta modalidade de ensino em dois ciclos: o primeiro correspondia ao ciclo ginasial do curso secundário e tinha duração de quatro anos. Seu objetivo era formar regentes do Ensino Primário e funcionária em Escolas Normais regionais. O segundo ciclo, com a duração de três anos, correspondia ao ciclo colegial do curso secundário. Seu objetivo era formar os professores do Ensino Primário e funcionária em Escolas Normais e nos institutos de educação.

No mesmo ano, foi promulgada a Constituição de 1946 que em seu artigo 5º, item XV, letra d, determinava que era competência da União legislar sobre Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Apesar disto, somente em 20 de dezembro de 1961 ocorreu a publicação da Lei nº 4.024, que fixava as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Dentre os principais aspectos normatizados pela LDB de 1961 [13], destacamos:

- Organização da Educação em duas etapas: Educação de Grau Primário (Ensino Pré-Primário e Ensino Primário) e Educação de Grau Médio (Ensino Médio).
- Art. 34 o Ensino Médio será ministrado em dois ciclos, o ginasial e o colegial, e abrangerá, entre outros, os cursos secundários, técnicos e de formação de professores para o Ensino Primário e Pré-Primário
- Art.92 que garante o empenho de 12% do orçamento da União e 20% dos Municípios com a Educação.
- Art.31 que trata da obrigatoriedade de matrícula nos quatro anos do Ensino Primário.
- Art. 52 e 53 que normatiza a formação do professor para o Ensino Primário no Ensino Normal de grau ginasial ou colegial.
- Art.59 que trata da formação do professor para o Ensino Médio nos cursos de nível superior.

Esta nova legislação não trouxe grandes alterações no que se refere ao currículo de Geometria, porém é um marco importante para o Ensino Brasileiro, ao passo que mudou a estrutura curricular do Ensino Secundário ao transformar em disciplinas optativas o estudo de latim, grego, francês, espanhol, filosofia e canto orfeônico.

Devido ao período de instabilidade política instituído pelo golpe militar de 1964, mudanças na legislação educacional brasileira seriam realizadas, como forma de se adequar ao novo regime. Nesta perspectiva o debate iniciado neste período culmina na publicação da Lei

de Diretrizes e Bases da Educação de 1971. Dentre as principais características de [2], destacamos:

- Art.4 prevê um núcleo comum para o currículo de 1º e 2º grau e uma parte diversificada em função das peculiaridades locais.
- Art.11 ano letivo de, no mínimo, 180 dias e 90 dias de trabalho escolar efetivo
- Art.20 Ensino de 1º grau obrigatório dos 7 aos 14 anos.
- Art.25 educação a distância como possível modalidade do Ensino Supletivo.
- Art. 30 e 77 formação preferencial do professor para o Ensino de 1º grau, da 1ª à 4ª séries, em habilitação específica no 2º grau.

A Lei de nº 5.692 modificou os Ensinos Primário e Médio, alterando sua denominação, respectivamente, para primeiro grau e segundo grau. Nessa nova estrutura, desapareceram as Escolas Normais. Em seu lugar foi instituída a habilitação específica de segundo grau para o exercício do magistério de primeiro grau. A habilitação específica do magistério foi organizada em duas modalidades básicas:

- Com a duração de três anos, que habilitaria a lecionar até a 4ª série.
- Com a duração de quatro anos, habilitando ao magistério até a 6ª série do 1º grau.

O currículo mínimo compreendia o núcleo comum, obrigatório em todo o território nacional para todo o Ensino de Primeiro e Segundo grau, destinado a garantir a formação geral; e uma parte diversificada, visando à formação especial. O antigo curso normal cedeu lugar a uma habilitação de 2º Grau. A formação de professores para o antigo Ensino Primário foi, pois, reduzida a uma habilitação dispersa em meio a tantas outras, configurando um quadro de precariedade bastante preocupante na Educação Brasileira.

As Leis de Diretrizes e Bases da Educação de 1961 e 1971, foram um grande marco para a estruturação do Ensino Primário e para as Escolas Normais. Porém não acarretou grandes modificações na estrutura do Ensino Secundário Clássico ou Científico, principalmente no que se refere ao estudo de Geometria. Para esta modalidade de Ensino, alterações significativas começaram a ocorrer após a publicação da constituição de 1988 e da LDB de 96.

## 2.4 Educação para Todos - Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Em 1988 o Brasil promulga sua Constituição concretizando o processo de abertura política e democrática, ratificando o direito à Educação, deixando claro o papel do Estado. Intensos debates são promovidos pelo Movimento Educação para Todos que tinha como principal objetivo a universalização do acesso a educação previsto na Constituição de 1988. Este movimento social aliado a necessidade de desenvolvimento do setor industrial, que se consolidava no Brasil, culminaram na construção da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei 9394/96). A LDB traz na sua fundamentação o aluno como sujeito da sua aprendizagem. A escola deve formar um currículo que contemple a formação profissional e cidadã dos alunos, desta forma o Ensino da Matemática, nesta nova perspectiva, deve possibilitar a criação de uma ponte entre a teoria e a prática, não a repetição do conhecimento construído ao longo de sua história, combatendo, assim, o modelo tradicional, tecnicista e formalista. Esta nova ótica é evidenciada em [34]:

A partir das reorientações emanadas pela LDB 9394/96, as concepções de currículo passaram a ter como objetivo a construção de propostas curriculares centradas no desenvolvimento das competências cognitivas, motoras e comportamentais, exigências do novo estágio do capitalismo, a globalização da economia. Este novo estágio trouxe características bastante inovadoras para o campo das políticas educacionais e curriculares, porque passaram a adotar um modelo de educação, no qual o aprender a aprender passa a ser a tônica. Isto significa que a educação, a escola e o currículo deveriam ser pensados de forma mais aberta e flexível, não apenas como processos de reprodução do conhecimento, mas também como um importante espaço de produção do conhecimento.(p.67)

A Lei Darcy Ribeiro, como é conhecida, devido sua versão final ter sido apresentada pelos senadores Darcy Ribeiro, Marco Maciel e Maurício Correa, modificou vários aspectos da educação como a estrutura dos níveis de ensino, ampliação da quantidade de dias letivos, capacitação e valorização dos educadores, respeito a diversidade cultural.

A LDB mostra-se como a consolidação dos debates iniciados desde o Brasil Império sobre a construção de um conjunto de políticas que tinham por objetivo regulamentar e estruturar todas as etapas da Educação Básica à nível nacional. É impossível analisar o caminho trilhado em direção a publicação dos PCN's, sem mencionar a contribuição do educador Paulo Freire. Defensor do pensamento progressista, o educador se contrapunha a pedagogia liberal e ao que considerava a *Educação Bancária*. Na percepção dele a educação

era a chave para mudança social, logo o ensino deveria ser libertador, tornando o aluno um sujeito crítico e capaz de livrar-se das amarras da sociedade opressora.

Como consequência da Lei 9394/96, em 1997 foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais, sendo este o documento de referência para construção da estrutura curricular da Educação Básica. Como afirma o Ministério da Educação e Cultura:

Essa LDB reforça a necessidade de se propiciar a todos a formação básica comum, o que pressupõe a formulação de um conjunto de diretrizes capaz de nortear os currículos e seus conteúdos mínimos, incumbência que, nos termos do art. 9º, inciso IV, é remetida para a União. Para dar conta desse amplo objetivo, a LDB consolida a organização curricular de modo a conferir uma maior flexibilidade no trato dos componentes curriculares, reafirmando desse modo o princípio da base nacional comum (Parâmetros Curriculares Nacionais), a ser complementada por uma parte diversificada em cada sistema de ensino e escola na prática, repetindo o art. 210 da Constituição Federal. ([12], p.15-16)

O documento final publicado em 1997, foi organizado em 10 volumes que abordavam os conteúdos distribuídos nas três áreas do conhecimento: Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias, a serem ministrado ao longo do Ensino Fundamental. O objetivo é conceber a educação de uma forma mais ampla, estruturada nos pilares: *aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver com os outros e aprender a ser.*

A concepção de Parâmetro e Currículo proposto pelo documento norteador da construção curricular é apresentada em [12].

O termo “parâmetro” visa comunicar a ideia de que, ao mesmo tempo em que se pressupõem e se respeitam as diversidades regionais, culturais, políticas, existentes no país, se constroem referências nacionais que possam dizer quais os “pontos comuns” que caracterizam o fenômeno educativo em todas as regiões brasileiras.[...] currículo pode significar também a expressão de princípios e metas do projeto educativo, que precisam ser flexíveis para promover discussões e reelaborações quando realizado em sala de aula, pois é o professor que traduz os princípios elencados em prática didática. (p.49)

Para o cumprimento dos objetivos apresentados nos PCNs, além de proporcionar modificações no processo estrutural da educação, se fez necessário compreender o processo de

ensino-aprendizagem de forma mais ampla, analisando suas ramificações como as relações familiares, a estrutura das escolas e a formação de professores. Estudos do Ministério da Educação e Cultura em parceria com o Inep, apontam que em 1996, ano de publicação da LDB, mais da metade dos professores do Ensino Fundamental I não possuíam o antigo 3º grau completo. Em face desta realidade, o documento ratifica a necessidade de investimentos na formação e valorização dos professores como elemento indissociável para melhoria da Educação.

O documento publicado em 1997 orientava as diretrizes do Ensino Fundamental I, no ano seguinte as normas para o Ensino Fundamental II e em 2000 foram divulgadas as orientações do Ensino Médio. Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio - PCNEM, teve como desafio construir um novo modelo que atendesse as mudanças advindas do crescente acesso à tecnologia. Neste período a velocidade e acesso as informações cresceram exponencialmente modificando as formas de interação desta juventude com o meio social. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais o currículo do Ensino Médio passou refletir os novos anseios da juventude brasileira e do mercado de trabalho para o século XXI. Além dos conteúdos pertinentes às três áreas do conhecimento, o estudante, no decorrer dos três anos de duração desta etapa, passou à interagir com conteúdos correspondentes a identidades regionais da sociedade, mundo do trabalho, meio ambiente, saúde e sexualidade, os chamados temas transversais.

Os Parâmetros Curriculares, organizados nos segmentos: Educação Infantil, Educação Fundamental e Ensino Médio, não tinham a intensão de definir os conteúdos que deveriam ser ministrados no Ensino Fundamental e Médio, mas sim de direcionar esses temas por meio de um conjunto de competências e habilidades condizentes com cada etapa deste período. Outro fator de extrema relevância para o desenvolvimento do processo de aprendizagem é a proposta de contextualização e Interdisciplinaridade que permeia por todo esse documento visando a interação entre as diversas áreas do conhecimento.

Partindo das orientações descritas em [11], cada escola juntamente com suas respectivas secretarias municipais e estaduais deveriam estruturar seus currículos com foco no desenvolvimento das habilidades e competências previstas nos PCNEM, no decorrer dos três anos do Ensino Médio, levando em conta os aspectos sociais e regionais por meio de uma abordagem construtivista que coloca o aluno como ativo no processo de ensino-aprendizagem.

A publicação dos PCN's culminou na criação do Exame Nacional do Ensino Médio em 1998, durante a gestão do presidente Fernando Henrique Cardoso. O ENEM, à principio, funcionou como uma avaliação da etapa final da Educação Básica, servindo de subsídio para avaliar a qualidade da educação no Brasil e elaboração de políticas públicas. Somente em



2004 o ENEM passou a ser utilizado por algumas universidades para o ingresso no Ensino Superior. O Exame sofreu mudanças significativas em 2009, durante a gestão do presidente Luiz Inácio Lula da Silva e do então ministro Fernando Haddad, quando foi executada a proposta de um vestibular unificado para todas as instituições federais do país, fazendo do ENEM um dos meios de acesso ao Ensino Superior.

O exame na sua primeira edição era realizado em um único dia e composto por 63 questões englobando as disciplinas das três áreas do conhecimento e uma prova de redação. Após 21 anos, o certame passou, a ser realizado em dois dias com 180 questões no total e a prova de redação que representa metade da nota geral desta avaliação. As questões versam sobre os componentes estabelecidos nos PCNEM e Matriz de Referência do ENEM apresentado por um conjunto de competências e habilidades.

Como conceituado na Coletânea Matrizes Curriculares de Referência para o SAEB (2002):

Assim, pode-se entender por competências cognitivas as diferentes modalidades estruturais da inteligência que compreendem determinadas operações que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos físicos, conceitos, situações, fenômenos e pessoas. As habilidades instrumentais referem-se especificamente ao plano do saber fazer e decorrem, diretamente, do nível estrutural das competências já adquiridas e que se transformam em habilidades. ([5], p.8-9).

O debate sobre as mudanças no Ensino Médio se intensificam após os Parâmetros Curriculares Nacionais e durante a Conferência Nacional de Educação realizada em 2010 cujo tema central foi a construção de um sistema articulado para esta etapa da Educação Básica, o comitê estabelece à necessidade da elaboração de uma Base Curricular Nacional que atendesse a nova dinâmica da sociedade moderna.

## 2.5 O Novo Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular

O Art. 26 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação já tratava do debate sobre a necessidade de uma base nacional comum.

Os currículos do Ensino Fundamental e Médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. ([10], p.31)

O Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio é o primeiro passo para o desenvolvimento da meta prevista no Art. 26 da LDB/96. Instituído em 22 de novembro de 2013 pela portaria de nº1.140, o Pacto tem como principal objetivo, estabelecer em regime de cooperação entre os municípios, estados e a União, um conjunto de ações com vistas a melhoria da qualidade da educação do Ensino Médio. O Ministério da Educação propôs o desenvolvimento de duas ações estratégicas com foco no redesenho curricular: Programa Ensino Médio Inovador – ProEMI e a Formação Continuada de Professores do Ensino Médio. No ano seguinte é lançado o Plano Nacional de Educação com vigência de 10 anos, composto por 20 metas elaboradas das quais 4 atestam a premência de um currículo nacional. Dando continuidade ao debate em 2015 é publicada a portaria que normatiza a comissão de elaboração da BNCC. A primeira versão do documento foi lançada em 16 de setembro do mesmo ano.

A proposta de construção da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, foi amplamente debatida por todas as escolas do Brasil, congressos foram realizados com foco em explicar os conceitos apresentados no documento. Após amplo debate e alterações, a versão final foi entregue ao Conselho Nacional de Educação em 2017 e finalmente homologada pela Portaria nº1.570 em 20 de dezembro de 2017, durante a gestão do Ministro da Educação Mendonça Filho. O documento tratava das etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental.

A BNCC do Ensino Médio foi publicada um ano depois com o objetivo de corroborar com a meta de Educação Integral e a necessidade de modernização e significação do currículo como resposta as baixas taxas de aprendizagem e elevados índices de evasão escolar desta etapa.

A grande mudança proposta pela BNCC não está pautada na ampliação ou redução de conteúdos que compõem o currículo, o documento propõe repensar a forma de ensinar, mostrando grande preocupação com os fatores envolvidos no processo de ensino-aprendizagem e metodologias utilizadas. A BNCC está estruturada em Competências Gerais da Educação Básica que se ramificam norteando tanto o conhecimento comum quanto os itinerários formativos.

Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas

complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. ([6], p.8)

Apesar do nome Base Nacional Comum Curricular, a intenção do documento não é trazer uma lista de conteúdos a serem ministrados durante as etapas da Educação Básica, a ideia é nortear a construção destes currículos nos diversos estabelecimentos de ensino do país. Cada escola, com base no seu Projeto Político Pedagógico, tem autonomia na construção e estruturação deste documento, levando em conta os diversos aspectos sociais de cada região.

A Base se apresenta como singular, desvinculada das mudanças oriundas dos projetos anteriores e como representante dos anseios da sociedade, pois foi construída com ativa participação de toda comunidade escolar. No dizer de Tonegutti em [39].

Esse silêncio revela a que vem a proposta. Ela pretende substituir os PCN como algo novo, ignorando a situação já existente e valendo-se de uma nova linguagem para tentar afastar muitas das críticas feitas aos PCN.(p.21)

Enquanto a BNCC trata dos aspectos relacionados ao currículo, a Reforma do Ensino Médio aprovada em 2016 mostra a estruturação desta etapa. Os conteúdos a serem lecionados foram distribuídos em cinco itinerários formativos: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Formação Técnica e Profissional. As disciplinas Língua Portuguesa e Matemática são as únicas obrigatórias durante todo o Ensino Médio. A carga horária ampliada de 800 para 1400 horas, possui 60% pautada na BNCC e o restante optativo dentro das áreas mencionadas. Esse é o ponto alto da reforma, pois propõe oferecer ao aluno a possibilidade de direcionar sua formação a nível médio de acordo com seus interesses. Todas essas ações, juntamente com Programa de Fomento às Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral - EMTI, convergem para a construção de uma Educação que atinja os jovens em sua plenitude e complexidade. Temas como competências socioemocionais, conteúdos ligados a sustentabilidade e mídias sociais não são trabalhados como elemento interdisciplinar. Na proposta, esses temas definem os conteúdos. Cada tópico das disciplinas são construídos junto ao aluno, pela descoberta e explicação do mundo que o cerca.

A BNCC propõe a utilização de *softwares* e aplicativos em sala de aula como recursos didáticos que auxiliam na compreensão dos conteúdos, principalmente, a utilização destes recursos em ações que interfiram diretamente no meio social no qual o aluno está inserido.

A nova reforma objetiva conceber a Educação no seu aspecto mais amplo, por meio do desenvolvimento de três Competências Gerais descritas em [6].

#### Competências Pessoais e Sociais

- Conhecer, apreciar e cuidar de si, do seu corpo e bem-estar, e reconhecer e gerir suas emoções e comportamentos, com autocrítica e capacidade de lidar com a crítica do outro e a pressão do grupo;
- Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos, a cooperação e o respeito;
- Fazer-se respeitar e promover o respeito ao outro, acolhendo e valorizando a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos baseados nas diferenças de origem, etnia, gênero, orientação sexual, idade, habilidade/necessidade, fé religiosa ou de qualquer outro tipo;
- Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

#### Competências Cognitivas

- Dominar e valorizar os conhecimentos construídos sobre o mundo físico, social e cultural para explicar a realidade e assumir, com consciência crítica e responsabilidade, atitude proativa em relação aos desafios contemporâneos;
- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e inventar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas;
- Exercitar o senso estético para reconhecer, valorizar e fruir as diversas manifestações culturais, das locais às mundiais, como também para participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

#### Competências Comunicativas

- Trocar informações, experiências e ideias em diferentes contextos, com base no conhecimento das linguagens verbal (oral e escrita) e/ou verbo-visual (como LIBRAS), corporal, multimodal, artística, matemática, científica, tecnológica e digital, para produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo;

- Explicar, por meio de diferentes linguagens, fatos, informações, fenômenos e processos linguísticos, culturais, sociais, econômicos, científicos, tecnológicos e naturais, valorizando a diversidade de saberes e vivências culturais;
- Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias e pontos de vista que respeitem e promovam os direitos humanos, o acesso e a participação de todos sem discriminação de qualquer natureza e a consciência socioambiental.

Desta forma cada conteúdo pertencente ao currículo está a serviço de desenvolver as competências supracitadas por meio da seguinte estrutura: *Competências Gerais*  $\implies$  *Competências Específicas de cada área*  $\implies$  *Competências Específicas de cada componente curricular*  $\implies$  *Habilidades*. Toda a estruturação do Novo Ensino Médio bem como da BNCC, visa trazer igualdade e equidade à Educação Básica brasileira. Igualdade no sentido de oferecer os componentes básicos para esta ação transformadora que a reforma propõe, equidade no sentido de que o documento reconhece as desigualdades existentes no país e a diversidade cultural e social que precisa ser contemplada no currículo.

As mudanças na educação brasileira são reflexos do momento político vivenciado, não diferente desta análise, o Novo Ensino Médio e a proposta da Base Curricular Comum, que serão implementadas a partir de 2020 no Ensino Médio, apontam para os anseios de uma sociedade conectada, onde a velocidade das transformações no mundo do trabalho e a dinâmica social são mutáveis. O jovem, segundo este novo capítulo, é autor na construção da sua formação e agente de mudança social.

Este sentido de protagonismo na aprendizagem é evidenciado em [6] por meio do desenvolvimento de atividades que estimulem a curiosidade e autoria, o conhecimento não deve ser encarado como pronto e estático, o jovem deve ser incentivado a testar suas hipóteses com a realização de experimentos e escrever suas observações, desenvolvendo a capacidade de argumentação e senso crítico.

Para compreender a relação existente entre os aspectos históricos presentes nas reformas apresentadas neste capítulo bem como seu impacto social, apresenta-se um quadro resumo que possibilita a comparação entre os aspectos das reformas relatadas, explicitando fatores como principais contribuidores, período, governo, metodologia de ensino e objetivos para o Ensino Médio. Tal resumo apresenta-se na Figura 1.

Reforma	Ensino Secundário		LDB/96 e PCN's	Novo Ensino Médio
	Francisco Campos	Gustavo Capanema		
<b>Objetivo</b>	Formação dos Jovens para todas as atividades nacionais	Formação dos aspectos cognitivos e relacionados a personalidade.	Formação com funções equivalentes a todos os estudantes.	Formação de qualidade e que aproxime a escola da realidade da juventude.
<b>Estrutura</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fundamental (5 anos)</li> <li>Complementar (2 anos)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Curso Ginásial (4 anos)</li> <li>Curso Clássico ou Científico (2 anos)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ensino Médio (3 anos)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ensino Médio (3 anos)</li> </ul>
<b>Principais Características</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Normalização do Ensino Secundário a Nível Nacional.</li> <li>Obrigatoriedade da frequência de no mínimo 25% para realização dos exames de acesso ao Ensino Superior.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Obrigatoriedade do Ensino de Moral e Cívica.</li> <li>Obrigatoriedade do Ensino Militar aos alunos do sexo masculino.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Universalização do Ensino Médio.</li> <li>Estruturou os diversos âmbitos do processo educacional.</li> <li>Frequência obrigatória de no mínimo 75%.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Educação Integral.</li> <li>Ampliação da Carga Horária de 800 para 1200 horas.</li> <li>Itinerários Formativos.</li> </ul>
<b>Programa Curricular</b>	Equiparado ao Currículo do Colégio Pedro II	Programas Nacionais expedidos em 1942 com contribuições de Euclides Roxo, Pe. Arlindo e militares.	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.	Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio.

Figura 1: Análise das Reformas no Ensino Médio

## 2.6 O Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB

Avaliar é um processo contínuo e primordial para a construção das políticas de melhoria da educação. Segundo Sant'Anna avaliar é:

Um processo pelo qual se procura identificar, aferir, investigar e analisar as modificações do comportamento e rendimento do aluno, do educador, do sistema, confirmando se a construção do conhecimento se processou, seja este teórico (mental) ou prático. ([36], 1995, p.29-30).

O Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, foi criado em 1990 com o intuito de avaliar a qualidade da Educação Fundamental. Atualmente o SAEB e os índices de aprovação, são os componentes para a construção do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB. A avaliação, inicialmente realizada somente em escolas públicas, por meio de amostra, possuía como público alvo alunos da 1ª, 3ª, 5ª e 7ª série, contemplando questões de Matemática, Língua Portuguesa, Ciências Naturais e Redação. Somente em 1997 o SAEB passou a analisar o 4º e 8º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio nas disciplinas Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais (Física, Química e Biologia), História e Geografia. Foi no mesmo período que o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, responsável pela organização da avaliação, corroborando com a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais, organizou uma matriz referência, composta por um conjunto de competências e habilidades, definindo quais conjuntos de descritores seriam utilizados para construção dos itens da prova.

Em 2005 o SAEB foi dividido em duas avaliações: Avaliação Nacional da Educação Básica - ANEB e Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - ANRESC, comumente denominada de Prova Brasil.

A ANEB avalia de, forma amostral, por meio de um teste cognitivo de Português e Matemática, as escolas que possuam algum dos seguintes perfis:

- alunos de 5º e 9º ano das escolas públicas, urbanas ou rurais, que possuam entre 10 e 19 alunos matriculados em cada etapa;
- 3º ano do Ensino Médio, das escolas públicas urbanas ou rurais;
- alunos de 5º ano e 9º ano das escolas particulares que possuam mais de 10 alunos matriculados em cada série.

Na avaliação Anresc ou Prova Brasil, apenas as escolas públicas, urbanas ou rurais, que possuam mais de 20 alunos matriculados no 5º e 9º ano são avaliadas. Ocorre de forma censitária e seu objetivo principal é mensurar a qualidade do ensino ministrado nas escolas das redes públicas, produzindo informações sobre os níveis de aprendizagem em Língua Portuguesa (leitura) e em Matemática fornecendo resultados para cada unidade escolar participante bem como para as redes de ensino em geral. Apresenta, ainda, indicadores contextuais sobre as condições extra e intraescolares em que ocorre o trabalho da escola. Os dados apresentados visam servir de subsídio para diagnóstico, reflexão e planejamento do trabalho pedagógico da escola, bem como para a formulação de ações e políticas públicas com vistas à melhoria da qualidade da educação básica.

Diante da implementação da BNCC do Ensino Fundamental, no ano de 2019 a avaliação para turmas de nível fundamental já contemplará as habilidades propostas na Base Comum Curricular. No Ensino Médio serão utilizadas as matrizes de referência como norte para elaboração da avaliação tendo em vista que a previsão para implementação da BNCC do Ensino Médio está prenunciada para 2021. As matrizes do SAEB de Matemática, bem como suas escalas de proficiências estão disponíveis nos anexos deste trabalho.



### 3 Ensino de Geometria no Brasil

Os relatos do Ensino de Geometria no Brasil datam da necessidade de Portugal treinar os soldados brasileiros para defender a colônia. A aula de fortificações foi o primeiro indício do Ensino de Geometria. O responsável por ministrar as lições aos soldados foi José Fernandes Pinto Alpoim. O Português engenheiro, chegou ao Brasil Colônia em 1738 e foi o escritor dos primeiros livros da disciplina: O Exame de Artilheiro e o Exame de Bombeiros. O primeiro livro era composto por 700 perguntas e respostas sobre Aritmética e Geometria.

Com o desenvolvimento do Brasil e a chegada da Coroa Portuguesa o Ensino da Geometria deixou de ter um enfoque puramente militar e passou a ser valorizado nos exames de admissão dos cursos superiores. Desta forma a Geometria passou a ser vista sob a ótica de disciplina escolar totalmente baseada no modelo Euclidiano.

Neste capítulo analisamos as mudanças ocorridas no currículo de Matemática nas principais reformas do Ensino Médio com foco em observar as alterações no ensino e aprendizagem da Geometria até a proposta aprovada da Base Nacional Comum Curricular a ser implantada em 2021.

#### 3.1 Matemática e Geometria na Reforma do Ensino Secundário

O Brasil, em 1930, iniciava seu processo de industrialização e a tomada do poder pela Aliança Liberal, que tinha em seu comando Getúlio Vargas. O governo varguista tinha como meta modernizar os diversos setores da sociedade brasileira, e com foco em atender as novas demandas industriais, era eminente a necessidade da reformulação do Ensino Secundário. O então ministro da Educação Francisco Campos, tinha como proposta central unificar o ensino no Brasil.

Neste propósito, Campos, promulgou a Lei Orgânica do Ensino Secundário que estabelecia que todas as instituições que ofertassem essa modalidade de ensino teriam currículo nos moldes do adotado pelo Colégio Pedro II. Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II, influenciado pelas ideias implementadas na Alemanha por Felix Klein e pelas concepções da Escola Nova, modifica a estrutura do ensino ao usar o termo *disciplina de Matemática*. A nova disciplina, abordaria todos os tópicos de Geometria, Aritmética e Trigonometria. Com a reforma e a caracterização da disciplina de Matemática fica evidenciada a presença dos valores pregados por Euclides Roxo de apoio ao Movimento iniciado na Europa, chamado de Movimento Matemática Moderna - MMM.

O Movimento Matemática Moderna tinha como objetivo uma mudança no ensino, princi-

palmente devido ao avanço da revolução tecnológica que exigia trabalhadores escolarizados. Neste movimento havia uma valorização da Álgebra, Teoria dos Números e Conjuntos, no intuito de modernizar a linguagem matemática, criando um conjunto de temas que seriam imprescindíveis para formação dos jovens na perspectiva dos avanços tecnológicos que se apontavam na época.

O Movimento ocorria simultaneamente em países da Europa e EUA. O MMM tem seu marco inicial atrelado ao lançamento do *Sputnik*, Satélite Soviético. A liderança da União Soviética na corrida espacial, mostrou a urgência na formação tecnológica dos jovens americanos e, neste momento, de uma nova Matemática, que viesse de encontro a todos esses anseios. Sua metodologia tem como uma de suas bases o material desenvolvido por Nicolas Bourbaki. O matemático que não existiu, Bourbaki, é o pseudônimo do grupo de matemático formado por Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil.

O princípio básico de Boubarki, a dedução do conteúdo a partir dos axiomas, também passou a ocupar posição central no Ensino da Matemática. Conteúdos que não se prestavam a um enfoque axiomático, como por exemplo muitas aplicações da Matemática, foram relegadas a um plano secundário: a capacidade de fazer uma demonstração matemática e de raciocinar logicamente foi considerada mais importante do que a aquisição de “perícia trivial para calcular” (Howson, apud [24] , 2012, p. 260).

Na Geometria, o Movimento Matemática Moderna acreditava que as dificuldades apresentadas no ensino-aprendizagem da Geometria eram decorrentes do modelo Euclidiano adotado. A Geometria deveria ser apresentada de forma axiomática por meio de transformações geométricas, com recursos de Estruturas Algébricas e Teoria dos Números. Nesta época houve grande controvérsia sobre o Ensino da Geometria. Os pesquisadores Vera Maria Rodrigues e Omar Catunda destacam, em trabalhos publicados em 2001, que ocorreu uma errônea interpretação do movimento. Principalmente da frase “Abaixo Euclides” pronunciada por Jean Dieudonné.

Os trabalhos do Movimento Matemática Moderna eram também orientados segundo a tendência de Piaget, psicólogo da educação, que expressa claramente em seu livro, *Estruturalismo* (1979), a corroboração da sua concepção do ensino-aprendizagem na perspectiva de estruturas matemáticas.

Ora, é espantoso constatar que as primeiras operações das quais se serve a criança em seu desenvolvimento, e que derivam diretamente das coordenações

gerais de suas ações sobre os objetos, podem precisamente se repartir em três grandes categorias, conforme sua reversibilidade proceda por inversão, à maneira das estruturas algébricas (no caso particular: estruturas de classificação e de números), por reciprocidade, como nas estruturas de ordem (no caso particular: seriações, correspondências seriais etc.) ou, em lugar de se fundar sobre as semelhanças e diferenças, as uniões inocentadas pelas leis de proximidade, de continuidade e de fronteiras, o que constitui estruturas topológicas elementares (que são, do ponto de vista psicogenético, anteriores às estruturas métricas e projetivas, contrariamente ao desenvolvimento histórico das Geometrias, em conformidade, porém, com a ordem de filiação teórica!). Esses fatos parecem indicar, portanto, que as estruturas-mãe dos Bourbaki correspondem, sob uma forma naturalmente muito elementar, senão rudimentar, e bastante afastada da generalidade e da possível formalização que revestem sobre o plano teórico, às coordenações necessárias ao funcionamento de toda inteligência, desde os graus mais primitivos de sua formação ([35], 1974, p.24).

No Brasil, desde 1929, com a construção do programa de Matemática do Colégio Pedro II, Euclides Roxo, influenciado por Félix Klein, alavancou as discussões sobre o ensino desta área do conhecimento ao propor a unificação das matérias de Aritmética, Geometria e Álgebra em uma única disciplina, a Matemática. Com a reforma Capanema, esta reformulação estendeu-se para todo território nacional, proporcionando a disseminação e debate sobre o Movimento Matemática Moderna. Apesar do tema ser pauta de muitos congressos realizados no Brasil, somente a partir de 1966, com participação ativa de matemáticos brasileiros em congressos internacionais, o movimento começou a ter adesão nas escolas de níveis secundários.

Como evidencia Miorim em sua análise.

O objetivo do Ensino de Matemática deixava de ser apenas o desenvolvimento do raciocínio, conseguido por meio do trabalho com lógica dedutiva, mas incluía, também, o desenvolvimento mental, baseado no interesse do aluno, que deveria partir da intuição e, apenas aos poucos, ir introduzindo o raciocínio lógico, que enfatizasse a descoberta e não a memorização.([30],1998, p.95)

Analisando o Decreto  $n^{\circ}$  19.890 de 18 de abril de 1931, juntamente, com o programa do Colégio Pedro II, verifica-se a seguinte distribuição da disciplina de Matemática no decorrer dos 5 primeiros anos do curso fundamental:

Tabela 1: Distribuição da Disciplina de Matemática

Série	Conteúdo I	Conteúdo II
1ª	Iniciação Geométrica	Aritmética e Álgebra
2ª	Iniciação Geométrica	Aritmética e Álgebra
3ª	Aritmética e Álgebra	Geometria
4ª	Aritmética e Álgebra	Geometria
5ª	Aritmética, Álgebra e Geometria	Aritmética, Álgebra e Geometria

Pode-se claramente verificar que a reforma foi implementada com carácter gradativo para unificar os diferentes ramos da Matemática, somente no último ano a Geometria não aparece dissociada da Aritmética e Álgebra. Cada um dos tópicos propostos no Conteúdo I e Conteúdo II possuíam carga horária de 3 horas semanais.

Esta unificação da Geometria com a Matemática não representou modificações significativas na lista de conteúdos a serem ministrados no Ensino Secundário. O programa não diverge do modelo adotado nos antigos cursos para exame. Apresentamos a seguir, recorte do Programa Curricular da Reforma Francisco Campos destacando os conteúdos de Geometria. O documento [9] foi disponibilizado de forma integral nos anexos deste trabalho.

#### 1ª Série - Iniciação Geométrica

- Principais noções de formas geométricas;
- Área do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio;
- Circunferência e área do círculo;
- Volumes do paralelepípedo retângulo, do cubo, do prisma triangular, do cilindro e do cone circular(reto). Fórmulas.

#### 2ª Série - Iniciação Geométrica

- Noções de ângulos e de rotação: adjacentes, complementares, suplementares, opostos pelo vértice;
- Medida dos ângulos. Uso do transferidor;
- Paralelas e perpendiculares, problemas gráficos sobre seu traçado;

- Triângulos: alturas, medianas e bissetriz; Soma de ângulos internos e externos;
- Estudo sucinto dos quadriláteros;
- Noções sobre figuras semelhantes. Escalas;
- Medidas indiretas das distâncias;
- Razões entre lados de um triângulo retângulo. Seno, cosseno e tangentes naturais.

Percebe-se nesta primeira etapa, nomeada de Iniciação Geométrica, um breve resumo dos tópicos abordados no Ensino Primário com ênfase nos aspectos intuitivo e experimental. Apesar de separada de Álgebra e Aritmética, a Geometria, segundo o decreto, deveria ser apresentada ao aluno de forma a possibilitar essa integração. Para este estudo introdutório sob esta nova perspectiva era recomendado aos alunos a obra de Euclides Roxo, Curso de Matemática Elementar.

Juntamente com o programa curricular do Colégio Pedro II, foram publicados um conjunto de instruções para execução do Programa de Matemática do qual destacamos os objetivos do Ensino de Geometria na 1ª e 2ª série:

O ensino terá, no 1º ano, tanto quanto possível, um carácter vivo e intuitivo, e os primeiros conhecimentos serão adquiridos experimentalmente, ao passo que a mão e a vista se exercitarão na observação e na avaliação das grandezas, com o uso de régua, do compasso e do duplo centímetro.[...]. Para o segundo ano, deve continuar a predominar, aqui, o mesmo carácter intuitivo e experimental aconselhado para o 1º ano; assim, são desenvolvidas as primeiras noções de planimetria. ([9], p.32-37).

O programa de execução mencionado é um dos primeiros registros de organização metodológica do Ensino da Matemática. Para compreender as nuances do currículo nos voltaremos para uma análise entre a proposta do Colégio Pedro II e as questões do livro didático e exames de acesso ao curso superior deste período de forma a apresentar um recorte do Ensino de Geometria na Reforma Francisco Campos.

Tomando como exemplo a edição do livro Noções de Geometria Prática publicada em 1942, verifica-se uma breve introdução sobre os conceitos introdutórios da Geometria acompanhado do pouco ou nenhum uso de notações matemáticas. Após a conceituação é proposto ao aluno uma sequência de exercícios de fixação, questionário, que instiga a descoberta de propriedades e/ou postulados de forma intuitiva. A mesma valorização dada

às construções geométricas desde o inserção da Geometria no Brasil permanece inclusa na obra. Como apresentado em ([22], p.45-47):

**Exemplo 1** *Considere duas retas concorrentes, traçar a bissetriz sem recorrer ao ponto de concorrência.*

**Exemplo 2** *De um ponto dado traçar uma reta que forme ângulos iguais com duas outras retas não paralelas.*

Depois desta iniciação geométrica no 3º e 4º ano do Ensino Secundário o programa definia os seguintes conteúdos para estudo:

#### 3ª Série - Geometria

- Conjunto de proposições fundamentais que servem de base à Geometria dedutiva;
- Noções de deslocamentos elementares no plano: Translação e rotação de figuras;
- Simetria;
- Estudo dos Polígonos; soma dos ângulos internos e externos;
- Noções e exemplares de lugar geométrico;
- Círculo, propriedades dos arcos e cordas. Tangente Normal.

#### 4ª Série - Geometria

- Polígonos regulares;
- Medida de circunferência;
- Áreas equivalentes, relação entre figuras semelhantes;
- Retas, planos no espaço;
- Ângulos poliedros. Triedros suplementares;
- Prismas, Pirâmides, Cilindros e Cones;
- Esfera. Seções planas. Pólos; plano tangente; cone e circunscritos;
- Noção sobre geração e classificação das superfícies regradadas, de revolução, desenvolvíveis;

- As funções circulares: relação entre essas funções. Gráficos;
- Expressões da tangente, cotangente, secante e cossecante em função do seno e cosseno e tangente da soma de dois ângulos, do dobro de um ângulo, da metade de um ângulo.

A proposta metodológica da Reforma de Campos foi romper com o modelo tradicional e clássico do ensino com foco na memorização de postulados, teoremas e fórmulas de maneira desvinculada dos outros campos da matemática. Apesar da Geometria, até a 4ª série, ser apresentada dissociada das demais, em [9] é possível perceber que a construção dedutiva iniciada na 3ª e 4ª série fornecerá subsídio para alcançar os objetivos de integração na 5ª série. No entanto o rompimento com o modelo tradicional se apresenta de forma pouco contundente, pois não existem alterações significativas na construção dos conhecimentos geométricos. Na última etapa do Ensino Secundário o programa do Colégio Pedro II propõe o estudo de derivadas das funções trigonométricas, bem como a interpretação geométrica da noção de derivada, desenvolvimento em série do seno, cosseno e tangente, estudo do volume e cônicas. Todos estes temas possibilitam o entrelace da Geometria, Aritmética e Álgebra almejado por Roxo. O carácter unificador do currículo para todo o Brasil não implicava na autonomia dos professores na distribuição dos conteúdos nas séries do Ensino Secundarista. O modelo adotado pelo Colégio Pedro II apresenta-se como uma base para construção da grade curricular das diversas instituições do país.

Nos anos seguintes à Reforma, ocorreu intenso debate sobre a unificação da Matemática e com a posse de Gustavo Capanema como novo ministro da Educação e Saúde Pública em julho de 1934, as discussões foram intensificadas e culminaram com a promulgação, em 9 de abril de 1942, da Lei Orgânica do Ensino Secundário. Para construção do Programa de Matemática desta reforma foi instituída uma comissão composta pelo Ministro de Guerra do governo Getúlio, Eurico Gaspar Dutra, o próprio ministro Gustavo Capanema, alguns professores como Euclides Roxo, Pe. Arlindo Vieira e militares.

O ponto inicial da análise sobre os impactos da unificação da Matemática implementada na reforma anterior reside na declaração do Ministro de Guerra na primeira reunião realizada pela comissão, onde explicita os fundamentos científicos e históricos para seu posicionamento contrário as alterações realizadas em 1930:

Fundamentos Científicos. Aconselham a lógica que se reúnam nos mesmos grupos os fenômenos da mesma categoria para estudá-los ordenadamente; e a experiência demonstra que o cérebro humano, notadamente em formação como os do estudante de Ensino Secundário, recebe os conhecimentos, com maior

facilidade por essa forma metodizada. (...) Ninguém discutirá, por certo, que os fenômenos numéricos são essencialmente diferentes dos geométricos - quantidade e forma distinguem-se de tal maneira que os espíritos mais jovens desde logo os separam, os compreendem e os raciocinam com rapidez e perfeição. Ademais, o espírito humano, em seu desenvolvimento natural foi passando dos fenômenos mais simples para os mais complexos; e que ninguém dirá que os numéricos não sejam mais fáceis e mais gerais do que os geométricos. Fundamentos Históricos. O método preconizado por Vossa Excelência deu ensejo a formação de culturas notáveis que honraram os postos mais culminantes da hierarquia social no Brasil, tanto nas ciências, nas letras, nas artes, como na política e na administração. (...) Sem orgulho nem jactância, nossa experiência indiscutível, de mais de quarenta anos, pode perfeitamente dispensar todos os alvitreiros das mais sedutoras novidades. (Dutra apud [20], p.88 - 89)

Além da argumentação supracitada, Dutra acrescenta a sua fundamentação aspectos estatísticos que possibilitam concluir que o rendimento dos alunos na formação militar é superior quando o professor adota abordar de maneira individual os conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometria. Euclides Roxo, membro da comissão, no ensejo apenas ratificou seu posicionamento sobre a unificação tendo como referência os resultados obtidos na Alemanha por Klein. O programa de Ensino oficial foi expedido em 11 de julho de 1942, após inúmeros modelos, ora defendido por Euclides Roxo, ora por Arlindo Vieira que corroboravam com a opinião dos militares sobre a seriação. A seguir apresentamos um recorte do programa expedido, apresentando os conteúdos relacionados ao Ensino de Geometria do Curso Ginásial.

#### 1ª Série - Geometria Intuitiva

- Sólidos geométricos, superfícies, linhas, ponto;
- Plano, reta, semi-reta, segmento;
- Ângulos;
- Posições relativas de retas e planos; paralelas; perpendiculares e oblíquas;
- Polígonos; triângulos e quadriláteros;
- Círculo;
- Poliedros;



- Corpos Redondos.

#### 2ª Série - Geometria Intuitiva

- Área de um figura plana;
- Unidade de área;
- As unidades legais brasileiras e as inglesas mais usuais;
- Área das principais figuras planas, fórmulas;
- Noção de volume;
- Unidades de volume;
- As unidades legais brasileiras e as inglesas mais usuais;
- Volume dos principais sólidos geométricos, fórmulas.

#### 3ª Série - Geometria Dedutiva

- Proposições geométricas; hipótese, conclusão, demonstração;
- Ponto, linha, superfície, reta, plano;
- Figuras geométricas;
- Lugares geométricos;
- Congruência;
- Ângulos;
- Congruência de triângulos;
- Perpendiculares e oblíquas;
- Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos;
- Soma dos ângulos de um triângulo e de polígonos convexos;
- Quadriláteros e suas propriedades;

- Construções geométricas;
- Determinação do círculo e posições relativas entre dois círculos;
- Deslocamento no plano;
- Correspondência entre arcos e ângulos;
- Ângulos inscritos, interiores e exteriores;
- Segmento Capaz;
- Quadrilátero inscritível.

#### 4ª Série - Geometria Dedutiva

- Divisão harmônica;
- Segmentos determinados sobre transversais por um feixe de paralelas;
- Linhas proporcionais no triângulo;
- Lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante;
- Semelhança de triângulos e polígonos;
- Relações métricas nos triângulos;
- Altura de um triângulo equilátero e a diagonal do quadrado;
- Relações métricas no círculo;
- Propriedades dos polígonos regulares;
- Expressão do ângulo interno;
- Construção e cálculo do lado do quadrado, do hexágono regular, do triângulo equilátero e do decágono regular convexo;
- Lado do polígono de  $2n$  lados em função do  $n$  lados;
- Semelhança de polígonos regulares;
- Comprimento de um arco de círculo;

- Expressões de comprimento da circunferência e de um arco;
- Radiano;
- Medição das áreas das principais figura planas;
- Relações métricas entre áreas;
- Áreas de polígonos semelhantes;
- Teorema de Pitágoras.

No tocante a Geometria o currículo propõe a seguinte distribuição no curso clássico com duração de 3 anos:

- **1ª série - Geometria.** Unidade I: O plano e a reta no espaço; Unidade II: Os Poliedros; Unidade III: Os Corpos Redondos
- **2ª série** - O estudo de Geometria foi substituído pela Trigonometria.
- **3ª série - Geometria.** Unidade I: Curvas Usuais; Unidade II: Geometria Analítica

A portaria ministerial que instituía a comissão para construção do programa designava como responsabilidade deste grupo a elaboração das instruções metodológicas sobre a metodologia a ser utilizada em sala de aula para execução do currículo, porém tal documento nunca foi publicado.

Ao comparar o Ensino de Geometria nas Reformas Campos e Capanema pode-se constatar contrastes evidentes: A reforma Campos foi autoritária, no âmbito de sua elaboração, pois foi construída unicamente sobre os preceitos de Euclides Roxo, já a reforma Campos resultou de um amplo debate que culminou numa proposta elaborada por uma comissão. Outro ponto relevante é que na Lei de 1942 não é realizada menção sobre a necessidade de unificação dos campos da Matemática. O ponto de consonância entre as reformas é uma abordagem inicial intuitiva e gradativamente seria feita a transição para Geometria dedutiva. Em relação as questões propostas nos livros didáticos da época observa-se nenhuma modificação sobre a abordagem que prioriza listas extensas de construções geométricas. As reformas representam um marco no estudo da Geometria por representarem a primeira organização em nível nacional para o ensino e aprendizagem da mesma.

### 3.2 A Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Diante da implementação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que tem como um de seus objetivos a organização do trabalho escolar na estruturação do currículo, fica evidente a necessidade de um documento que normatize o conjunto de competências mínimas a serem desenvolvidas por meio de habilidades comuns à todos os estudantes do Ensino Médio. A nova reforma visa romper com o modelo ora profissionalizante, ora apenas para ingresso ao Ensino Superior, que caracterizava esta etapa da Educação Básica. Completar a formação cidadã, preparar para vida moderna e capacitar para o trabalho, são exemplos de objetivos do Ensino Médio descritos nas Diretrizes. Neste ensejo, surgem os PCN's, que em sua elaboração propõem para o ensino a vinculação com o mundo real.

Refletindo o momento histórico vivenciado pelo país, sua elaboração ocorre de forma democrática, proveniente de um grande debate com a participação da sociedade. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio -PCNEM, são resultado do movimento em prol da Educação Matemática originado na década de 80, devido a mudanças de perspectivas dos educadores e educandos. O modelo tradicionalista que dominou a prática de professores em todo país, abre lugar para uma abordagem pautada na interdisciplinaridade e aplicação dos conteúdo em temas transversais.

Sua construção parte do pressuposto que a aprendizagem efetiva ocorre por meio do processo de significação do saber. Desta forma, o professor precisa levar o aluno a estabelecer as conexões entre a matemática e as demais áreas do conhecimento. A Geometria inserida na disciplina de Matemática que, por sua vez, compõe a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, tem como competências centrais: *representação e comunicação; investigação e compreensão; contextualização sócio-cultural*. Estes objetivos interagem diretamente com as demais áreas, como por exemplo a Ciências Humanas ao encarar que toda construção do conhecimento é parte indissociável do processo histórico da sociedade.

Para exemplificar tal mudança vamos analisar algumas questões propostas nos vestibulares tradicionais como em ([17], p.2).

**Exemplo 3** (UFPB 1993) *Na figura o segmento  $AB$  é tangente à circunferência de centro  $O$ . Se  $AB$  mede 30 cm e  $BC$  mede 18cm. Determinar a medida de  $CD$  em centímetros.*

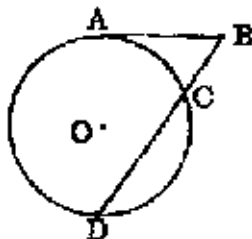


Figura 2: Vestibular Unificado UFPB 1993 - Questão 8

Percebe-se que além da habilidade de leitura, compreensão e conhecimento da linguagem matemática implícita na questão não existe contextualização, nem aplicação da problemática em situação que faça o educando associar a um problema de seu dia a dia. Para solucionar tal questão, o aluno precisa conhecer as relações métricas no círculo, mais especificamente o seguinte teorema.

**Teorema 1** *Se B é um ponto exterior a um círculo, BCD um segmento secante qualquer e AB o segmento da tangente traçado deste ponto ao círculo, então  $AB^2 = BD \times BC$ .*

Determinado o valor de BD pelo teorema supracitado, basta a compreensão que o segmento CD é resultante da subtração dos segmentos BD e BC. Este modelo de exercício proposto no livro didático e vestibulares da época é reflexo do modelo adotado nas salas de aulas de memorização dos teoremas e postulados. Sob a perspectiva dos PCN's este molde não indica a apropriação do conteúdo, pois a aprendizagem ocorreu de maneira unilateral.

Sob a luz da nova reforma, o Ensino da Geometria sofre mudanças significativas no que diz respeito, principalmente as metodologias de ensino. Para estruturação do currículo é proposto a divisão da Geometria em quatro unidades temáticas a serem desenvolvidas no decorrer dos três anos desta etapa final da educação básica: *Geometria Plana, Espacial, Métrica e Analítica*. Cada uma das unidades possui uma lista de competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos. Para nosso estudo apresentamos as habilidades relacionadas a Geometria previstas em [10].

Geometria Plana: Semelhança e congruência; representações de figuras.

- Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações problema.
- Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.
- Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.

- Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.
- Fazer uso de escalas em representações planas.

Geometria Espacial: Elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: interseção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
- Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

Geometria Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
- Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

Geometria Analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.

- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

É imprescindível salientar que a proposta dos PCNEM indicam os conteúdos mínimos e comuns a serem desenvolvidos nos currículos escolares. Cada escola possui autonomia para inserir novas abordagens e temáticas que viabilizem a introdução de temas pertinentes a cultura regional ou interesses dos discentes.

De modo geral, no Brasil, adotou-se a seguinte distribuição para o Ensino da Geometria na nova reforma:

- 1º ano - Geometria Plana
- 2º ano - Geometria Espacial e Métrica.
- 3º ano - Geometria Analítica.

Este modelo de estruturação aos poucos foi modificado para adequar-se as avaliações externas SAEB e principalmente diante da transformação do ENEM em vestibular unificado das Universidades Federais e Institutos ocorrida em 2009.

O documento apresenta um conjunto de sete competências para a disciplina de Matemática que, desde o início da aplicação do Exame Nacional do Ensino Médio, apresenta-se dissociada da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias indicando a tendência, posteriormente confirmada, de transformação da disciplina de Matemática em uma área do conhecimento; *Matemática e suas Tecnologias*. Dentre este conjunto de Competências destacamos as direcionadas ao estudo de Geometria [27].

- Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;
- Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
- Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

No que se refere a distribuição dos conteúdos abordados na prova do ENEM, a Geometria se apresenta em dois dos cinco tópicos do documento: **Conhecimentos geométricos** e **Conhecimentos algébricos/geométricos**. No primeiro são exigidos conhecimentos sobre

as características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; Teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo. Já no segundo, concentra-se os temas relacionado a Geometria Analítica: o estudo do plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularismo; sistemas de equações e cônicas.

Com base nesta análise da reforma sob a ótica dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e do ENEM, a Geometria é apresentada como elemento de aperfeiçoamento da leitura e compreensão do mundo. Tal fato pode ser facilmente observado ao analisar as provas do ENEM de 2010 à 2018 percebe-se mais de 25% do total de questões da área de Matemática e suas tecnologias deste período referem-se à Geometria. Sua grande parte distribuída em Geometria Plana, Métrica e Espacial. Os conteúdos relacionados ao estudo de Geometria Analítica não possuem presença ativa neste modelo de prova, divergindo da proposta adotada nos exames de admissão para o Ensino Superior (Vestibulares Tradicionais), onde este tema representa uma parte significativa da prova de Matemática.

Observando as questões propostas nesta avaliação externa, podemos aferir que a aplicabilidade dos conteúdos em situações-problema de contexto real é o foco desta reforma, como dito anteriormente o importante é a significação do saber, para aplicação. Como apresentado no exemplo a seguir. ([21],2017, p.24)

**Exemplo 4** (ENEM 2017) *O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes as faces. Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a:*

- a. 10
- b. 12
- c. 25
- d. 42
- e. 50

É notória a diferença de abordagem entre a questão do Exame Nacional do Ensino Médio e do Vestibular Tradicional. É necessário que o aluno tenha, inicialmente, a habilidade de



leitura e compreensão e, especificadamente, tenha desenvolvido a Competência 9 da área de Linguagens e Códigos e suas Tecnologias, que se refere a:

Entender os princípios, a natureza, a função e o impacto das tecnologias da comunicação e da informação na sua vida pessoal e social, no desenvolvimento do conhecimento, associando-o aos conhecimentos científicos, às linguagens que lhes dão suporte, às demais tecnologias, aos processos de produção e aos problemas que se propõem solucionar(...)([27], p.4)

E também as habilidades específicas relacionadas a disciplina de Matemática.

- H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Em síntese o aluno utilizará a Relação de Euler para solucionar a questão. O fato determinante nesta abordagem é dar significado na aprendizagem de tal relação matemática, na aplicabilidade do instrumento matemático. Vejamos outro exemplo deste modelo de situações - problema:

**Exemplo 5** (ENEM 2013) *Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:*

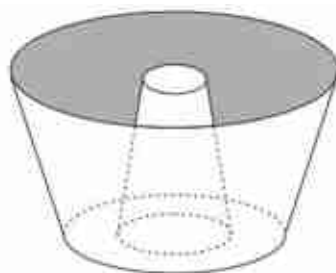


Figura 3: Exame Nacional do Ensino Médio 2013

*Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:*

- a. um tronco de cone e um cilindro.
- b. um cone e um cilindro.
- c. um tronco de pirâmide e um cilindro.
- d. dois troncos de cone.
- e. dois cilindros.

A figura é comum a todos os alunos do Ensino Médio, presente em nosso cotidiano, logo imediatamente o aluno reconhece a presença da matemática em seu meio e ao desenvolver a habilidade prevista nos PCN's no conteúdo de Geometria Espacial: *Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções*. Desta forma o aluno consegue reconhecer na Figura 3 a presença de dois troncos de cones.

Essa mudança na forma de analisar a aprendizagem dos conteúdos, reflete diretamente nas metodologias utilizadas na sala de aula pelo professor. O modelo de repasse dos conhecimentos adquiridos ao longo da história da Matemática não atende mais as especificações da reforma implementada com os PCN's. Pedagogias Construtivistas e Interacionistas, como as propostas por Jean Piaget, Vygotsky e Wallon são reforçadas com a LDB DE 1996 e claramente presentes nas ações metodológicas propostas nos parâmetros. Nos temas transversais e interdisciplinares a Geometria está presente em aspectos regionais como o estudo dos mosaicos, as formas utilizadas na arte cerâmica, relação com fenômenos físicos ou químicos.

A estratégia proposta pelo próprio documento [11] consiste preferencialmente na resolução de situações-problema, sempre diante de uma ação investigativa caracterizando os aspectos da descoberta. O aluno é instigado a perceber, por exemplo, que pode dividir o estudo da área de um trapézio isósceles em dois triângulos retângulos e um retângulo, ou ainda somente em triângulos retângulos, dispensando a necessidade de memorização da área do trapézio nesta situação. A postura do professor sofre modificações importantes nesta análise, pois deixa de ter o papel central na aprendizagem e passa a figurar como mediador no ensino, pois o aluno constrói seu conhecimento diretamente da sua interação com o meio.

Configura-se na nova abordagem o surgimento da transposição didática, que representa em linhas gerais o instrumento pelo qual transforma-se o conhecimento científico em conhecimento escolar. situações-problema proporcionam momentos efetivos de aprendizagem, pois possibilitam aos alunos buscarem conhecimentos que já têm e perceberem que outros lhes faltam. Por meio das situações-problema os alunos elaboram estratégias, socializam ideias e interagem com a aprendizagem do currículo oculto, desenvolvendo competências,

habilidades e outros saberes novos ou já construídos, que se articulam entre si, permitindo ver o conhecimento matemático como algo dinâmico, interativo e complexo.

### 3.3 Aprendizagem de Geometria pela Análise do SAEB

As informações geradas a partir da realização do SAEB são expressas em uma nota numérica chamada de Média de Proficiência. Em seguida, essas Médias são agrupadas em níveis que, por sua vez, oferecem um panorama de quais habilidades matemáticas estão bem desenvolvidas ou ainda, as que precisam de maior atenção.

A proficiência na disciplina de Matemática no SAEB é medida de acordo com o conjunto de habilidades adquiridas ao longo do Ensino Médio, pois a avaliação nesta etapa da Educação Básica, ocorre no 3º ano. A escala de distribuição da proficiência está dividida em 11 níveis, de 0 à 10. Sendo nível 0, a representação utilizada para descrever o aluno que não conseguiu atingir desempenho superior a 225 pontos, neste caso o educando não consegue corresponder a nenhuma das habilidades atribuídas ao Ensino Médio. Enfatizaremos nosso estudo nas habilidades relacionadas a Geometria considerando que os níveis de aprendizagem são cumulativos, logo a presença do educando em um nível pressupõe a aquisição de todas as competências dos níveis anteriores.

#### Nível 0 - Desempenho menor que 225 pontos

- O aluno não apresentou nenhuma habilidade relativa aos conteúdos do Ensino Médio.

#### Nível 1 - Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250

- O nível não descreve habilidades relacionadas à Geometria.

#### Nível 2 - Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275

- Além das habilidades dos níveis anteriores, os estudantes provavelmente são capazes de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro quadrante.

#### Nível 3 - Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300

- O nível não descreve habilidades relacionadas à Geometria.

#### Nível 4 - Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325

- Resolver problemas envolvendo área de uma região composta por retângulos a partir de medidas fornecidas em texto e figura.

Nível 5 - Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350

- Determinar medidas de segmentos por meio da semelhança entre dois polígonos.

Nível 6 - Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375

- Reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano e localizados em quadrantes diferentes do primeiro.
- Associar um sólido geométrico simples a uma planificação usual dada.
- Resolver problemas envolvendo Teorema de Pitágoras, para calcular a medida da hipotenusa de um triângulo pitagórico, a partir de informações apresentadas textualmente e em uma figura.
- Determinar a razão de semelhança entre as imagens de um mesmo objeto em escalas diferentes.
- Determinar o volume de um paralelepípedo retângulo, dada sua representação espacial.

Nível 7 - Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400

- Determinar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, por meio de razões trigonométricas, fornecendo ou não as fórmulas.
- Determinar, com o uso do teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo não pitagórico.
- Determinar a área de um polígono não convexo composto por retângulos e triângulos, a partir de informações fornecidas na figura.
- Resolver problemas por meio de semelhança de triângulos sem apoio de figura.
- Resolver problemas envolvendo perímetros de triângulos equiláteros que compõem uma figura.

Nível 8 - Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425

- Reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes. Determinar uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras.

- Determinar a equação de uma circunferência, dados o centro e o raio. Determinar a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler.
- Resolver problema envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo, com apoio de figura.
- Associar um prisma a uma planificação usual dada.
- Determinar a área da superfície de uma pirâmide regular.
- Determinar o volume de um paralelepípedo, dadas suas dimensões em unidades diferentes.
- Determinar o volume de cilindros

#### Nível 9 - Desempenho maior ou igual a 425 e menor que 450

- Reconhecer a equação que representa uma circunferência, dentre diversas equações dadas.
- Determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir de sua equação geral.
- Resolver problemas envolvendo relações métricas em um triângulo retângulo que é parte de uma figura plana dada.
- Determinar o volume de pirâmides regulares.
- Resolver problemas envolvendo áreas de círculos e polígonos.
- Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos com apoio de figura na qual os dois triângulos apresentam ângulos opostos pelos vértices.
- Resolver problemas envolvendo cálculo de volume de cilindros.

#### Nível 10 -Desempenho maior ou igual a 450

- O nível não descreve habilidades relacionadas à Geometria.

A descrição das habilidades está completamente ligada aos conteúdos propostos nos PCNEM e na Matriz Referência do ENEM, bem como ao modelo da resolução de situações-problema envolvendo aspectos de interdisciplinaridade e associação com temas presentes no cotidiano dos discentes.

Em contra-partida a todos os aspectos positivos da implementação dos Parâmetros Curriculares e o debate sobre metodologias que efetivem a aprendizagem, o Sistema de Avaliação da Educação Básica apresenta um quadro preocupante sobre a aprendizagem de Matemática e Geometria no Ensino Médio. Um recorte desta situação pode ser visualizada no gráfico da Figura 4 construído com base nos dados apresentados no boletim de resultados do SAEB 2017 [4].

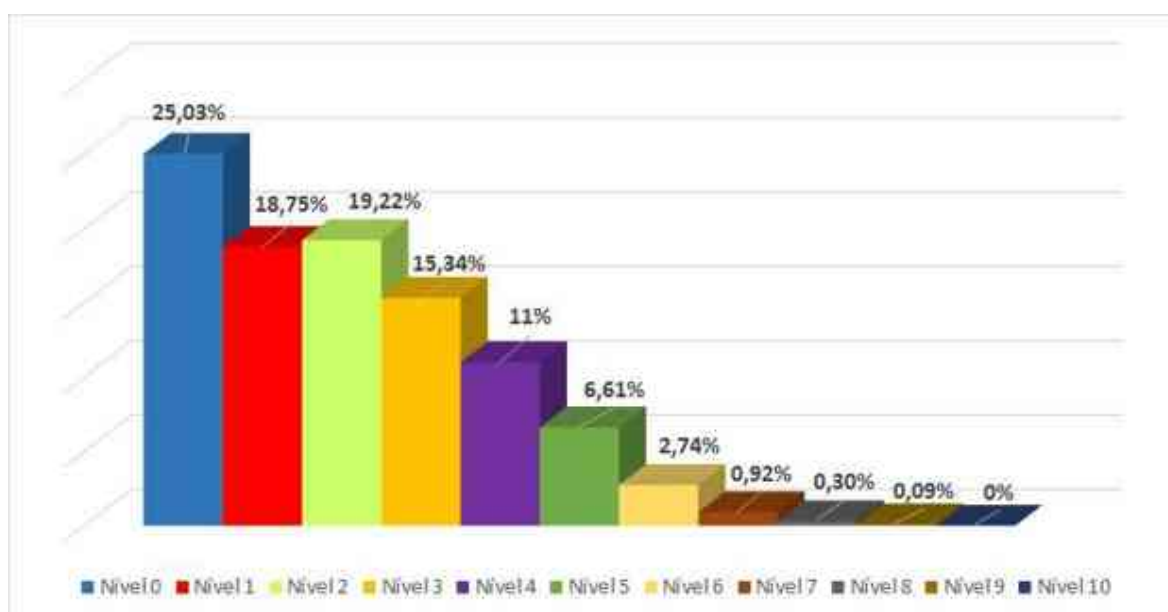


Figura 4: Resultado de Matemática do SAEB 2017

Analisando os resultados observa-se que 63,73% dos alunos se encontram entre os três primeiros níveis; 11% no nível 4; 6,61% no nível 5 e apenas 3,75% possuem proficiência entre 350 e 450. É válido ressaltar que no nível 10 a quantidade de alunos é inexpressiva sendo representada por 0%.

Dados das avaliações externas sobre a aprendizagem da Matemática, foram a mola propulsora para que o debate sobre o currículo e os métodos de ensino continuassem a convergir no sentido da necessidade de uma Base Nacional Comum, de investimentos na formação de professores, e tantas outras metas estipuladas no Plano Nacional de Educação.

### 3.4 Geometria no Novo Ensino Médio e Base Nacional Comum

#### Curricular

Dados do SAEB e ENEM, bem como evasão escolar, apontam que as políticas públicas implementadas no final da década de 90 não acompanharam as demandas da nova juventude. Os conteúdos ministrados, apesar da preocupação dos PCNEM com a contextualização, apresentam-se, de acordo com os dados das avaliações externas, alheios, principalmente, aos anseios e interesses desta geração. Diante deste cenário, em 25 de junho de 2014, é publicado o Plano Nacional de Educação - PNE, que apresentava como estratégia para execução da meta 3 referente a universalização do Ensino Médio a pactuação entre os entes municipais, estaduais e federal em prol da implementação de uma Base Nacional Comum Curricular e a estruturação do Ensino Médio. A BNCC do Ensino Médio aprovada em 2018, será implementada de forma gradativa a partir de 2020.

A proposta da BNCC não se caracteriza pela normatização de um currículo, diferentemente das reformas anteriores, a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio visa o que o texto descreve como aprendizagem essencial a ser garantida aos alunos. Cada escola terá a flexibilidade na construção do seu currículo levando em conta as aspirações dos estudantes da região e aspectos sócio-culturais (Itinerários Formativos).

O protagonismo na aprendizagem é uma das frases que permeiam por todo o documento. A metodologia a ser aplicada deve ter por base a articulação entre as áreas almejadas pelos educandos, ocorrendo prioritariamente por meio de Laboratórios; Oficinas; Clubes; Observatórios; Núcleos de Estudos e Núcleos de criação artística.

A disciplina de Matemática continua presente em todas as etapas do Ensino Médio e possui competências que envolvem, *Raciocinar, Representar, Comunicar-se e Argumentar*, tendo por objetivo a descoberta do conhecimento e suas articulações que são construídas pelos pares de ideias fundamentais:

- *Varição e Constância*, que se baseia na análise e observação da permanência ou alterações de dadas características ou representações;
- *Certeza e Incerteza*, presentes no desenvolvimento da argumentação e demonstrações geométricas;
- *Movimento e posição*, presentes por exemplo, no estudo das transformações isométricas e homotéticas;

- *Relação e Inter-relações*, como os movimentos de rotação de figuras que podem ser expressos por meio de funções, e as inter-relações como Álgebra e Geometria.

Conforme o documento [6] o ensino e aprendizagem da Matemática está distribuído em cinco competências que se ramificam em 45 habilidades das quais, destacamos a seguir aquelas relacionadas ao estudo de Geometria.

- (EM13MAT103) Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade;
- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras;
- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- (EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança;
- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados;
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e Geometria dinâmica;
- (EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas;



- (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras;
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de Geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados;
- (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica;
- (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

A organização destas habilidades no currículo será realizada por cada instituição de ensino. De forma geral o que percebe-se é a presença das tecnologias como ferramenta metodológica ou como componente para interpretação dos conteúdos geométricos. Todas as habilidades estão relacionadas a temas de relevância para sociedade atual. O foco não está na quantidade de conteúdos que compõem o currículo, mas na qualidade da apropriação destes.

Não se trata de inserir apenas uso de jogos e *softwares* nas aulas de Geometria, a proposta trata de repensar a forma de ensinar e aprender Matemática. O ensino não pode ser dissociado do momento vivido pela sociedade, e na era da realidade virtual, jogos e tecnologias 3D, é evidente que não é suficiente explicar as estruturas de um cubo desenhando em uma lousa com pincel. Ou então explicar o processo de translação e rotação de figuras, pedindo que o educando imagine a situação, já que a mesma não pode ser exploradas com riqueza de detalhes no livro didático.

É refutando esta prática que a proposta da BNCC diverge completamente dos modelos adotados nas reformas anteriores no Ensino Médio e lança um novo desafio aos professores de Matemática no que se concerne a elaboração de uma práxis que atenda as novas especificidades dos alunos e do próprio Sistema de Ensino.

### 3.5 Comparando os Currículos de Geometria nas Reformas

Antes da Reforma Francisco Campos, o que havia não era um currículo de Matemática, mas sim uma lista de conteúdos, denominados “Programas”. Euclides Roxo, foi pioneiro ao construir por meio da publicação de documentos oficiais algumas recomendações de cunho metodológico, além da lista de conteúdos. A partir da década de 1990, com a expansão do sistema de Ensino Secundário os “Programas” foram sendo substituídos por documentos denominados “Guias Curriculares”, “Parâmetros Curriculares Nacionais” até o mais recente, denominado de Base Nacional Comum Curricular.

Em nossa pesquisa fica claro que todos os documentos, desde 1931, vão além da listagem de conteúdos e conferem destaque às finalidades do Ensino de Geometria, aos objetivos gerais e específicos e às questões de natureza metodológica, didática, incluindo indicações sobre avaliação. Nosso relato nos revela que os conteúdos de Geometria não sofreram muitas transformações desde a Reforma Francisco Campos até a proposta curricular da BNCC do Ensino Médio. O que podemos aferir é que refletindo os anseios da sociedade e do governo da época, alguns tópicos são mais evidenciados do que outros para suprir estas demandas sociais.

Seja como instrumento de preparação para o Ensino Superior ou para o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual, a Geometria, continua sendo indispensável para o desenvolvimento dos objetivos previstos para a Educação.

Para auxiliar nossa reflexão, segue uma síntese dos conteúdos que compõem o currículo de Geometria em cada uma das reformas apresentadas, bem como uma breve descrição da metodologia utilizada em cada período. É importante salientar que nosso estudo foi realizado com base nos documentos normatizadores de cada época, não é objeto de estudo deste trabalho analisar como estas políticas públicas foram, de fato, implementadas nas escolas brasileiras.

Reforma	Francisco Campos	Gustavo Cajariano	1970s e 1970s	Novo Ensino Médio e BNCC
Principais Mudanças	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Geometria foi incorporada a disciplina de Matemática.</li> <li>✓ Formas geométricas;</li> <li>✓ Área de figuras planas; áreas equivalentes</li> <li>✓ Círculo;</li> <li>✓ Ângulos e medidas de ângulos;</li> <li>✓ Retas;</li> <li>✓ Triângulos e congruência de triângulos;</li> <li>✓ Figuras semelhantes;</li> <li>✓ Deslocamentos no plano;</li> <li>✓ Proposições fundamentais para geometria dedutiva;</li> <li>✓ Polígonos; polígonos regulares</li> <li>✓ Quadriláteros e suas propriedades</li> <li>✓ Estudo de volume e fórmulas;</li> <li>✓ Retas no espaço;</li> <li>✓ Ângulos de poliedros;</li> <li>✓ Tredos suplementares;</li> <li>✓ Prismas, pirâmides, cilindros e cones;</li> <li>✓ Esferas;</li> <li>✓ Superfícies de revolução e superfícies regradas;</li> <li>✓ Construções geométricas;</li> <li>✓ Geometria analítica [ curso complementar]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Propôs a apresentação de Geometria desvinculada da Álgebra e Aritmética</li> <li>✓ Sólidos geométricos;</li> <li>✓ Plano;</li> <li>✓ Retas;</li> <li>✓ Ângulos;</li> <li>✓ Retas no espaço;</li> <li>✓ Polígonos; polígonos regulares</li> <li>✓ Círculo;</li> <li>✓ Poliedros;</li> <li>✓ Corpos redondos;</li> <li>✓ Área de figuras planas; área de polígonos;</li> <li>✓ Volume;</li> <li>✓ Proposições geométricas;</li> <li>✓ Lugares geométricos;</li> <li>✓ Congruência;</li> <li>✓ Triângulos e congruência de triângulos;</li> <li>✓ Quadriláteros;</li> <li>✓ Deslocamento no plano;</li> <li>✓ Divisão harmônica;</li> <li>✓ Semelhança de triângulos e polígonos;</li> <li>✓ Relações métricas no triângulo retângulo;</li> <li>✓ Construções geométricas;</li> <li>✓ Geometria analítica [ como clássico]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Geometria está inserida na disciplina de Matemática, que por sua vez, é componente da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.</li> <li>✓ Semelhança;</li> <li>✓ Congruência;</li> <li>✓ Representações de figuras planas;</li> <li>✓ Elementos dos poliedros, sua classificação e representação;</li> <li>✓ Sólidos redondos; propriedades relativas à posição: interseção, paralelismo e perpendicularismo;</li> <li>✓ Inscrição e circunscção de sólidos;</li> <li>✓ Áreas, estimativa, valor exato e aproximação</li> <li>✓ Volumes, estimativa, valor exato e aproximação;</li> <li>✓ Representações no plano cartesiano e equações;</li> <li>✓ Interseção e posições relativas de figuras</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Geometria está inserida na área de Matemática e suas Tecnologias.</li> <li>✓ Grandezas e unidades de medidas (inclusive as contemporâneas);</li> <li>✓ Transformações isométricas;</li> <li>✓ Transformações homotéticas;</li> <li>✓ Área de superfícies;</li> <li>✓ Triângulos e congruência de triângulos;</li> <li>✓ Relações métricas no triângulo;</li> <li>✓ Semelhança;</li> <li>✓ Corpos redondos, área e volume;</li> <li>✓ Representações no plano cartesiano e equações;</li> <li>✓ Visas ortogonais de figuras espaciais;</li> <li>✓ Volume;</li> <li>✓ Polígono e suas propriedades;</li> <li>✓ Deformação de áreas e ângulos;</li> <li>✓ Quadriláteros e suas propriedades;</li> </ul>
Síntese do Currículo de Geometria				
Metodologia de Ensino	<p>Metodologia tradicional, repasse dos conteúdos de forma desvinculada da realidade, resolução de exercícios com foco na aplicação de fórmulas e ênfase nas construções geométricas.</p>	<p>Metodologia tradicional, repasse dos conteúdos de forma desvinculada da realidade, resolução de exercícios (com foco na aplicação de fórmulas e ênfase nas construções geométricas.</p>	<p>Ensino realizado por meio do desenvolvimento de competências e habilidades, com foco na resolução de situações problema que levem o educando a relacionar a geometria com as demais disciplinas componentes do currículo.</p> <p>Resolução de exercício interdisciplinares e que abordem temas transversais.</p>	<p>Ensino pautado no desenvolvimento de competências gerais que revertam a aprendizagem escolar em ações de modificação da realidade do educando ao passo que a aprendizagem significativa está atrelada a sociedade contemporânea e reflete os anseios da juventude atual inserida no meio tecnológico.</p>

Figura 5: Currículo de Geometria nas Reformas do Ensino Médio

O quadro apresentado na Figura 5 mostra que não ocorreram alterações no Ensino de Geometria durante a transição da Reforma Francisco Campos para a Reforma Gustavo Capanema, apesar das divergências entre Pe. Arlindo e Euclides Roxo sobre a unificação da disciplina de Matemática, a metodologia aplicada continuou pautada no Ensino Enciclopedista e com ênfase nas construções geométricas. A Geometria Analítica apresenta-se nos programas complementares em ambas reformas devido a sua presença expressiva nos exames de admissão para cursos superiores. Apesar da publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1961, este modelo curricular proposto por Gustavo Capanema se manteve quase intacto até a publicação da LDB 9394/96 e dos Parâmetros Curriculares Nacionais em 1997.

Com os PCNEM percebe-se que o currículo do Ensino Médio foi reduzido, pois muitos dos conteúdos presentes nas reformas anteriores, foram remanejados para o Ensino Fundamental enfatizando a ideia de continuidade proposta na metodologia com foco no desenvolvimento de competências e habilidades. A Geometria Espacial e Métrica ganha destaque com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, pois pode ser facilmente inserida na resolução de situações-problema de forma interdisciplinar ou que envolvam temas transversais.

Como o currículo deve refletir as necessidades da sociedade atual, a Geometria proposta na Base Nacional Comum Curricular traz em sua abordagem a inserção do ensino na sociedade contemporânea e tecnológica, enfatizando a significação dos conteúdos. Desta forma o currículo de Geometria do Ensino Médio deve contemplar temas que possibilitem a compreensão e transformação desta época.

## 4 Sugestões Metodológicas para o Ensino de Geometria

Diante da nova reforma na educação brasileira, *O Novo Ensino Médio*, intensifica-se o debate sobre as modificações das metodologias para o ensino e aprendizagem da Geometria nesta etapa da Educação Básica. A formação continuada do professor de Matemática e a constante busca por aperfeiçoamento são instrumentos indispensáveis para a eficácia do novo projeto brasileiro de educação.

Neste capítulo apresentamos algumas sugestões de aplicativos e materiais que auxiliam no desenvolvimento de aulas de Geometria, possibilitando as ideias de protagonismo na aprendizagem, bem como a interação dos temas estudados com o meio e outros temas dos diversos itinerários formativos a serem construídos em cada estabelecimento de ensino.

Destacamos a Geometria Dinâmica como um recurso que corrobora com os objetivos propostos na BNCC. Entende-se por Geometria Dinâmica a utilização de *software* no auxílio de construções geométricas para estudo das propriedades de um objeto-base. A diversidade de ações a serem realizadas em um *software* de Geometria, possibilita a inserção deste instrumento nos mais diversos campos de estudo. As construções e alterações de forma experimental leva o educando ao prazer da descoberta de conceitos, dos possíveis aspectos flexíveis ou estáticos; de quais “leis matemáticas” podem ser modificadas em uma dada figura e tantas outras nuances em cada estudo realizado.

Nesta perspectiva apresentamos propostas de estudo com a utilização dos *softwares*: GeoGebra, Poly Pro e Cinderella. Também demonstramos algumas possibilidades de uso do material concreto Geolig.

### 4.1 Geometria Espacial com Poly Pro

O Polly Pro foi desenvolvido pela *Pedagoguery Software Inc.* no ano de 2013, com a finalidade de proporcionar aos alunos o estudo de Geometria Espacial de forma dinâmica. O *software* disponibilizado de forma gratuita, na versão limitada, no site <http://www.peda.com/polypro/>, possibilita a visualização 3D e 2D dos sólidos geométricos. A sua interface, apesar de não oferecer a opção de linguagem em Português, é simples e intuitiva para o usuário.

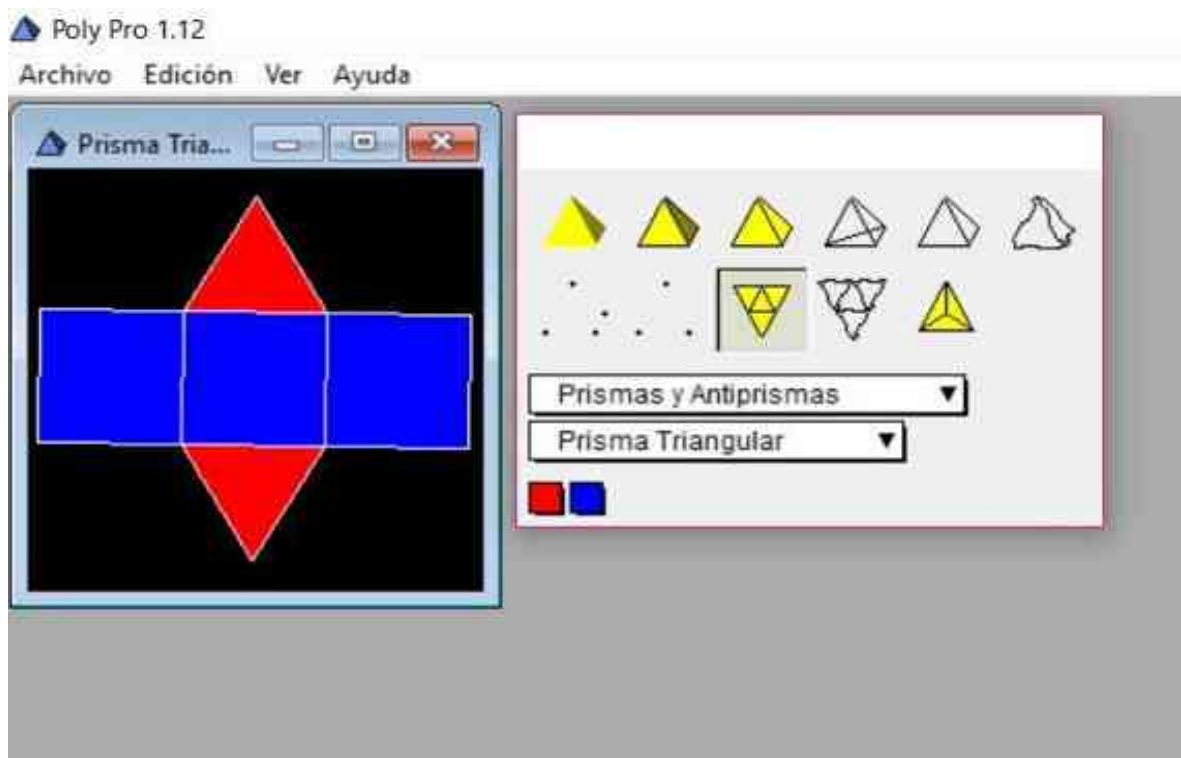


Figura 6: Interface Poly Pro 1.2

Corroborando com a proposta da Base Nacional Comum Curricular, em específico com a habilidade EM13MAT407, o professor pode utilizar a ferramenta como suporte para a confecção de moldes das figuras espaciais, tendo em vista, que o *software* disponibiliza o recurso de impressão dos modelos planificados. Para acesso o professor deve escolher a forma da planificação dentre os liberados na barra de tarefas, posteriormente o grupo de sólidos e a figura espacial, objeto de estudo. Os grupos disponíveis, na versão gratuita, são : *Sólidos Platônicos; Sólidos de Arquimedes, Prismas e Antiprismas; Sólidos de Johnson, Deltaedros, Sólidos de Catalan; Dipirâmides e Deltaedros; Esferas e Cúpulas Geodésicas.*

Uma possível sugestão de utilização deste recurso, no Ensino Médio, pode ocorrer no estudo dos Sólidos de Platão.

Inicialmente o professor deve revisar com os alunos alguns conceitos importantes no estudos dos Poliedros. Neste caso optamos por utilizar a definição apresentada em [29].

**Definição 1** *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um destes polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada um destes polígonos chama-se uma **face** do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma **aresta** do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado **vértice** do poliedro.*

Podemos também definir Poliedro Convexo e Poliedro Regular.

**Definição 2** *Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos. ([29], p.223)*

**Definição 3** *Se diz que um poliedro é regular quando todas as suas faces são regiões poligonais regulares congruentes e quando cada vértice concorre a mesma quantidade de arestas.*

Utilizando o Poly Pro o professor poderá disponibilizar aos alunos planificações de diversos poliedros, como os da Figura 7. O discente, por meio do método da tentativa, busca realizar a construção espacial do objeto, desenvolvendo as competências investigativas previstas na BNCC. Durante a construção o educando poderá discutir com os demais colegas de sala sobre elementos cotidianos que podem ser representados pelo objeto construído, bem como possíveis erros e soluções durante o processo de transição da figura 2D para 3D.

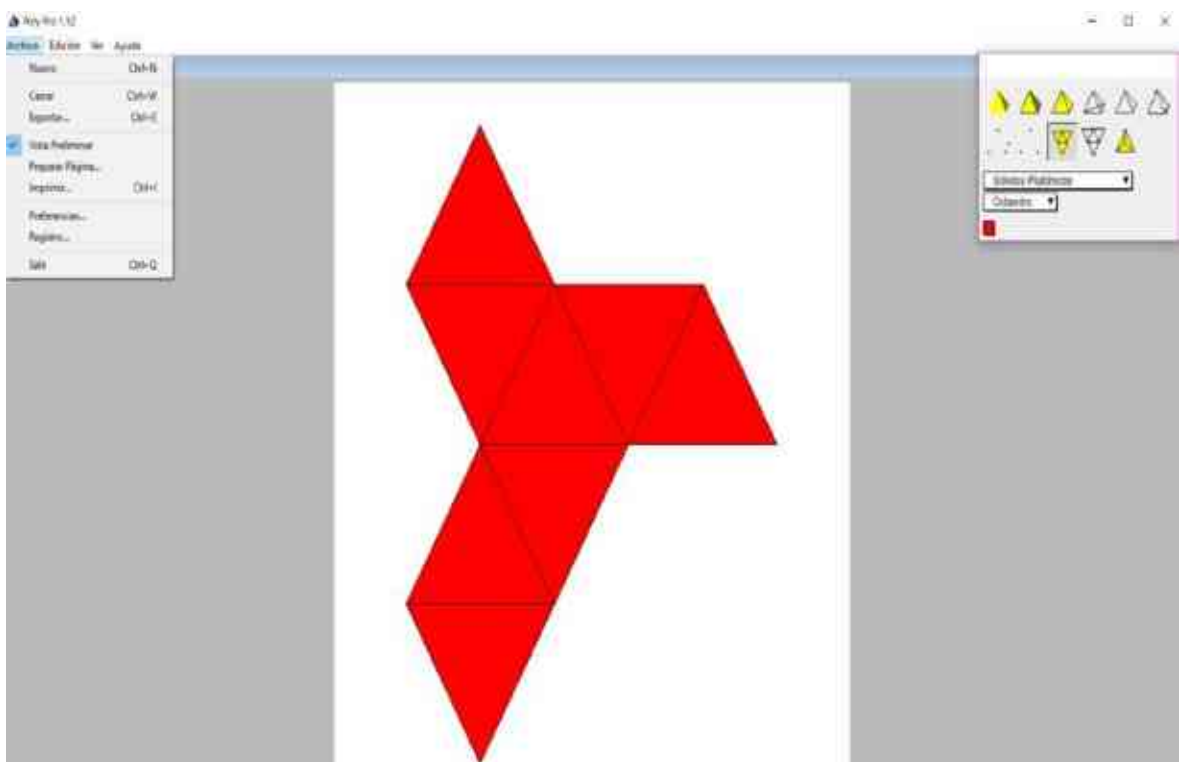


Figura 7: Planificação do Octaedro

O professor pode utilizar o recurso de animação para oferecer aos alunos a possibilidade de comparação entre o objeto construído em cada grupo e o modelo dinâmico apresentado

no Poly Pro, relacionando os elementos (vértices, faces e arestas) apresentados na definição de Poliedro.



Figura 8: Animação da transição do dodecaedro no modelo 2D para 3D

Consolidada a definição dos elementos de um poliedro o professor distribui em equipes as planificações de 5 sólidos (disponibilizadas pelo autor nos anexos deste trabalho): Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro solicitando aos alunos que analisem as semelhanças entre eles, tentando relacionar as arestas, faces e vértices. É de suma importância, segundo a BNCC, que o aluno desenvolva a habilidade investigativa, que seja capaz de relacionar diversos elementos e descobrir padrões em uma dada situação - problema.

Depois de um determinado tempo o professor pode apresentar a definição de Sólido de Platão.

**Definição 4** Um Poliedro é considerado de Platão se:

- É convexo;
- É regular;
- Número de arestas é igual em todas as faces;



- Cada vértice incidem o mesmo número de arestas.

Os alunos devem verificar se os sólidos distribuídos, inicialmente, pelo professor contemplam todos os critérios de um Poliedro de Platão. Neste momento o docente pode aproveitar para expor a planificação e animação dos sólidos no Poly Pro apresentando alguns tópicos sobre Platão.

Filósofo Grego, discípulo de Sócrates, foi um grande entusiasta da Matemática e Geometria. Segundo historiadores, na entrada da Academia, estaria escrito a frase: *Que não entre quem não saiba geometria.*

Para Platão a Matemática era a chave para a compreensão do Universo, desta forma, ele concebia o mundo como sendo constituído por quatro elementos básicos: a Terra, o Fogo, o Ar e a Água, e estabelecia uma associação mística entre estes e os sólidos. Na matéria havia porções limitadas por triângulos ou quadrados, formando-se elementos que diferem entre si pela natureza da forma das suas superfícies periféricas.

Se forem quadradas temos o cubo, ao qual Platão fazia corresponder a Terra.

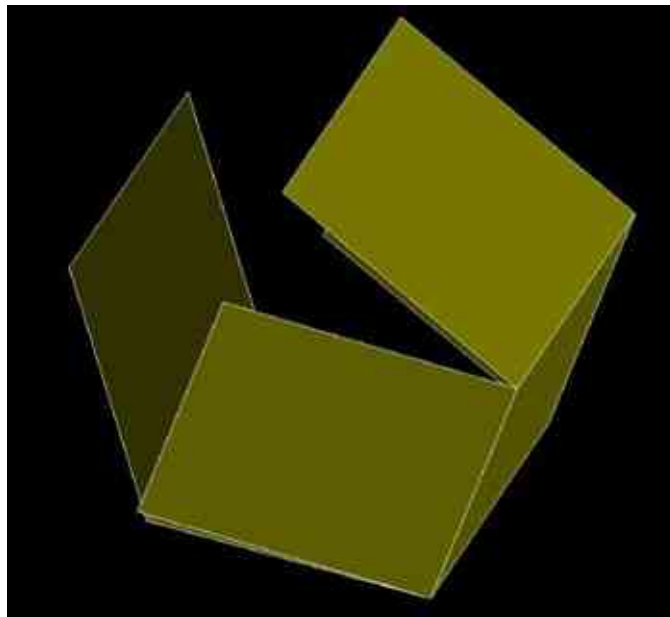


Figura 9: Poly Pro: Animação do Cubo 2D para 3D

No caso de serem triângulos, formando um tetraedro, associa-se ao Fogo, cuja natureza penetrante está simbolizada na agudeza dos seus vértices.

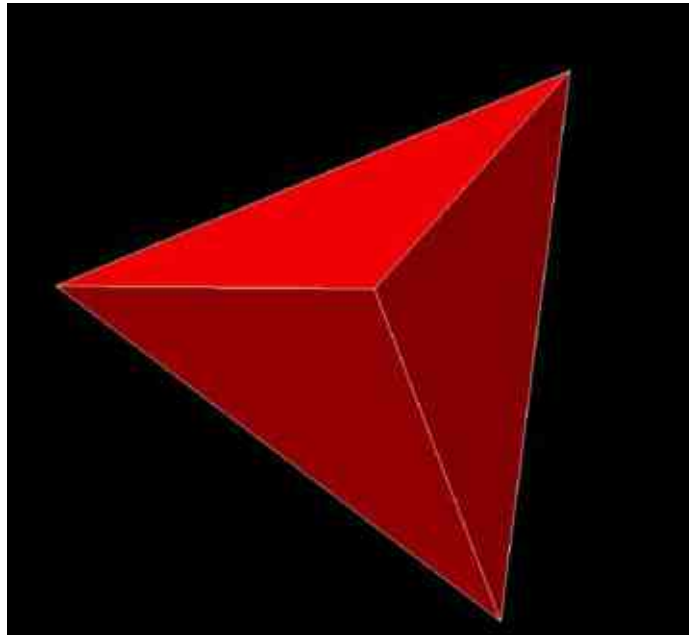


Figura 10: Poly Pro: Tetraedro

O octaedro era relacionado ao ar, pois, para Platão, o átomo do ar era um poliedro de oito faces e possuía maior mobilidade crescente e intermediária entre a terra e o fogo.

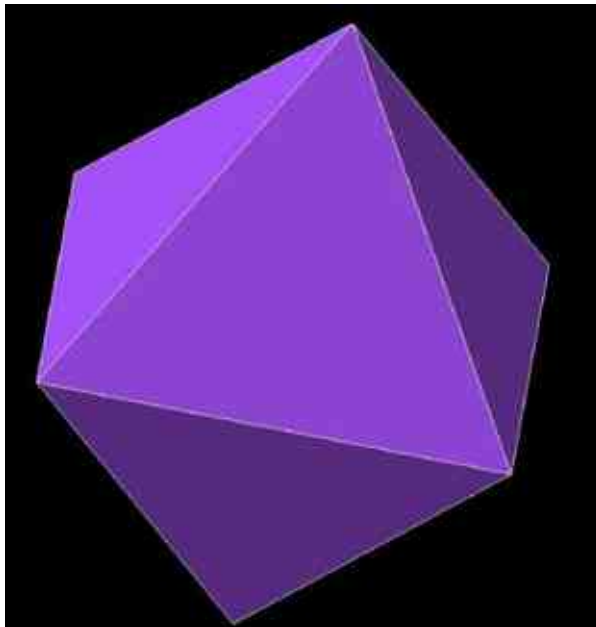


Figura 11: Poly Pro: Octaedro

O icosaedro representava a água e, da mesma forma que o octaedro, possuía maior mobilidade crescente e intermediária entre a terra e o fogo.

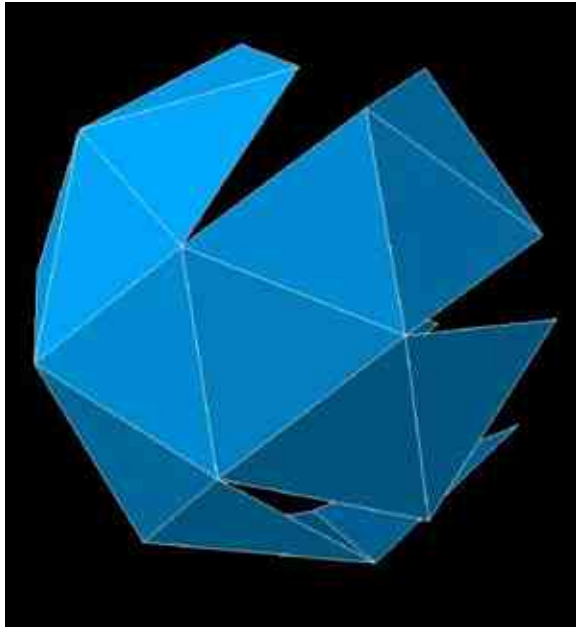


Figura 12: Poly Pro: Animação do Icosaedro do Modelo 2D para 3D

O quinto sólido, o dodecaedro, foi considerado por Platão como o símbolo do Universo.

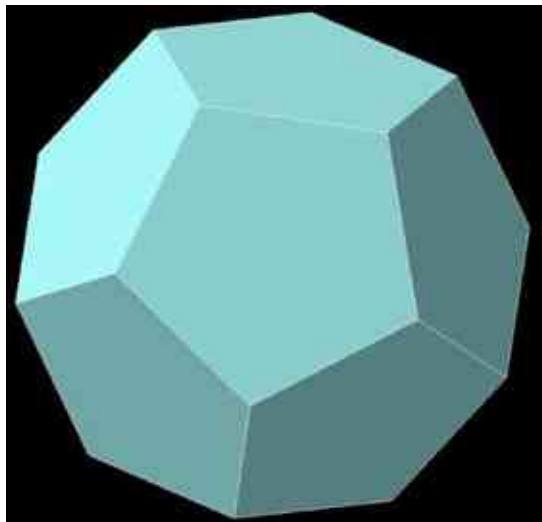


Figura 13: Poly Pro: Dodecaedro

Após este momento pode-se propor a construção da Tabela 2 aos alunos, pedindo

novamente, que eles identifiquem um padrão que relacione as arestas, faces e vértices dos sólidos platônicos.

Tabela 2: Características dos Sólidos de Platão - Aluno

POLIEDRO	ARESTAS	FACES	VÉRTICES
TETRAEDRO			
CUBO			
OCTAEDRO			
DODECAEDRO			
ICOSAEDRO			

Este debate entre os alunos das possíveis relações encontradas deve ser estimulado de forma que o grupo consiga refutar possíveis relações equivocadas por meio de contra exemplos, com foco em desenvolver competências previstas em [6].

Depois da discussão a tabela preenchida corretamente é apresentada. Neste momento, o professor pode discutir com os alunos as relações construídas por cada equipe, incentivando-os ao desenvolvimento da habilidade de observação e argumentação.

Tabela 3: Características dos Sólidos de Platão

POLIEDRO	ARESTAS	FACES	VÉRTICES
TETRAEDRO	6	4	4
CUBO	12	6	8
OCTAEDRO	12	8	6
DODECAEDRO	30	12	20
ICOSAEDRO	30	20	12

E por fim o Teorema de Euler, também comumente chamado de Relação de Euler é apresentado aos alunos pedindo que eles verifiquem sua aplicação nos Sólidos de Platão com base nos dados obtidos na construção da Tabela 2.

**Teorema 2** *Em todo poliedro convexo com  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces, vale a relação:*

$$V - A + F = 2.$$

É comum que durante esta exposição possam surgir questionamentos acerca de poliedros não regulares, por exemplo, o sólido que representa a bola de futebol. O professor pode finalizar este modelo de aula apresentando alguns destes modelos disponíveis no software.

**Definição 5** *Poliedros não regulares são todos aqueles que não se classificam como poliedros regulares.*

São exemplos de Poliedros não regulares: Sólidos de Arquimedes, Sólidos de Catalán, Prismas, Antiprismas e Pirâmides. Retomando o exemplo da bola de futebol, pode-se explorar os Sólidos de Arquimedes.

**Definição 6** *Os Poliedros Arquimedianos são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de pelo menos dois tipos diferentes, e todos os seus vértices são do mesmo tipo, isto é, há o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice.*

Existem apenas treze poliedros de Arquimedes: Tetraedro Truncado, Cuboctaedro, Cubo Truncado, Octaedro Truncado, Rombicuboctaedro, Cuboctaedro Truncado, Icosidodecaedro, Dodecaedro Truncado, Icosaedro Truncado, Rombicosidodecaedro, Icosidodecaedro Truncado, Cubo Snub, Icosidodecaedro Snub. Estes sólidos são subdivididos em dois grupos: Sólidos obtidos por *Truncamento* ou *Snubificação*.

Entende-se por *Truncamento* a ação de fazer cortes parciais e simétricos nos seus vértices ou arestas de modo que após o corte as seções formadas sejam polígonos. Dos 13 poliedros de Arquimedes, 11 são obtidos por Truncamento.

Como exemplo de objeto que tem a estrutura poliédrica descrita, podemos citar o Icosaedro Truncado, que é o modelo utilizado para confecção da bola de futebol utilizada desde 1970 até a Copa do Mundo da África do Sul em 2010 quando o modelo foi substituído pela Jabulani.

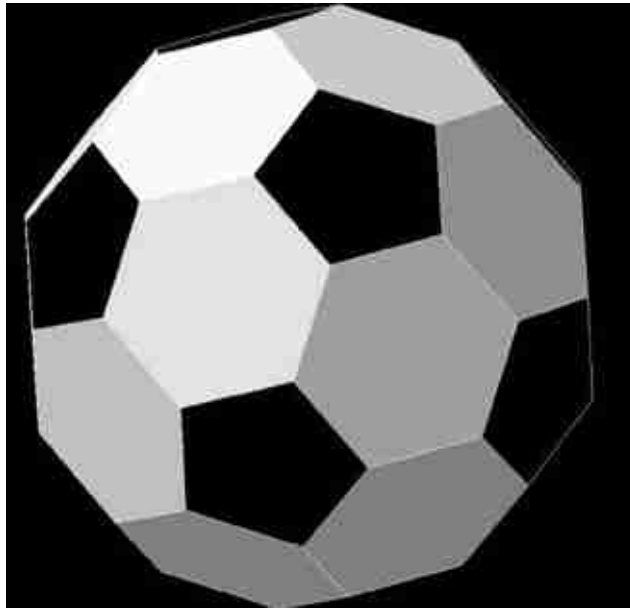


Figura 14: Poly Pro: Icosaedro Truncado

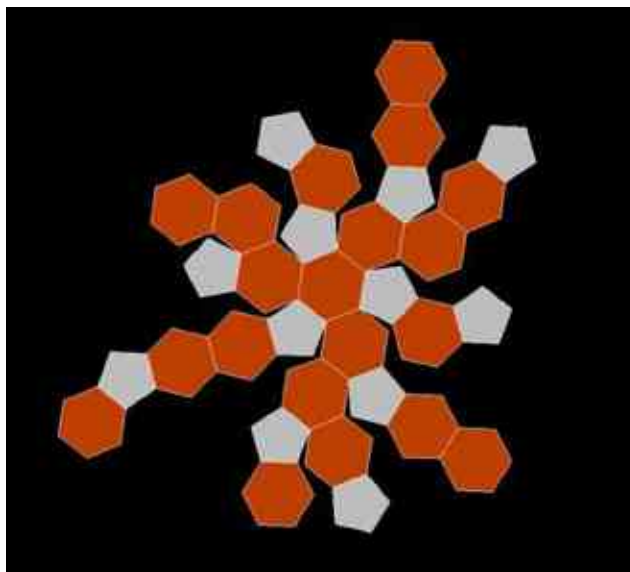


Figura 15: Poly Pro: Planificação do Icosaedro Truncado

A *Snubificação* é uma operação que consiste em afastar todas as faces do poliedro, rodar as mesmas de um certo ângulo, normalmente  $45^\circ$ , e preencher os espaços vazios resultantes com triângulos. Apenas dois poliedros de Arquimedes são obtidos por este

método: Icosidodecaedro Snub e o Cubo Snub. A Figura 16 apresenta a forma espacial de um Icosidodecaedro Snub.

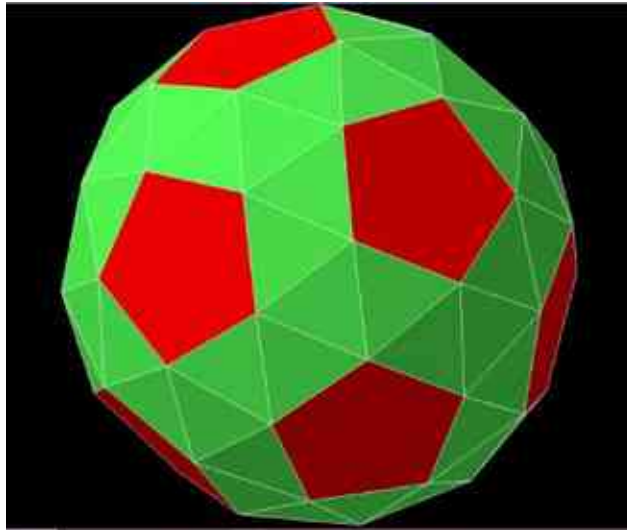


Figura 16: Poly Pro: Icosidodecaedro Snub

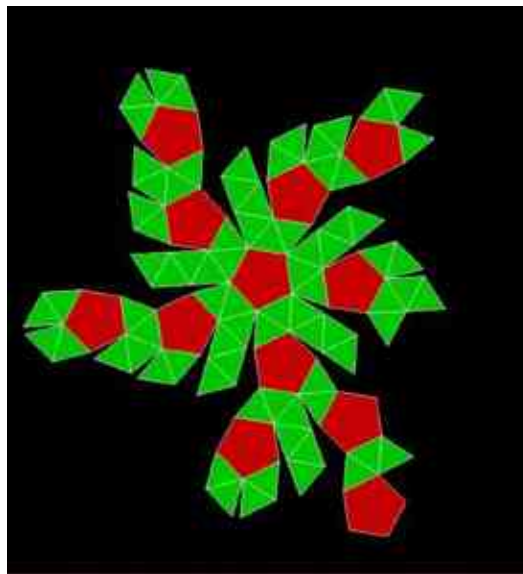


Figura 17: Poly Pro: Planificação do Icosidodecaedro Snub

Este é apenas um, de tantos outros, exemplos de utilização do Poly no Ensino de Geometria, pois partimos do pressuposto de que a utilização deste recurso torna a dinâmica

da aula mais atrativa aos jovens e promove o desenvolvimento das habilidades e competências previstas na nova reforma.

## 4.2 O Geolig como Recurso de Aprendizagem de Geometria

O Geolig é um material educativo composto por tubos coloridos (arestas) interligados por conectores de plástico de 3, 4, 5 e 6 pontas (vértices), vendido em lojas especializadas de material escolar ou em lojas de brinquedos. O conjunto pode ser adquirido com 77, 230 ou 365 peças e a preços que variam de R\$43 a R\$150, dependendo do tamanho escolhido. Com o Geolig, pode-se montar variadas figuras planas e modelos de sólidos geométricos que auxiliam na aprendizagem de Geometria. O kit utilizado neste trabalho possui: 80 tubos P, 12 tubos M, 40 tubos G, 25 conectores de 3 pontas, 25 de 4 pontas, 25 de 5 pontas e 23 de 6 pontas.



Figura 18: Peças do Kit Geolig 230

Em Geometria Plana, o material, pode ser utilizado no estudo das áreas de figuras planas atendendo ao desenvolvimento da habilidade EM13MAT307. A seguir descrevemos uma possível atividade a ser empregada com o Geolig.

Ao propor o estudo de Triângulos é importante destacar a presença deste elementos nos mais variados aspectos do nosso dia a dia, devido a sua estrutura rígida essa figura é largamente utilizada na construção civil, como por exemplos as treliças (estrutura composta



por cinco ou mais unidades triangulares construídas com elementos retos cujas extremidades são ligadas em pontos conhecidos como nós). Os estudantes podem citar outros elementos do seu cotidiano representados por um triângulo.

Para o desenvolvimento desta atividade direcionaremos nosso estudo em dois triângulos específicos: *Isósceles* e *Equilátero*. Mesmo sendo uma habilidade prevista na BNCC do Ensino Fundamental, é importante revisar os conceitos de cada um dos triângulos relacionando os aspectos que envolvem o seus lados e ângulos. Após a exposição da definição de triângulo isósceles apresentada abaixo peça ao aluno que construa com o material Geolig um modelo do triângulo especificado na definição.

**Definição 7** *Um triângulo que tem dois lados com mesma medida é chamado de **triângulo isósceles**.*

Neste momento sugere-se que o professor permita que os educandos testem diversos conectores na construção e os instigue a verificar o motivo pelo qual algumas construções com dois lados iguais e conectores distintos não são possíveis. A Figura 19 apresenta dois resultados de construções que podem ser obtidos. Para elaboração das figuras utiliza-se os seguintes materiais:

- 2 Tubos M.
- 1 Tubo P.
- 2 conectores de 5 pontas.
- 1 conector de 4 pontas.

ou

- 2 Tubos P.
- 1 Tubo M.
- 2 conectores de 6 pontas.
- 1 conector de 1 ponta.

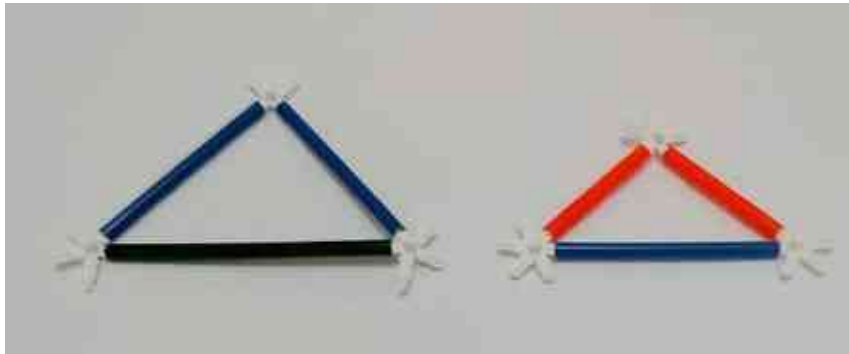


Figura 19: Geolig: Triângulos Isósceles

Neste ponto o aluno deve perceber que a construção de um triângulo com dois lados congruentes só é possível se os conectores da base do triângulo forem iguais, formalizando a proposição a seguir:

**Proposição 1** *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*

Vamos repetir a mesma dinâmica para construção de um triângulo equilátero.

**Definição 8** *Um triângulo é chamado de **equilátero** se seus três lados possuem a mesma medida.*

Após tentativas o aluno deve perceber que a construção só é possível se todos os conectores forem todos de 6 pontas. Desta forma é possível construir o enunciado da proposição 2.

- 3 tubos iguais (P, M ou G).
- 3 conectores de 6 pontas.

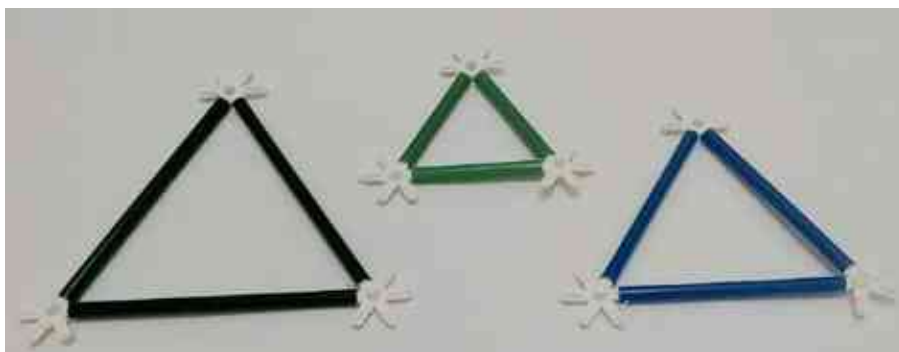


Figura 20: Triângulos Equiláteros

**Proposição 2** *Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos iguais.*

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , justifica-se a utilização dos conectores de 6 pontas tendo em vista que cada ângulo deve medir  $60^\circ$ .

Diante da construção dos triângulos isósceles e equilátero bem como do estudo de suas propriedades em relação aos lados e ângulos passa-se a explorar o conceito de polígonos convexos.

Utilizaremos a definição descrita em ([31], p.17).

**Definição 9** *Sejam  $n \geq 3$  um número natural e  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontos distintos do plano. Dizemos que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é um **polígono convexo** se, para  $1 \leq i \leq n$ , a reta  $A_i A_{i+1}$  não contém nenhum outro ponto  $A_j$ , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.*

Também exploraremos a definição de polígono regulares, que serão nosso objeto de estudo neste modelo de atividade.

**Definição 10** *Um polígono convexo é regular se, e somente se, for equilátero (lados iguais) e equiângulo (ângulos iguais).*

Com base nas definições supracitadas, o aluno está apto a construir alguns polígonos regulares com o auxílio do Geolig. Propõe-se a construção de um pentágono (5 lados) e de um hexágono (6 lados), ambos regulares. Para construção do pentágono apresentado na Figura 21 o aluno poderá utilizar:

- 5 tubos iguais (P, M ou G).
- 5 conectores de 5 pontas.

ou

- 5 tubos iguais (P, M ou G).
- 5 conectores de 6 pontas.



Figura 21: Geolig: Pentágono Regular

No caso do Hexágono regular:

- 6 tubos iguais (P, M ou G).
- 6 conectores de 6 pontas.

Obtendo a figura a seguir.

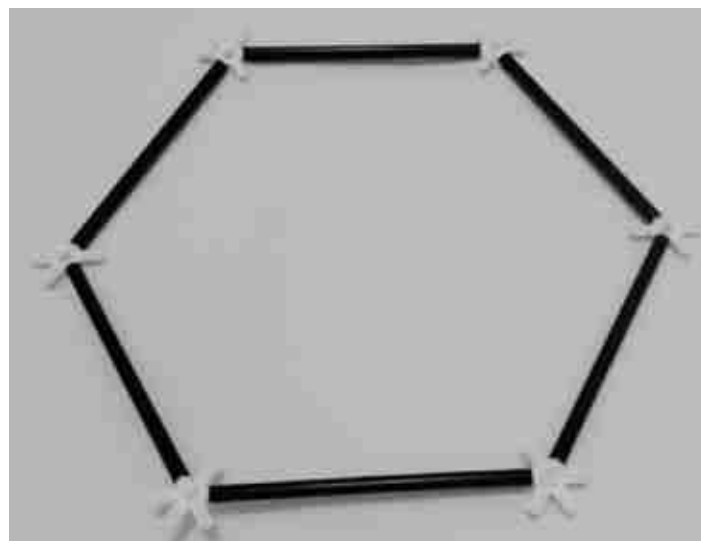


Figura 22: Geolig: Hexágono Regular

Os conceitos apresentados até o momento correspondem a habilidades referentes ao Ensino Fundamental, entretanto a abordagem utilizada para construção de propriedades e definições corroboram com a proposta apresentada na BNCC do Ensino Médio e atende o desenvolvimento da Competência 3 prevista em [6].

Depois desta exploração inicial sobre triângulos e polígonos o aluno possui subsídios para o estudo da área destas figuras. Para iniciar esse tema sugere-se a apresentação de uma definição mais completa sobre área de polígonos convexos, como a apresentada em [31].

**Definição 11** *Se um polígono convexo for **particionado** em um número finito de outros polígonos convexos (i.e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.*

Desta forma aplicando a Definição 11 devemos propor o cálculo da área do Pentágono e Hexágono usando apenas os dois modelos de triângulos apresentados. Para isto inicialmente deve-se relembrar o cálculo da área de um triângulo.

**Definição 12** *Dado um triângulo ABC, se escolhermos um lado, BC, de medida **b**, como sua base e indicando por **h** a altura relativa a base BC, pode-se concluir que a área **S** do triângulo ABC é*

$$S = \frac{b \times h}{2}.$$

Em especial, no caso do triângulo equilátero os alunos já reconhecem que sua área pode ser obtida pela expressão:

$$S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4},$$

onde  $l$  é a medida do lado do triângulo.

O próximo passo da atividade é propor aos discentes a partição das figuras em triângulos equiláteros e/ou isósceles. Começando pelo Pentágono o aluno deve investigar como dividi-lo e se é possível obter triângulos equiláteros. Ou então se dentre as soluções encontradas existe alguma que possui somente triângulos semelhantes entre si.

O resultado obtido desta etapa está apresentado na Figura 23. Neste momento o aluno, por meio da descoberta, percebe que o Pentágono Regular pode ser dividido em 5 triângulos isósceles que possuem lados congruentes representados pelos Tubos M.

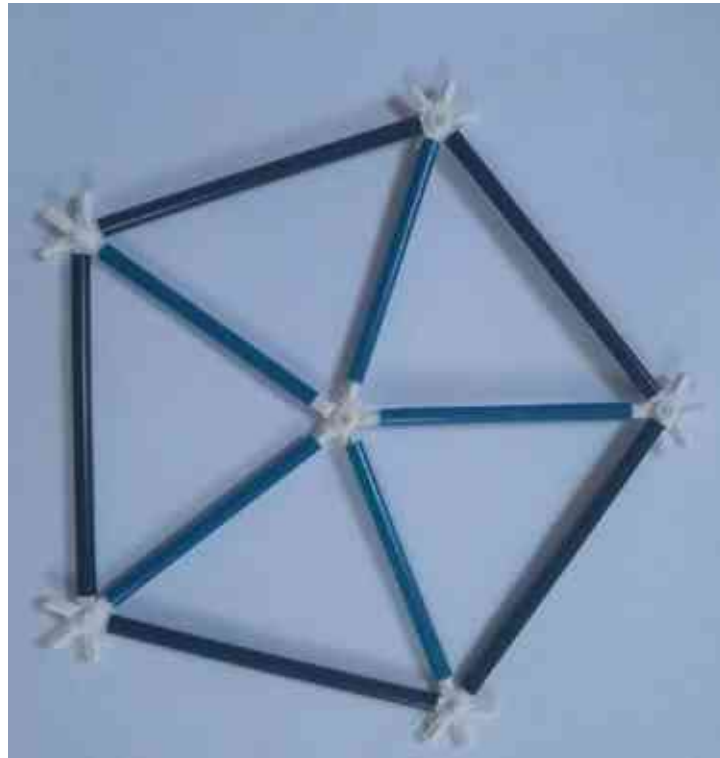


Figura 23: Geolig: Partição do Pentágono Regular

Para construção da Figura 23 foram utilizados:

- 5 tubos iguais G.
- 5 tubos iguais M.
- 5 conectores de 6 pontas.
- 1 conector de 5 pontas.

Assim, para facilitar a compreensão, chamemos a área de cada triângulo isósceles da Figura 23 de  $S_3$ . Desta forma facilmente o aluno poderá concluir que a área do Pentágono Regular ( $S_5$ ) pode ser obtida pela expressão

$$S_5 = 5 \times S_3.$$

Utilizando a mesma estratégia, o aluno deverá particionar o Hexágono em triângulos para determinar sua área. Neste caso ele concluirá que o polígono pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros como o apresentado a seguir.

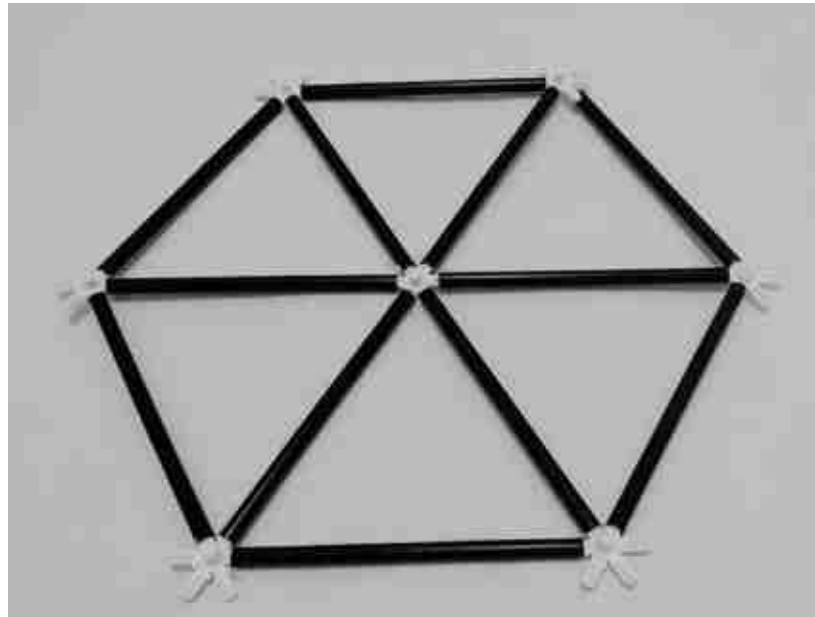


Figura 24: Geolig: Partição do Hexágono

O material do Geolig utilizado para construção da Figura 24 foi:

- 12 tubos iguais  $G$ .
- 7 conectores de 6 pontas.

Para determinar a área desta figura o educando deve observar que todos os triângulos que dividem a polígono, além de ser equiláteros, são semelhantes. Cada um dos triângulos possui área já conhecida de

$$S_3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

onde  $l$  é a medida de cada lado do Hexágono e, conseqüentemente, dos triângulos.

Assim pode-se aferir que a área do Hexágono  $S_6$  é obtida pela expressão

$$S_6 = 6 \times S_3 = 6 \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Uma outra habilidade desenvolvida nesta construção refere-se ao estudo da soma dos ângulos internos dos polígonos regulares. Utilizando como exemplo o Hexágono, ao dividi-lo em triângulos equiláteros, o aluno reconhece que cada vértice do polígono de 6 lados está associado a dois ângulos do triângulo, concluindo desta forma que a soma dos ângulos internos do Hexágono corresponde a 12 vezes o ângulo da base do triângulo de lados iguais, portanto,  $720^\circ$ .

O desenvolvimento do estudo em sala de aula, traz a todo instante a ação investigativa do aluno e proporciona a descoberta dos conceitos e propriedades, desenvolvendo não somente as habilidades pertinentes ao Ensino Médio, mas apresentando o sentido de completude do conhecimento matemático estudado ao longo de toda Educação Básica.

Além da atividade direcionada ao estudo de Geometria Plana conforme apresentado, o Geolig é uma excelente ferramenta para construção de sólidos espaciais. Tomando como referência a atividade proposta com a utilização do Poly Pro 1.2, de construção dos sólidos de Platão, o material oferece ao estudante a possibilidade de elaboração e estudos de propriedades externas e internas relacionadas às quantidades de arestas, vértices e faces como por exemplo o Teorema de Euler.

Pode-se apresentar aos educandos a construção das cinco classes de poliedros de Platão: *Tetraedro*, *Octaedro*, *Cubo*, *Dodecaedro*, *Icosaedro*. Para construção Tetraedro são necessários:

- 6 Tubos P.
- 4 conectores de 3 pontas.

Inicia-se com a construção de um triângulo equilátero que será a base do nosso sólido, cada uma das demais faces também são triângulos equiláteros iguais ao primeiro.

O modelo construído pode ser observado na Figura 25.



Figura 25: Tetraedro Regular



Com base na construção realizada o aluno pode observar que a área de cada face corresponde a área do triângulo equilátero e conseqüentemente a área total da superfície de um Tetraedro é obtida por

$$S_t = l^2\sqrt{3}.$$

Pelo mesmo processo de confecção, o *Octaedro* é construído pela junção de 8 triângulos equiláteros. Para realizar sua estrutura com o Geolig utiliza-se:

- 12 Tubos P.
- 6 conectores de 3 pontas.

Sua construção pode ser associada a conexão de duas pirâmides de base quadrada que compartilham a mesma base e possuem arestas iguais, com resultado como o apresentado na Figura 26. Em seguida a construção do *icosaedro* pode ser realizada com:

- 30 Tubos P.
- 12 conectores de 5 pontas.

De forma que em cada vértice ocorra o encontro de 5 triângulos equiláteros representando as 20 faces, conforme a Figura 27.

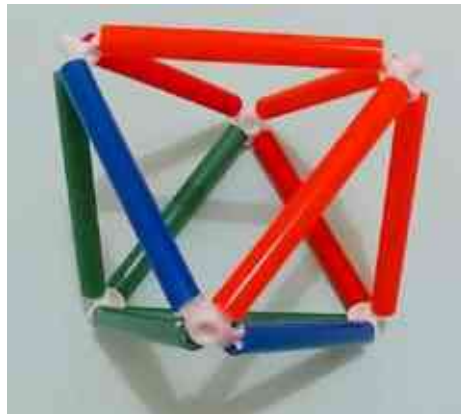


Figura 26: Geolig: Octaedro Regular

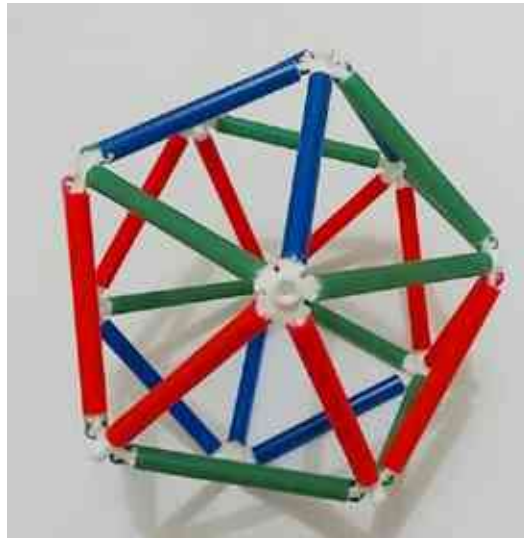


Figura 27: Geolig: Icosaedro Regular

Por fim o aluno poderá elaborar a estrutura do *Cubo* e *Dodecaedro* sendo estes construídos por 12 e 30 tubos P, respectivamente. Para o primeiro utiliza-se 8 conectores de 3 pontas formando as 6 faces quadradas e no segundo 20 conectores de 3 pontas para moldar as 12 faces pentagonais.

O material também possibilita a confecção de sólidos não platônicos bem como, de poliedros não convexos, conforme Figura 28, que pode ser utilizado como instrumento na definição de poliedros convexos, que é o objeto de estudo na Educação Básica.

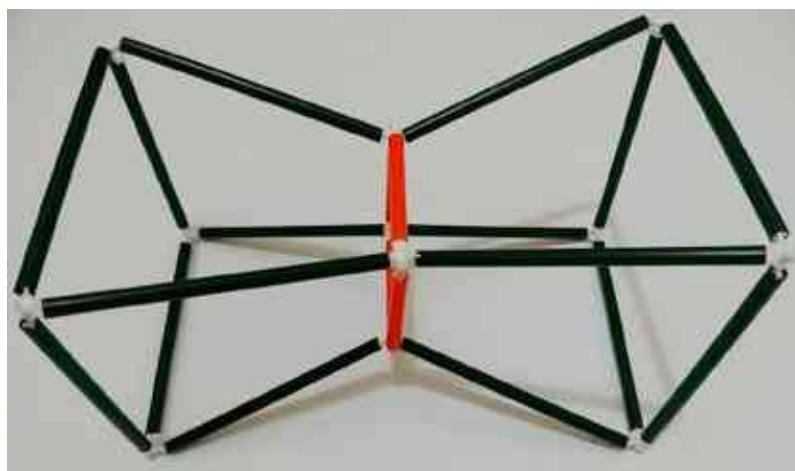


Figura 28: Poliedro Não Convexo

O Geolig é um brinquedo de simples manuseio, com baixo custo, que pode conferir significação e dinamismo na aprendizagem de Geometria. O aluno desenvolve e, literalmente constrói seu conhecimento por meio da análise das possíveis conexões e estruturas que são realizadas. Em um único trabalho, como sugerido, é possível resgatar várias habilidades adquiridas pelos alunos no Ensino Fundamental e desenvolver de forma efetiva a aprendizagem de temas pertinentes ao Ensino Médio contribuindo para o desenvolvimento de habilidades previstas na BNCC do Ensino Médio.

### 4.3 O GeoGebra no Ensino de Geometria

O GeoGebra é um *software* de Matemática, criado por Markus Hohenwarte, em 2001 e continua em constante desenvolvimento pela *Florida Atlantic University*. O programa, austríaco, consegue interagir com Geometria, Álgebra e Cálculo. No site <https://www.GeoGebra.org>, além de realizar o download, em português, é disponibilizado ao usuário um grande volume de materiais e atividades subdivididos nas seguintes categorias:

- Aritmética.
- Geometria.
- Trigonometria.
- Cálculo.
- Probabilidade.
- Funções.
- Estatística.
- Álgebra.

A tela inicial do aplicativo é como a apresentada a seguir, disponibilizando inicialmente a escolha do ambiente de trabalho como Gráfico, Probabilidade, Geometria, Janela 3D e outros. Na janela algébrica é possível inserir pontos, equações de retas e outras representações algébricas. A inserção de dados pode ser realizada tanto pelo teclado físico quanto pelo virtual, e a barra de tarefas dispõe de uma lista com comandos interativos para construção diretamente na área de trabalho (malha).

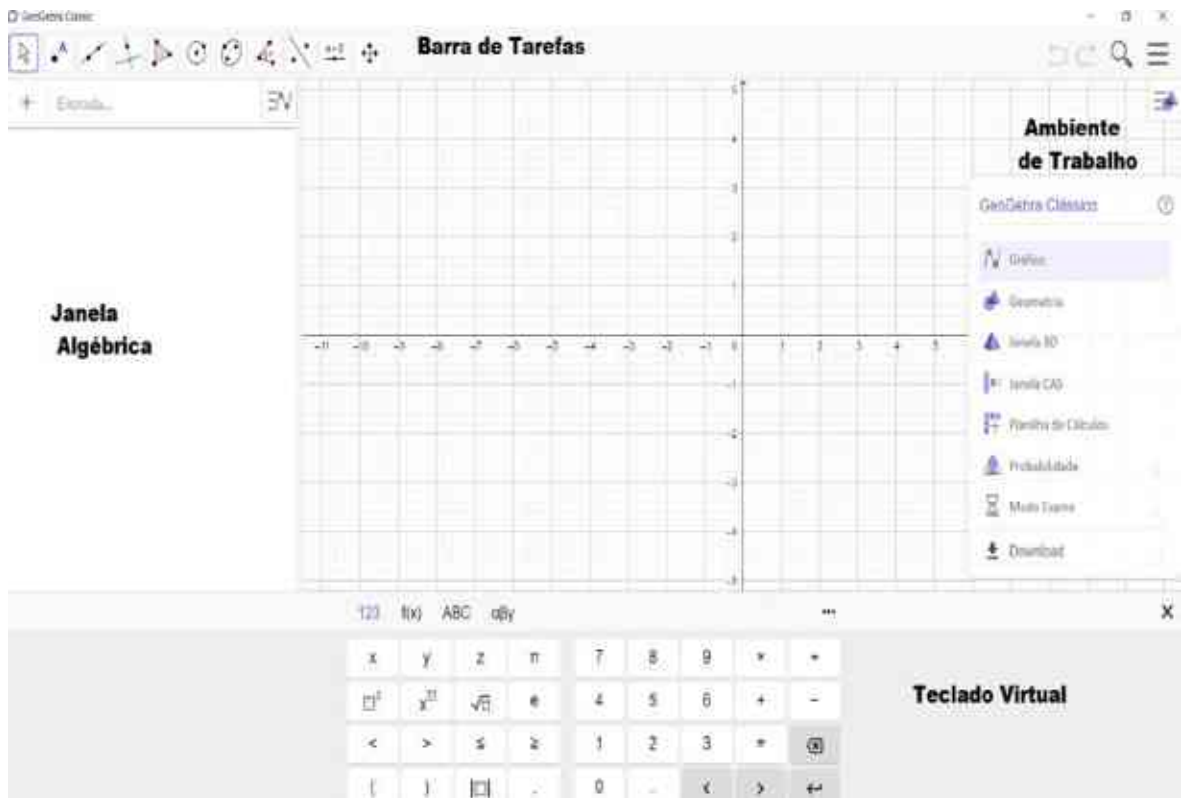


Figura 29: Interface GeoGebra

A utilização de *softwares* Geometria Dinâmica na Base Nacional Comum Curricular é sugerida em várias habilidades, como por exemplo, no estudo de Geometria Espacial, previsto na Competência 2, que trata do desenvolvimento de projetos com foco em investigar conceitos matemáticos para solução de problemas. As mudanças propostas pela BNCC do Ensino Médio objetivam reforçar o processo de descoberta na aprendizagem e o trabalho cooperativo.

Para elaboração de atividades que propiciem a interação do aluno com a habilidade EM13MAT201, sugere-se a utilização do ambiente de trabalho, Janela 3D, onde pode-se construir sólidos, superfícies e curvas tridimensionais, bem como calcular seu comprimento, área e volumes. A interface da Janela 3D está representada na Figura 30. Com auxílio do mouse é possível rotacionar o plano para oferecer melhor observação dos objetos construídos.

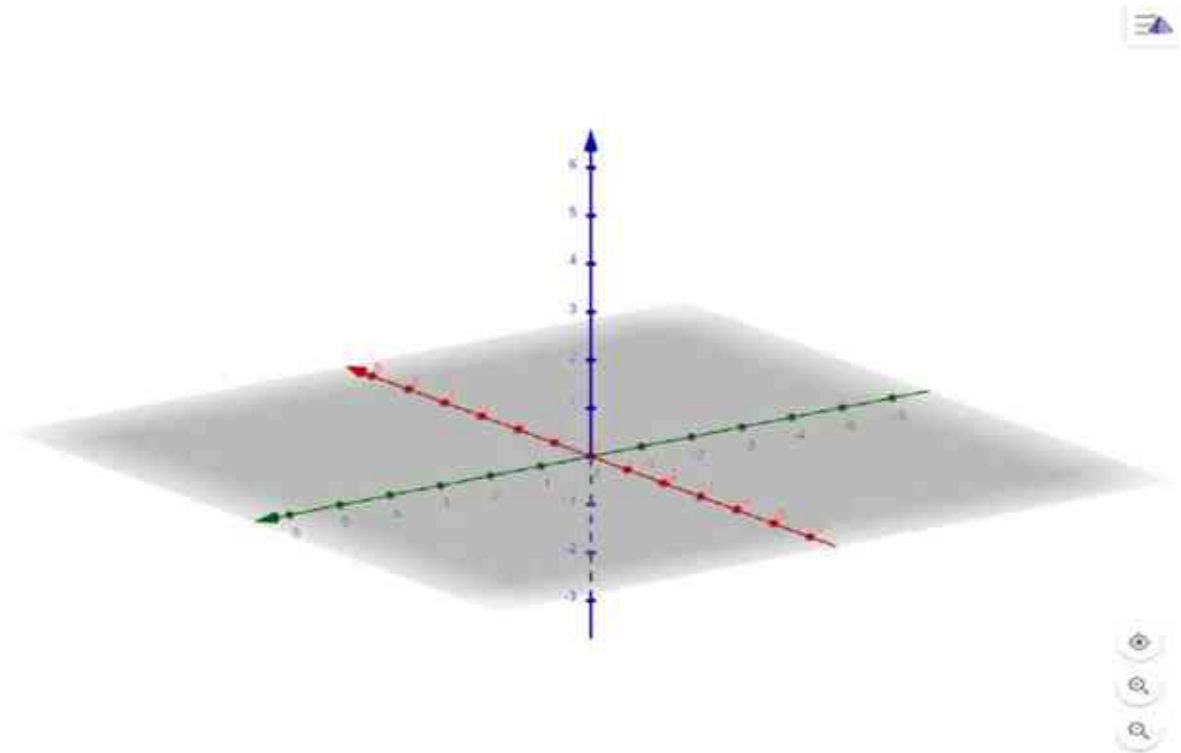


Figura 30: Ambiente GeoGebra Janela 3D

O professor pode apresentar a ferramenta aos alunos e propor a resolução de uma situação-problema, como o exemplo abaixo:

**Exemplo 6** *Uma comunidade do interior do Ceará, precisa construir um reservatório de água no formato de um cilindro circular reto com capacidade de aproximadamente  $200 \text{ m}^3$ , sabe que o diâmetro máximo da base do reservatório é de 10 m e sua altura não pode ultrapassar 12 m. Qual deve ser a medida inteira do raio e altura desse cilindro de forma que seu volume seja condizente com a necessidade da comunidade?*

Para solucionar o problema usando GeoGebra vamos inicialmente construir um cilindro circular reto, para isto, precisamos definir os parâmetros para construção de sua base.

A base de um cilindro é um círculo, que pelos dados apresentados no Exemplo 6, deve ter diâmetro máximo de 10 metros. É importante lembrar que o diâmetro de um círculo equivale ao dobro da medida do raio, portanto, o raio da situação-problema proposta, pode variar de 1 a 5 metros.

- Ao abrir o *software* no ambiente gráfico, localizar o ícone controle deslizante, ao clicar no comando, nomear o controle (utilizamos a letra  $r$ ) e inserir o valor mínimo e

máximo do raio, adicionamos incremento 1 pois o problema deseja obter uma solução inteira.

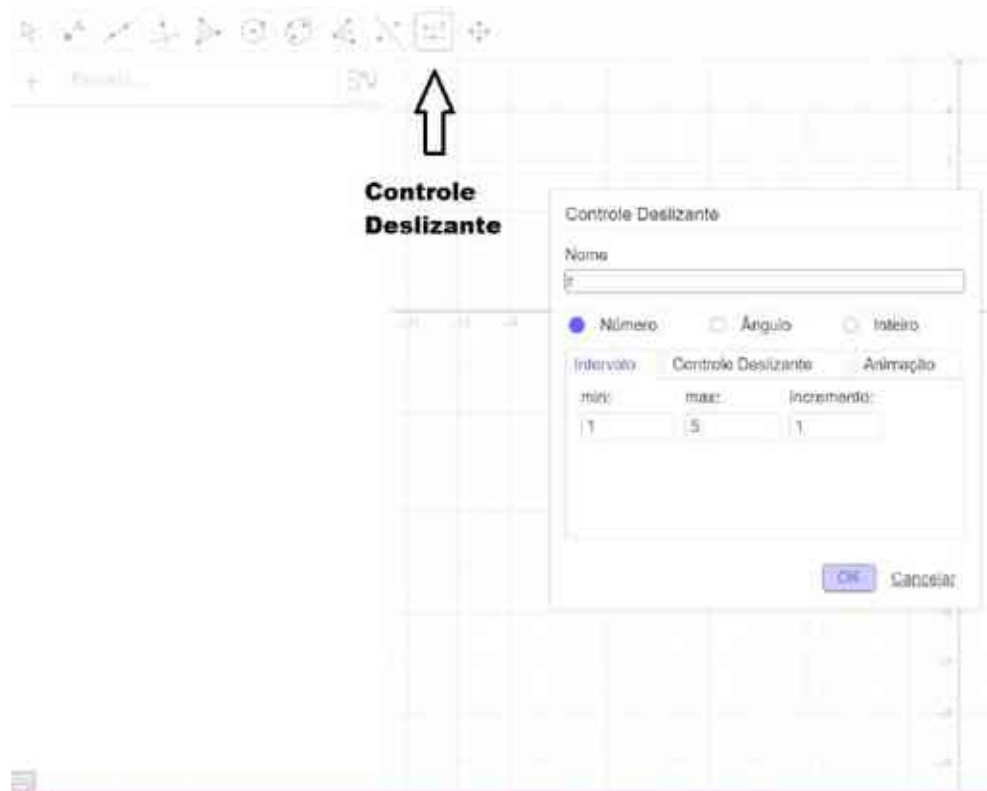


Figura 31: Controle Deslizante

- Construir um círculo com centro na origem e raio  $r$ , conforme descrito na Figura 31, desta forma o círculo terá um raio com controle deslizante variando de 1 a 5 metros.

O professor pode aproveitar o momento para debater sobre outras possibilidades da base, como por exemplo, conhecendo seu centro e um ponto que pertença ao círculo.

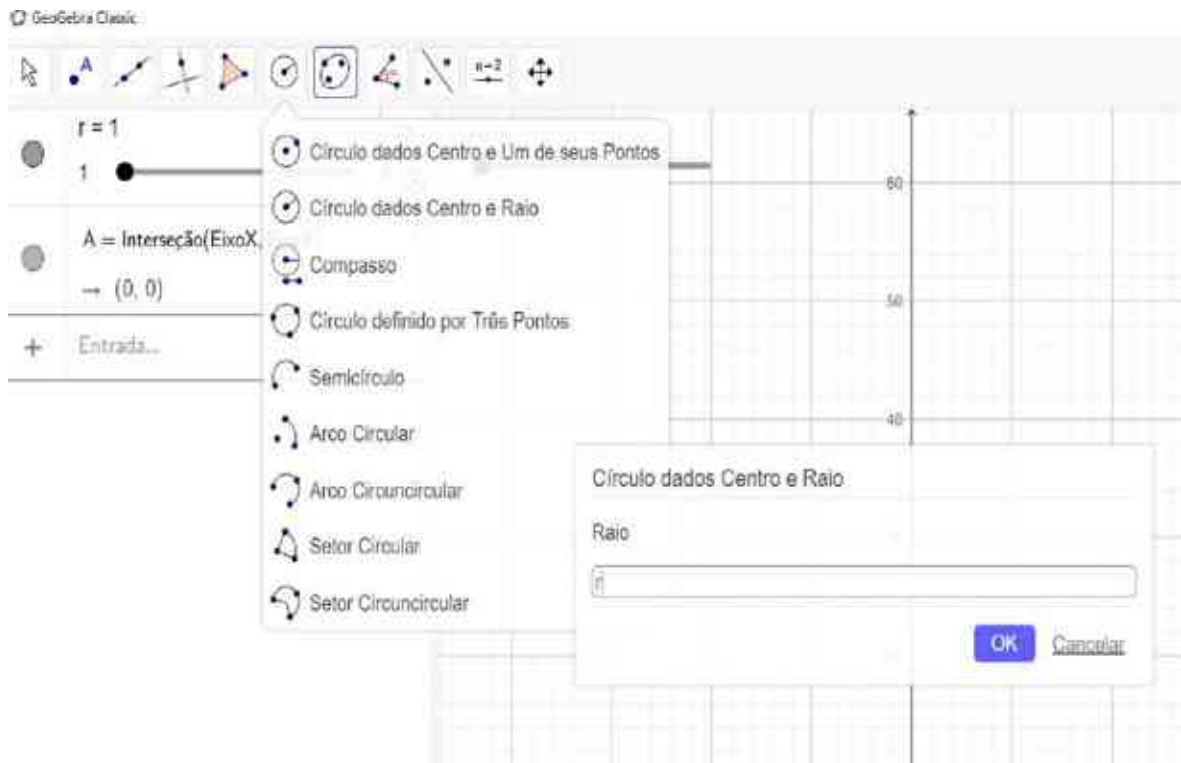


Figura 32: Construção de Círculo de raio  $r$  e centro na origem

- Utilizando o mesmo procedimento inicial para construção do controle deslizante do raio, elabora-se o comando para elaboração do controle deslizante da altura com variação de 1 a 12 metros e incremento 1, pois, o problema deseja obter uma solução inteira para  $h$ .
- Selecione a opção de ambiente de trabalho *Janela 3D* para prosseguir com a construção do cilindro, para facilitar a visualização, optamos por excluir os eixos. O usuário pode personalizar seu ambiente de visualização incluindo ou excluindo objetos e rótulos.
- Precisamos vincular nossa altura ao círculo para construção do cilindro, renomeamos nosso centro do círculo de  $C$ , e introduzimos no ambiente algébrico o ponto  $(x(C), y(C), h)$ .
- Selecionando o ícone Cilindro conforme Figura 33, com auxílio do mouse, clicamos nos pontos  $C$  e  $A$  que representam, respectivamente, o centro do círculo e a altura. Na janela de diálogo que se abrirá, indicaremos como raio  $r$ , obtendo o cilindro  $c$ .

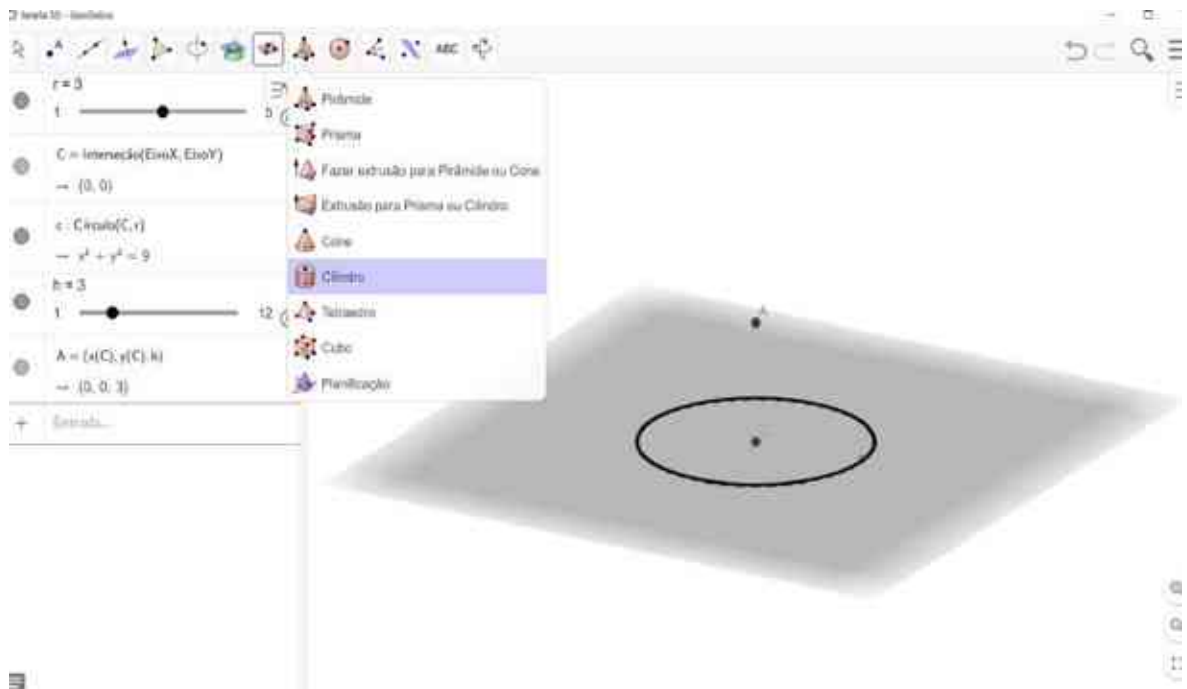
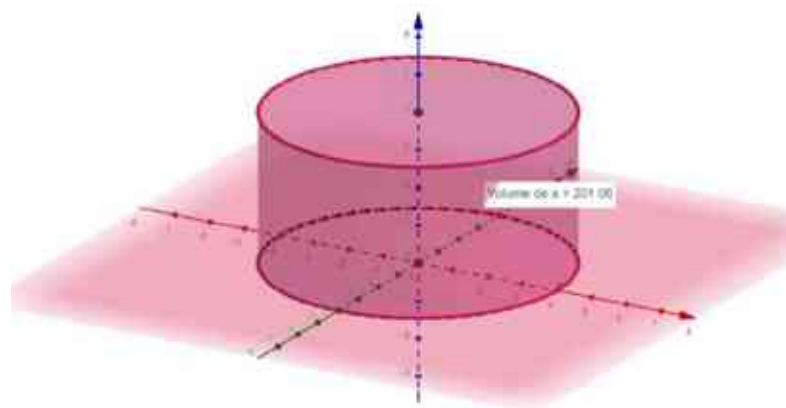


Figura 33: Construção de Cilindro

De posse do cilindro o aluno pode variar o raio e altura e no ícone relacionado a ângulo o *software* já oferece o cálculo do volume ao clicar com o mouse no sólido. Analisando as diversas combinações possíveis entre o raio e altura, o educando concluirá que o sólido apresentado na Figura 34 é o que atende as especificações do exemplo.

Figura 34: Cilindro Reto de  $r = h = 4$



Neste exercício fica explícita a proposta da BNCC de utilização da Geometria como ferramenta essencial para solucionar problemas de contexto social. O aluno não precisa apenas memorizar a relação matemática que calcula a área de um cilindro, mas também investigar qual modelo se adequa melhor às exigências de uma dada situação. O GeoGebra além de oferecer esta visão dinâmica para resolução de problemas proporciona a experiência da construção, em que são necessários o reconhecimento de elementos do círculo, localização no plano e da transição para a janela espacial. O GeoGebra oferece ainda a possibilidade de cálculo de áreas, planificações de figuras, estudos de sólidos de revolução e tantas outras infinitudes de aplicações.

Os modelos espaciais por exemplo, podem ser facilmente construídos na janela de visualização 3D, basta seguir a seguinte lista de procedimentos:

- Selecione o ambiente de trabalho janela de visualização 3D.
- Escolha dois pontos, para determinar a medida da aresta do poliedro.
- No ambiente algébrico digite o nome do poliedro e insira as letras correspondentes aos dois pontos selecionados.
- Para melhor visualização do sólido, retire os rótulos.
- Caso deseje obter a planificação do sólido construído, basta selecionar o ícone apresentado na Figura 35.

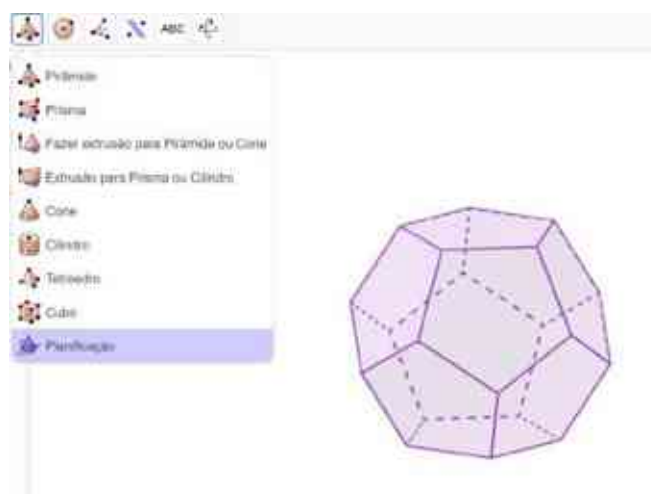


Figura 35: Dodecaedro

Obtendo a planificação como pode ser vista na Figura 36 e sua respectiva animação, obtida ao clicar com o botão direito do mouse no controle deslizante  $b$  gerado automaticamente com a planificação.

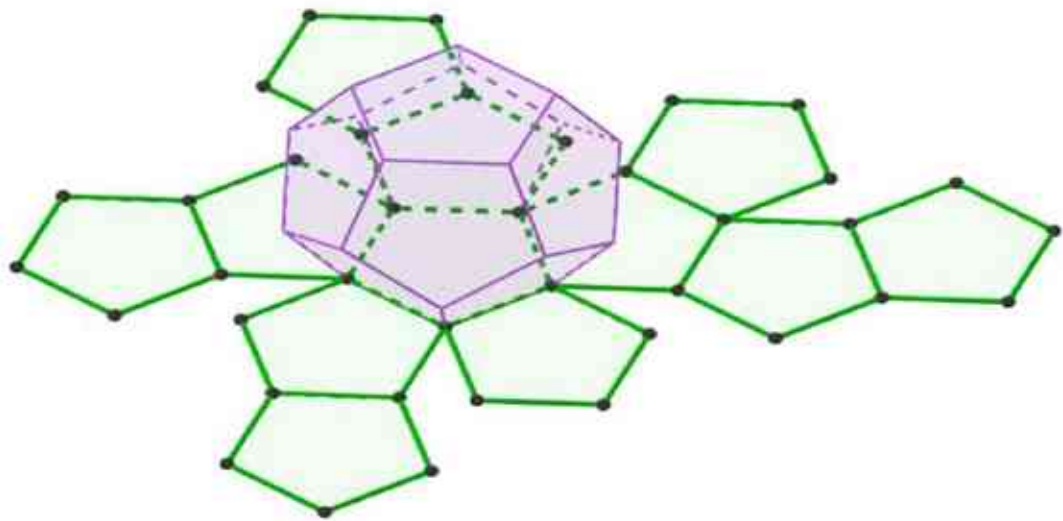


Figura 36: Planificação do Dodecaedro

De forma geral pode-se afirmar que dentre os *softwares* disponíveis gratuitamente o GeoGebra revela-se como o mais completo, pois oferece diversos recursos de forma já estabelecida no programa, bem como interface de fácil interação. Outro ponto positivo deste recurso é a quantidade de materiais divulgados sobre a ferramenta nos diversos sites educativos, blogs e vídeos que descrevem passo a passo as mais diversas construções facilitando o trabalho de alunos e professores.

#### 4.4 O Cinderella no Ensino de Geometria

Cinderella é um programa de Geometria Dinâmica de autoria de *J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp*. Como programa destinado a fazer Geometria no computador, o *software* Cinderella constitui um utensílio para investigar construções geométricas de grande qualidade. Sua versão gratuita está disponível no site <https://www.cinderella.de/tiki-index.php>.

A interface do *software* Cinderella apresenta funções pré-definidas conforme apresentado na Figura 37.

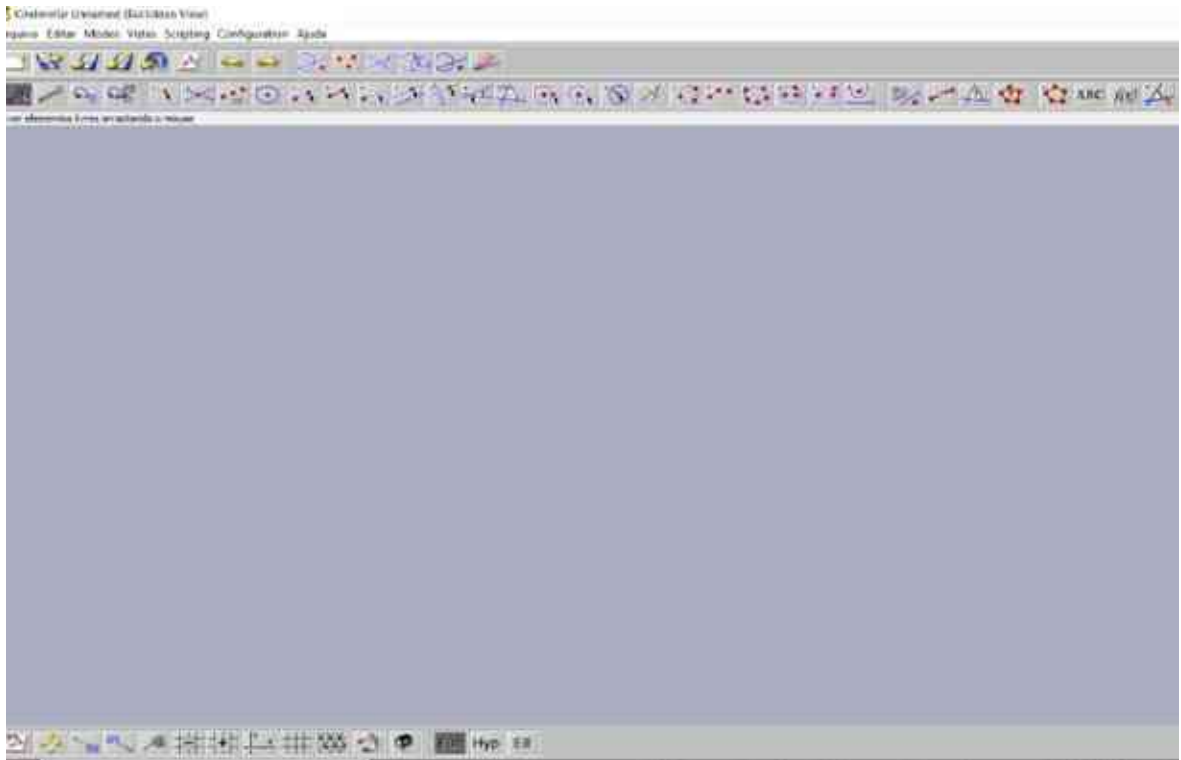


Figura 37: Interface do Cinderella

Os ícones apresentam imagens sugestivas, permitindo o fácil acesso a diversas funções pré-estabelecidas, onde o usuário pode criar pontos, retas, circunferências, polígonos, cônicas, pontos médios, perpendiculares, paralelas, para medir comprimentos, ângulos, áreas, para animar, para exportar em pdf, para criar exercícios interativos, para usar o compasso e tantas outras funções. Além dos mesmos recursos disponibilizados no GeoGebra, o Cinderella dispõe da capacidade de abordar não só a Geometria Euclidiana habitual, mas também as Geometrias Hiperbólica e Esférica.

O professor pode utilizar este recurso no estudo de cônicas em Geometria Analítica.

**Definição 13** As **curvas cônicas** são obtidas pela interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas.

Fazendo a interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas podemos obter: um ponto, uma reta, um par de retas ou as curvas cônicas: Circunferência, Elipse, Parábola e Hipérbole.

Após o debate sobre a definição o professor pode apresentar as interseções que geram as curvas, elipse, parábola e hipérbole. Vamos iniciar nossa exposição pela Elipse.

**Definição 14** Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos,  $2c$  a distância entre eles e  $a$  um número real tal que  $a > c$ . O lugar geométrico  $E$  dos pontos  $X$  tais que  $d(X, A) + d(X, B) = 2a$  chama-se **elipse** de focos  $A$  e  $B$ .

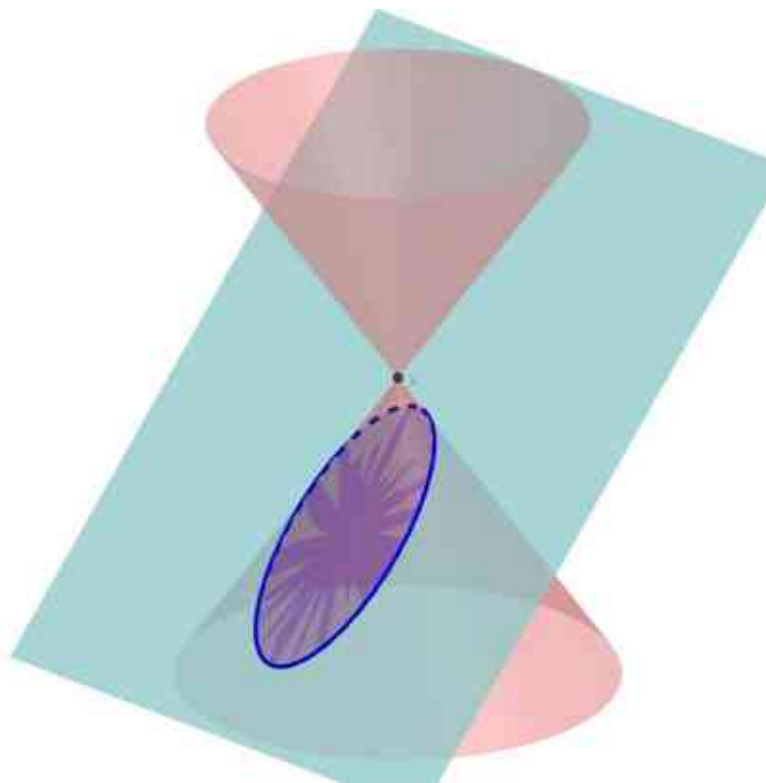


Figura 38: Elipse

Para efetuar a construção de uma Elipse utilizando as funções pré-estabelecidas do *software* Cinderella realiza-se os seguintes procedimentos:

- Marca-se no plano os focos  $A$  e  $B$ .
- Determina-se um ponto  $C$  tal que  $C \in E$ .
- No menu ao acionar o ícone *Modos* seleciona-se *Conic* e em seguida *Ellipse by foci and point* como apresentado na Figura 39.

- Seleciona-se inicialmente os focos e depois o ponto C, obtendo a Elipse representada na Figura 40.

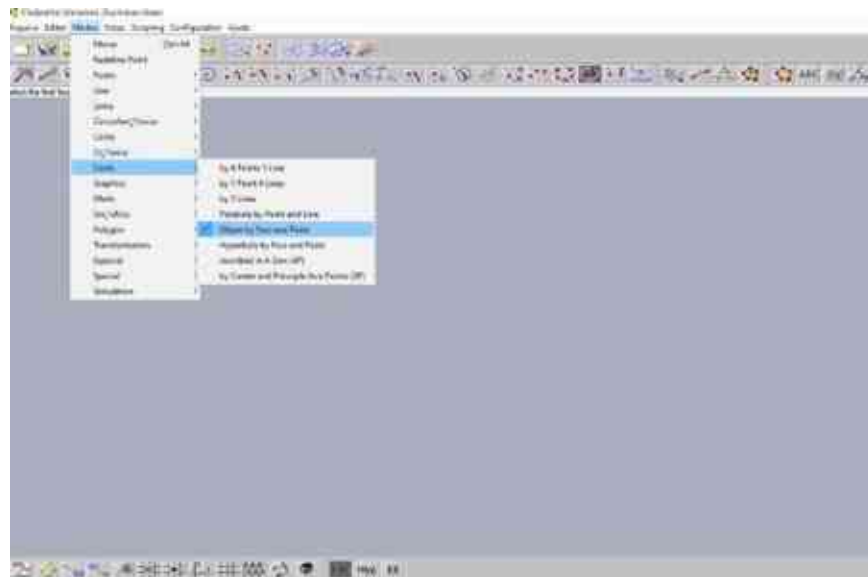


Figura 39: Cinderella: Construção de Cônicas - Elipse

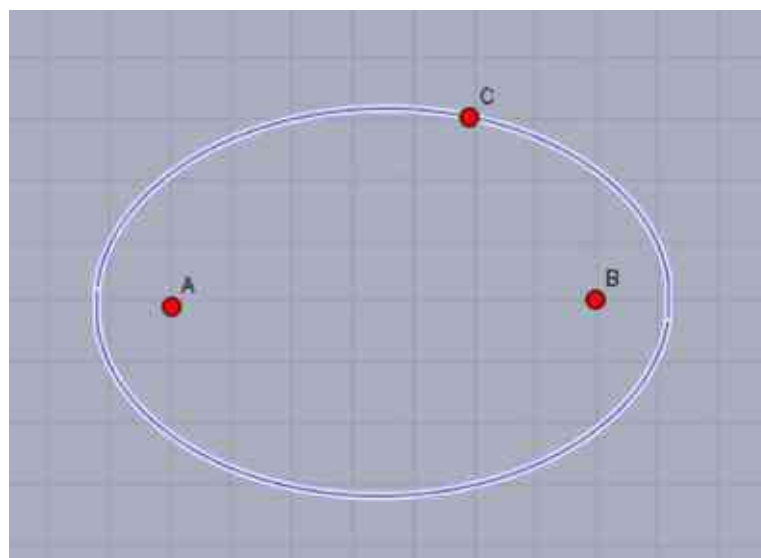


Figura 40: Cinderella: Elipse

Após a construção o professor pode pedir aos alunos que acrescentem na figura, os principais elementos da Elipse.

- *Reta Focal* é a reta que contém os focos A e B.
- *Vértice da Elipse* são os dois pontos de interseção da Elipse com a Reta Focal.
- *Eixo Focal* é o segmento de reta, de comprimento  $2a$ , que tem como extremidades os vértices da Elipse.
- *Centro da Elipse* é o ponto médio do Eixo Focal e também do segmento que tem como extremidades os focos A e B.
- *Reta não Focal* é a reta perpendicular à Reta Focal que passa pelo centro da Elipse.
- *Vértices da Elipse sobre a Reta não Focal* são os dois pontos de interseção da Elipse com a Reta não Focal.
- *Eixo não Focal* é o segmento de reta, de comprimento  $2b$ , que tem como extremidades os vértices da Elipse sobre a Reta não Focal.

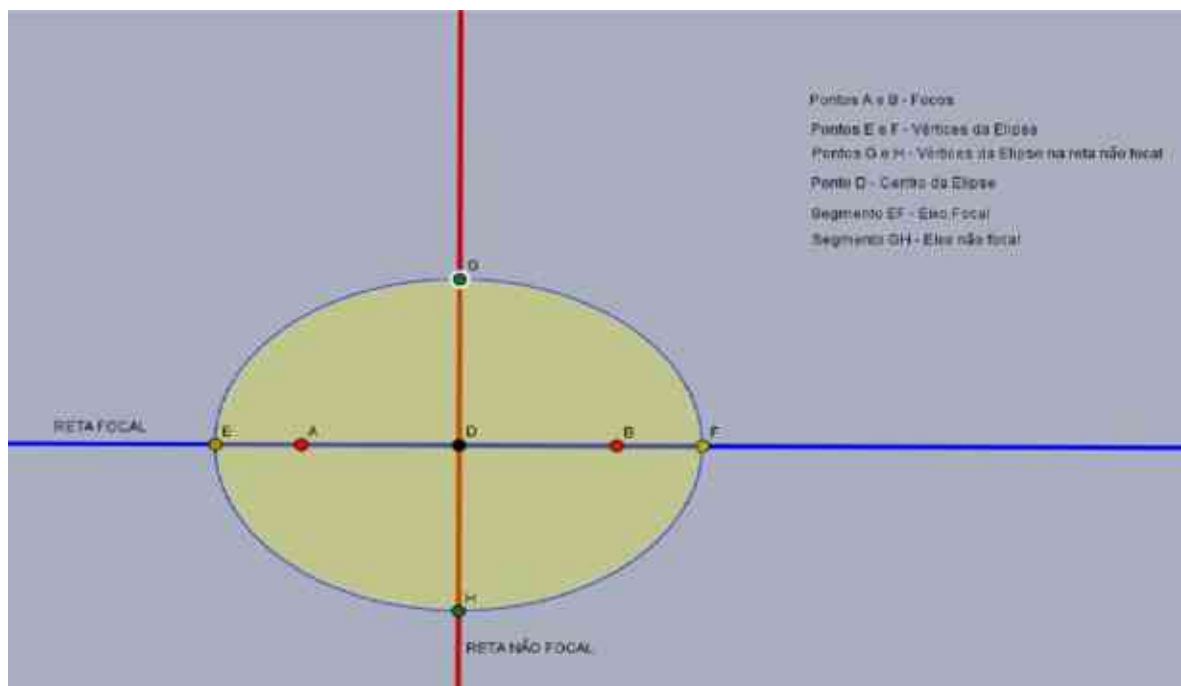


Figura 41: Elementos da Elipse

**Definição 15** Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos fixos em um plano e  $2c > 0$  a distância entre eles. Se  $a > 0$  é um número menor que  $c$ , o conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que  $|d(P, A) - d(P, B)| = 2a$  é chamado hipérbole  $H$  de focos  $A$  e  $B$ .

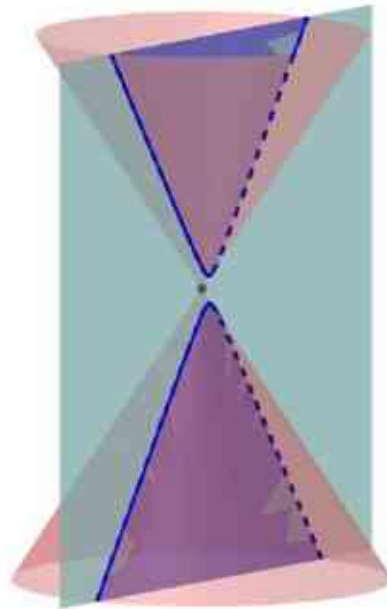


Figura 42: Hipérbole

Observe que para obter a curva Hipérbole o plano fica paralelo ao eixo de rotação. Para realizar a construção da Hipérbole no *software* Cinderella seguiremos os procedimentos descritos a seguir.

- Marca-se no plano os focos A e B.
- Determina-se um ponto C tal que  $C \in \mathbf{H}$ .
- No menu ao acionar o ícone *Modos* seleciona-se *Conic* e em seguida *Hiperbola by foci and point* como apresentado na Figura 43.
- Seleciona-se inicialmente os focos e depois o ponto C, obtendo a Hipérbole representada na Figura 44.

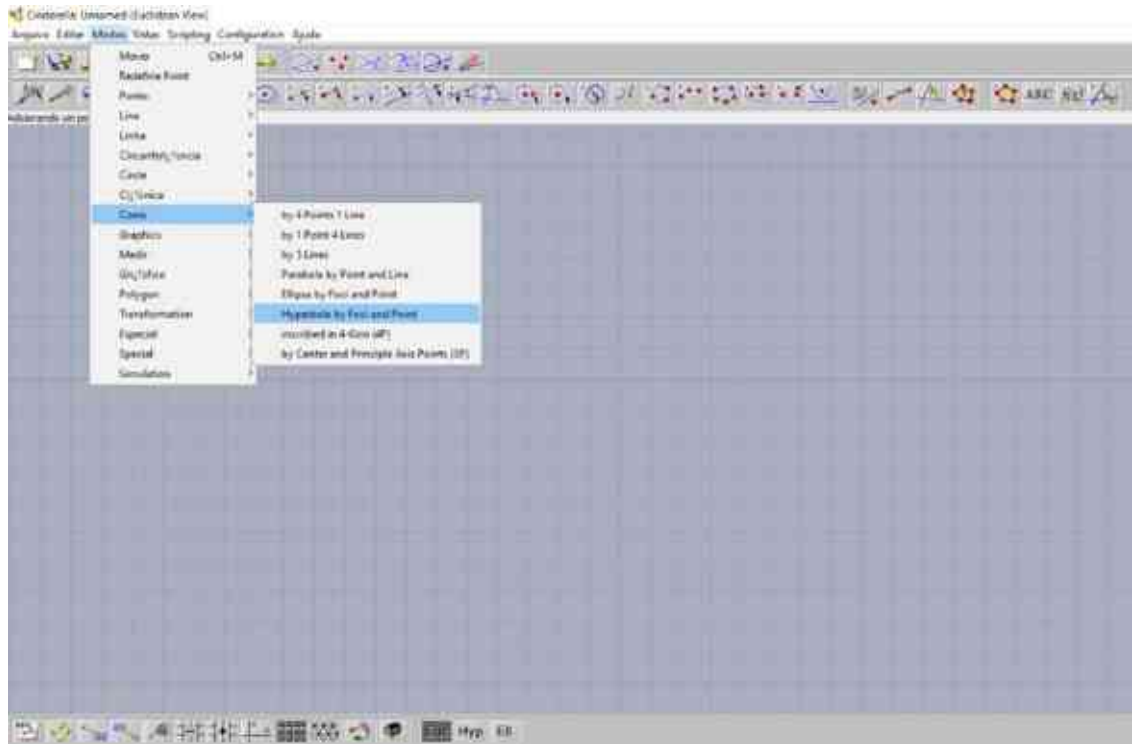


Figura 43: Cinderella: Construção de Cônicas - Hipérbole

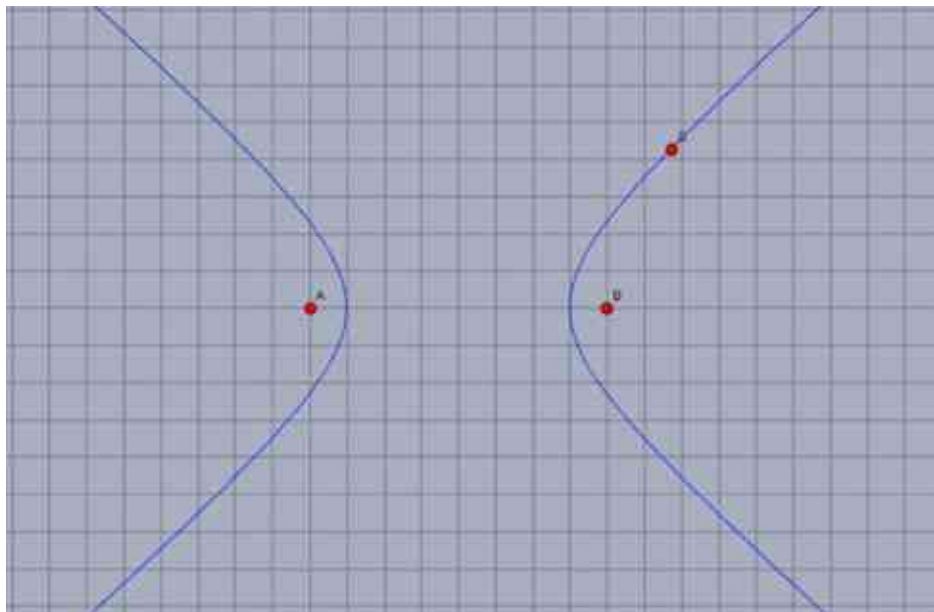


Figura 44: Cinderella: Hipérbole



Os principais elementos da Hipérbole, relacionados a seguir, podem ser observados na Figura 45.

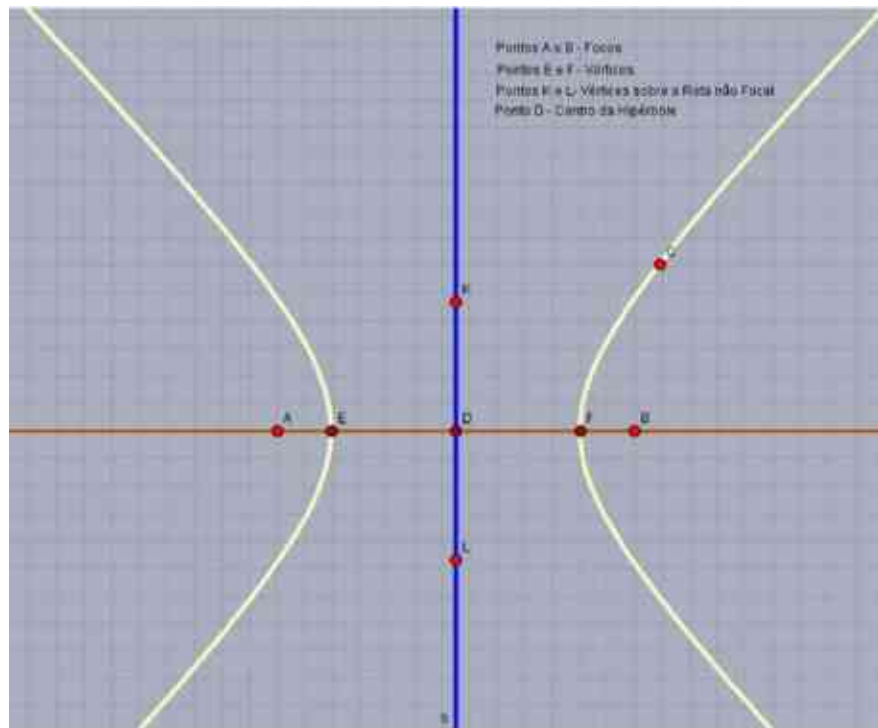


Figura 45: Elementos da Hipérbole

- *Reta Focal* é a reta que contém os focos A e B.
- *Vértice da Hipérbole* são os dois pontos de interseção da Hipérbole com a Reta Focal.
- *Eixo Focal* é o segmento de reta, de comprimento  $2a$ , que tem como extremidades os vértices da Hipérbole.
- *Centro da Hipérbole* é o ponto médio do Eixo Focal e também do segmento que tem como extremidades os focos A e B.
- *Reta não Focal* é a reta perpendicular à Reta Focal que passa pelo centro da Hipérbole.
- *Eixo não Focal* é o segmento de reta, de comprimento  $2b$ , perpendicular ao eixo focal que tem ponto médio no Centro da Hipérbole.

**Definição 16** Sejam  $A$  um ponto e  $r$  uma reta em um plano, tais que  $A \notin r$ . O conjunto dos pontos  $X$  do plano tais que  $d(X, A) = d(X, r)$  é chamado *Parábola P*.

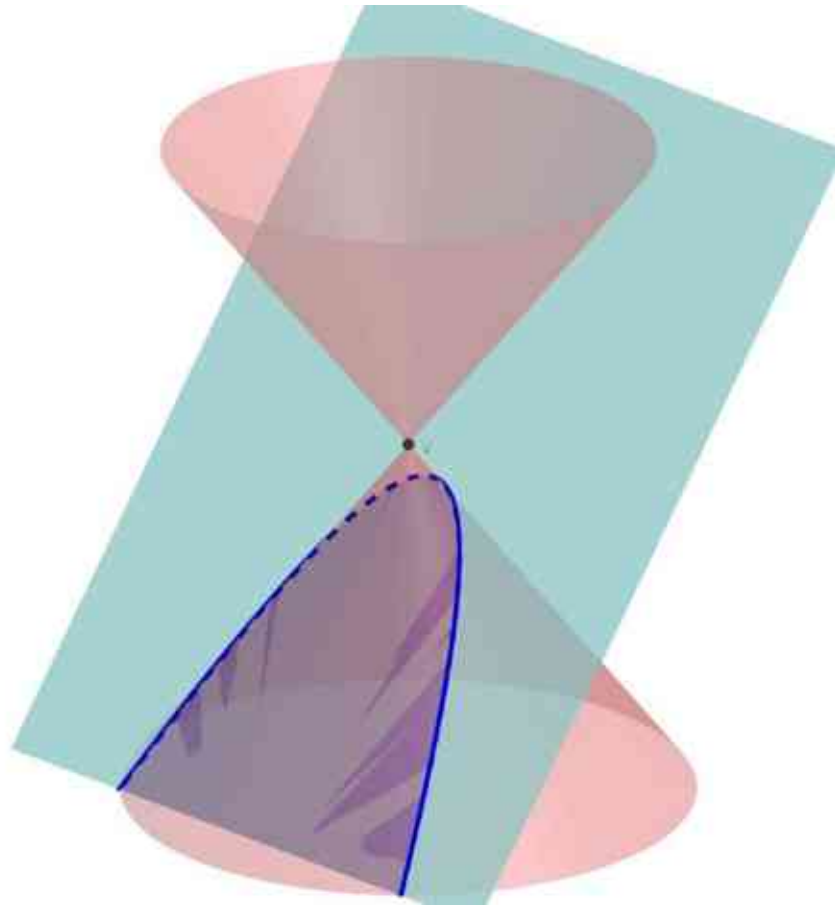


Figura 46: Parábola

É importante ressaltar para os alunos que no caso apresentado na Figura 46, o plano é paralelo a geratriz do cone. A construção da Parábola é feita seguindo os procedimentos descritos abaixo.

- Traçar a reta  $r$ .
- Determinar o ponto  $A$ , tal que  $A \notin \mathbf{P}$ .
- No menu ao acionar o ícone *Modos* seleciona-se *Conic* e em seguida *Parabola by point and line* como apresentado na Figura 47.
- Seleciona-se inicialmente o ponto  $A$  depois a reta  $r$ , chamada de reta diretriz, obtendo a Parábola representada na Figura 48.

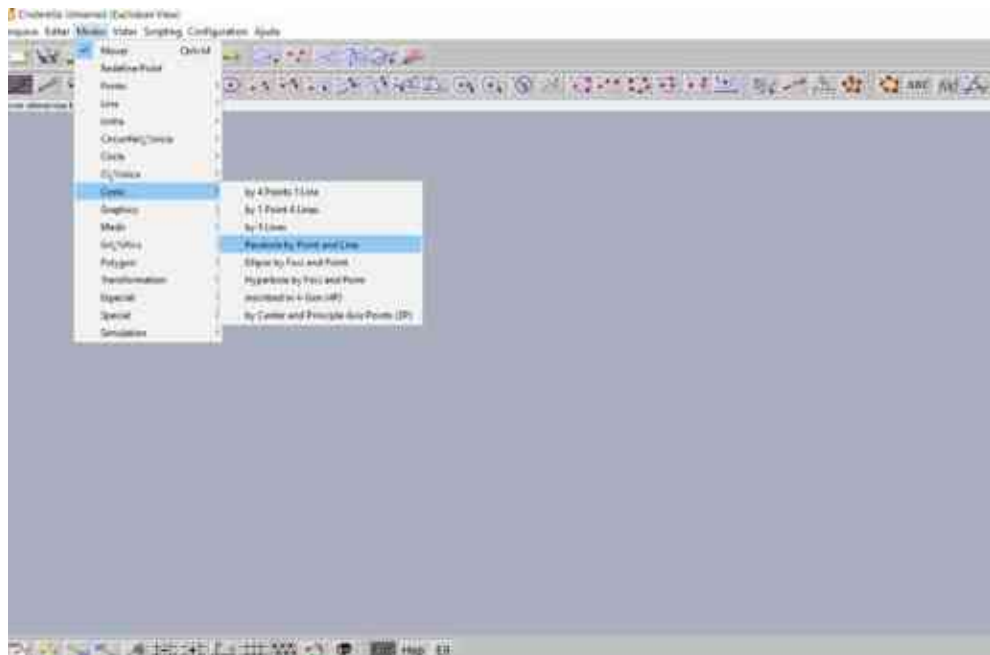


Figura 47: Cinderella: Construção de Cônicas - Parábola

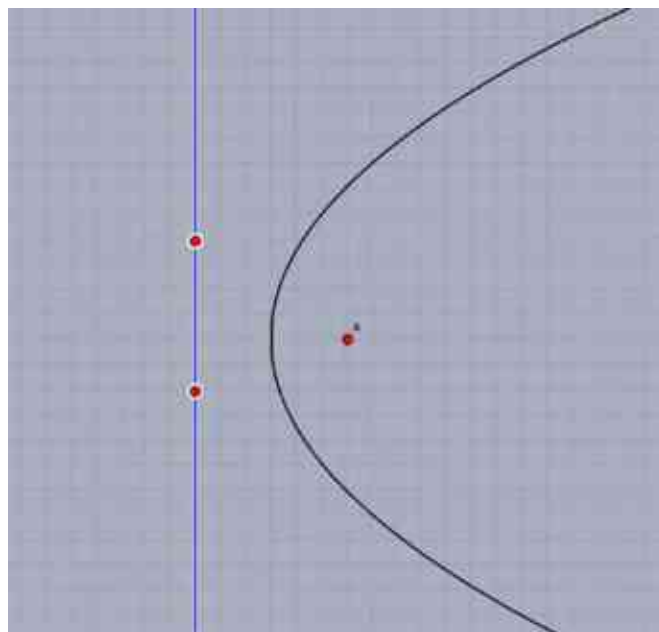


Figura 48: Cinderella: Parábola

Os principais elementos da Parábola foram representados na Figura 49.

- *Reta Focal* é a reta que contém o foco A e é perpendicular à Reta Diretriz.
- *Vértice da Parábola* é o ponto médio do segmento que tem extremidades no foco e no ponto de interseção da Reta Focal com a Reta Diretriz.

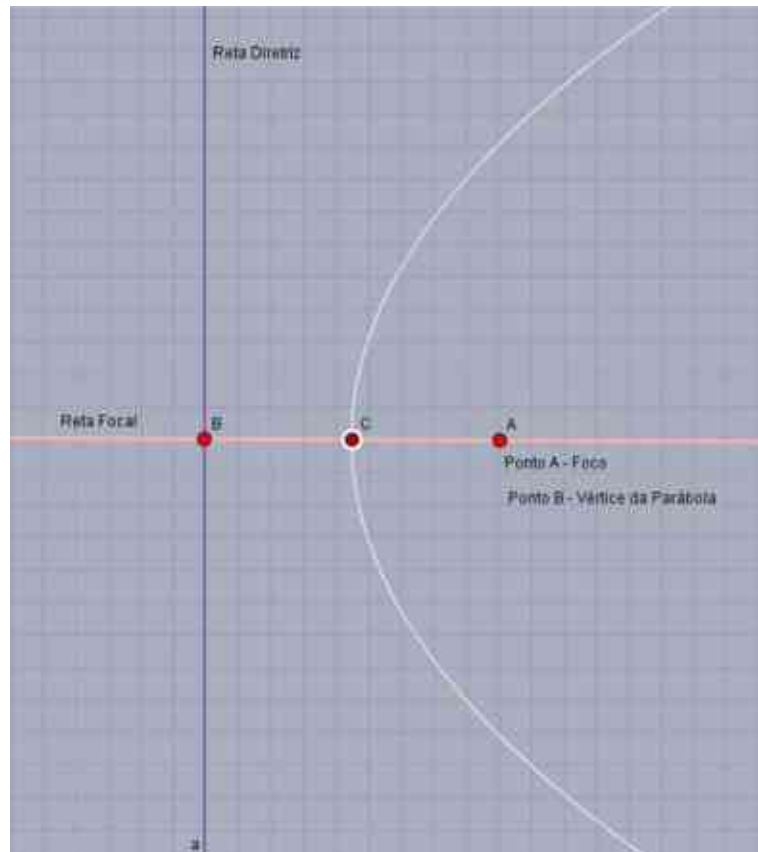


Figura 49: Elementos da Parábola

A atividade apresentada é apenas um exemplo da utilização do *software* Cinderella para o Ensino de Geometria no intuito de desenvolver as habilidades previstas na BNCC do Ensino Médio. O processo de construção de Cônicas descrito nessa seção facilita a compreensão dos alunos sobre seus elementos essenciais e aproxima os objetivos da aprendizagem da realidade tecnológica em que os alunos estão inseridos.

## 5 Considerações Finais

O relato realizado sobre as reformas educacionais do ensino brasileiro, em especial, na etapa final da Educação Básica, aponta para constante tentativa de adequação do ensino às necessidades da sociedade e nesta perspectiva, observa-se que em cada uma das mudanças apresentadas, a Matemática ocupa um papel de destaque em face de sua ligação direta com a evolução da humanidade.

Desde os primeiros indícios da organização do Ensino Secundário no Brasil, iniciado com a Reforma Francisco Campos até os dias atuais apresentados pela proposta do Novo Ensino Médio, fica evidenciado como estas modificações representam um reflexo da construção histórica de cada período. Os conteúdos que compõem o currículo de Geometria não sofreram grandes transformações ao perpassar pelas reformas estudadas. De modo geral o aluno no Ensino Médio tem como estrutura para o Ensino de Geometria, inicialmente, uma revisão de Geometria Plana, objeto de estudo principal no Ensino Fundamental, posteriormente estudos direcionados à Geometria Espacial, Métrica, e no último ano, Geometria Analítica.

Apesar de ser visto como obsoleto o ensino sob ótica tradicional que prevaleceu até o final da década de 90, com repetições de fórmulas e demonstrações de teoremas, exigia dos alunos um conhecimento aprofundado sobre construções geométricas, principalmente aquelas realizadas com régua e compasso. Esta abordagem propicia a consolidação das propriedades estudadas de forma efetiva, porém esta metodologia se apresentava desvinculada da realidade dos educandos e professores.

Com o advento da pedagogia construtivista e o movimento Educação para Todos, surgiu no Brasil um grande debate sobre metodologias de Ensino de Matemática. A proposta de interdisciplinaridade e aplicabilidade dos conteúdos trazem à tona o definitivo rompimento com o repasse de fórmulas e postulados. O foco continua sendo a Geometria Euclidiana, porém todo o ensino-aprendizagem está pautado na resolução de situações-problema. Este movimento é constatado na análise da avaliação do ENEM que busca trazer a Geometria Plana, Métrica e Espacial nesta perspectiva. Como salientado, o currículo não mudou, mas percebe-se que no modelo atual a Geometria Analítica apresenta-se de maneira muito tímida nas avaliações externas se contrapondo ao modelo de exame, vestibular, onde a presença destes tópicos era constante no decorrer das provas.

Mesmo com as mudanças oriundas da aplicação das propostas dos PCNEM, avaliações da Educação Básica, como o SAEB, apresentam dados alarmantes acerca do Ensino de Geometria. Baixos índices de aprendizagem e evasões alarmantes no Ensino Médio, são evidentes sinais da necessidade de uma mudança na estrutura e principalmente nas

metodologias de ensino-aprendizagem nesta etapa da Educação Básica. Claro que não bastam apenas mudanças curriculares, existem outros fatores como formação de professores, livros didáticos, estrutura física das escolas, contexto social e tantos outros aspectos que impactam diretamente na aprendizagem dos educandos.

Neste contexto surge a reforma iniciada com a elaboração do Plano Nacional de Educação e posteriormente o Novo Ensino Médio, em que para muitas das questões supracitadas, são apresentadas propostas de melhorias. Culminando este processo a Base Nacional Comum Curricular apresenta-se como uma resposta aos anseios de mudanças efetivas nas metodologias de aprendizagem. Nela vemos que não basta contextualizar as questões propostas, se o aluno não for instigado ao desenvolvimento de competências e habilidades para a vida. A aplicação do conhecimento adquirido na sociedade, é o que traz a real significação para esta etapa final da Educação Básica.

De acordo com a BNCC do Ensino Médio o professor deve, em sala de aula, promover atividades que tornem o aluno protagonista de sua aprendizagem. As habilidades propostas de modo geral procuram desenvolver ações como investigar, planejar, descobrir e propor. Levando em consideração que a Geometria é uma das ferramentas para a compreensão e modificação do espaço que o cerca. Observamos que se faz necessário a inserção de materiais que propiciem todos estes aspectos no ambiente escolar.

As sugestões apresentadas no último capítulo deste trabalho evidenciam o leque de possibilidades para o ensino com abordagens pautadas na nova reforma, a reflexão que deixamos é que mudanças efetivas só ocorrerão de fato a âmbito nacional, se houver engajamento de todos os envolvidos no processo para execução da proposta. Não se trata de defender ou se opor as políticas implementadas, o debate sobre os aspectos positivos e pontos que precisam ser corrigidos só podem ser evidenciados após sua execução, afinal este trabalho nos possibilita reconhecer que se a sociedade continua em constante evolução, nossa educação precisa acompanhar este desenvolvimento pois ambas são indissociáveis.

## Referências

- [1] BRASIL, CONGRESSO NACIONAL. *Decreto de Lei N° 4.024 Lei de Diretrizes e Bases da Educação*. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4024-20-dezembro-1961-353722-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em 15/07/2019.
- [2] BRASIL, CONGRESSO NACIONAL. *Decreto de Lei N° 5.692 Lei de Diretrizes e Bases da Educação*. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em 15/07/2019.
- [3] BRASIL, INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *Matriz de Referência de Matemática SAEB*. Disponível em [http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/prova\\_brasil\\_saeb/menu\\_do\\_professor/o\\_que\\_cai\\_nas\\_provas/Matriz\\_de\\_Referencia\\_de\\_Matematica.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/menu_do_professor/o_que_cai_nas_provas/Matriz_de_Referencia_de_Matematica.pdf). Acesso em 20/06/2019.
- [4] BRASIL, INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *Resultados do SAEB 2017*. Disponível em <https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d>. Acesso em 24/06/2019.
- [5] BRASIL, INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *Saeb 2001: novas perspectivas*. Brasília: MEC/SEF, 2002a.
- [6] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- [7] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE PÚBLICA. *Decreto de lei nº 19.890, de 18 de abril de 1931. Organização do Ensino Secundário*. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>. Acesso 27/03/2019.
- [8] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE PÚBLICA. *Decreto de lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942. Lei Orgânica do Ensino Secundário*. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em 27/03/2019.
- [9] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE PÚBLICA. *Portaria Ministerial - Programas do curso fundamental do ensino secundário e instruções metodológicas*. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104322>. Acesso 26/05/2019.

- [10] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Bases Legais*. Brasília: MEC, 2000.
- [11] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. *Parâmetros Curriculares Nacionais- PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares*. Brasília: MEC, 2002.
- [12] BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais- terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC, 1998.
- [13] BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [14] BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC, 1997.
- [15] CAMPOS, FRANCISCO. *Exposição de Motivos*. In: *Brasil. Ministério da Educação e Saúde Pública. Organização do Ensino Secundário*. Porto Alegre: Livraria Globo, 1933.
- [16] CARNEIRO, VERA CLOTILDE GARCIA. *Engenharia Didática: Um referencial para ação investigativa e formação de professores de Matemática*. Revista Zetetike. Campinas, UNICAMP. v.13.n.13, 2005.
- [17] COPERVE, COMISSÃO PERMANENTE DE CONCURSO E VESTIBULAR. *Concurso Vestibular Unificado 1993*. Disponível em <http://www.mat.ufpb.br/vestibular/anterior.htm>. Acesso 24/04/2019.
- [18] CURY, CARLOS ROBERTO JAMIL. *Como a Constituição de 1988 mudou a educação*. Revista Nova Escola. 2018. Disponível em <https://novaescola.org.br/conteudo/12660/como-a-constituicao-de-1988-mudou-a-educacao>. Acesso em 23/06/2019.
- [19] DAINVILLE, FRANÇOIS. *L'education des Jésuites (XVIe - XVIIIe. Siècles)*. Paris: Lês Éditions, 1978.
- [20] DASSIE, BRUNO ALVES. *A matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema*. Dissertação - (mestrado)- Pontífica Universidade do Rio de Janeiro, 2001. Disponível em <https://app.uff.br/riuff/handle/1/2192>.



- [21] ENEM, INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacaobasica/enem/ppl/2017/provas/P207AZUL.pdf>. Acesso em 14/05/2019.
- [22] FREIRE, OLAVO. *Noções de Geometria Prática*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1942.
- [23] FONSECA, MARIA DA C. FERREIRA REIS. *A educação matemática e a ampliação das demandas de leitura escrita da população brasileira*. In: FONSECA, M. C. F. R. (org.). *Letramento no Brasil; habilidades matemáticas*. São Paulo: Global, 2004.
- [24] GODOY, ELENILTON VIEIRA.; SANTOS, VINÍCIUS DE M. CARNEIRO, VERA CLOTILDE GARCIA. *O cenário do ensino da matemática e o debate sobre o currículo de matemática*. Revista Práxis. Vitória da Conquista, Edições UESB. v.8. n.13, jul/dez 2012.
- [25] GORODSKI, CLÁUDIO. *Alguns aspectos do desenvolvimento da Geometria*. 2012. Disponível em <http://www.ime.usp.br/gorodski/ps/>. Acesso em 15/05/2019.
- [26] HAIDAR, MARIA DE LOURDES MARIOTO. *O Ensino Secundário no Brasil Império*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.
- [27] INEP, INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. *Matriz de Referência ENEM*. 2009. Disponível em [http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz\\_referencia.pdf](http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf). Acesso em 06/03/2019.
- [28] ISOTANI, SEIJI. *Desenvolvimento de ferramentas no IGEON: utilizando a Geometria Dinâmica no ensino presencial e a distância*. Dissertação - (mestrado)- Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2005. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45134/tde-17092005-063522/pt-br.php>. Acesso em 28/03/2019.
- [29] LIMA, ELON LAGES ; PINTO, PAULO CEZAR ; WAGNER, EDUARDO ; MORGADO, AUGUSTO CÉSAR. *A Matemática no Ensino Médio*. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [30] MIORIM, MARIA ÂNGELA. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

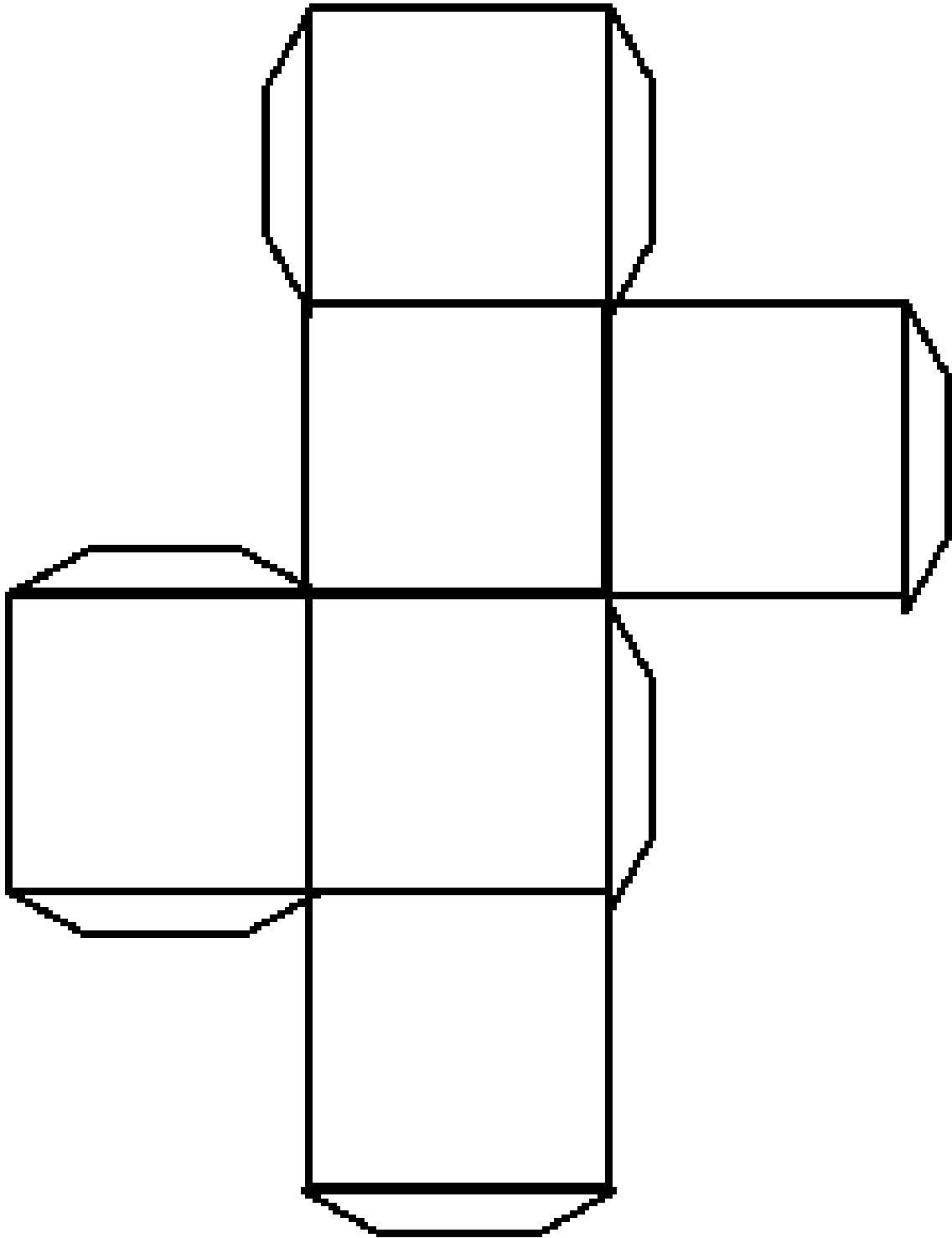
- [31] MUNIZ, ANTONIO CAMINHA MUNIZ . *Geometria*. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: Atual, 2013.
- [32] NUNES, MARIA THETIS . *Ensino Secundário e sociedade brasileira*. Rio de Janeiro: Instituto Superior de Estudos Brasileiros, 1962.
- [33] OLIVEIRA, ZÉLIA MARIA FREIRE. *Currículo: um instrumento educacional, social e cultural*. Revista Diálogos Educacionais. Curitiba, Edições UESB. v.8. n.24, mai/ago 2018.
- [34] PEREIRA, MARIA ZULEIDE DA COSTA. *Globalização e políticas curriculares no Brasil de 1985 a 2006: entre os processos de regulação e emancipação. Espaço do Currículo*. João Pessoa: Associação de Estudos e Pesquisas em Políticas e Práticas Curriculares, n.1, mar/dez. 2008. Disponível em <http://www.aepppc.org>. Acesso em 20/06/2019.
- [35] PIAGET, JEAN. *O Estruturalismo*. São Paulo - Rio de Janeiro: Editora Difel/ Saber Atual, 1974.
- [36] SANT'ANNA, ILZA MARTINS. *Por que avaliar? Como avaliar?: Critérios e instrumentos*. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 1995.
- [37] SERRS, MICHEL. *As origens da Geometria*. Lisboa: Editora Terramar, 2008.
- [38] ROXO, EUCLIDES. *A matemática na Educação Secundária*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1937.
- [39] TONEGUTTI, CLÁUDIO ANTÔNIO. *Base Nacional Comum Curricular: Uma Análise Crítica*. 2016. Disponível em <http://www.sismmac.org.br/disco/arquivos/eventos/Artigo-BNC-Tonegutti.pdf>. Acesso em 02/05/2019.
- [40] VALENTE, WAGNER RODRIGUES. *Uma história da Matemática Escolar no Brasil(1730 -1930)*. São Paulo: Annabluma, 1999.

## 6 Apêndices

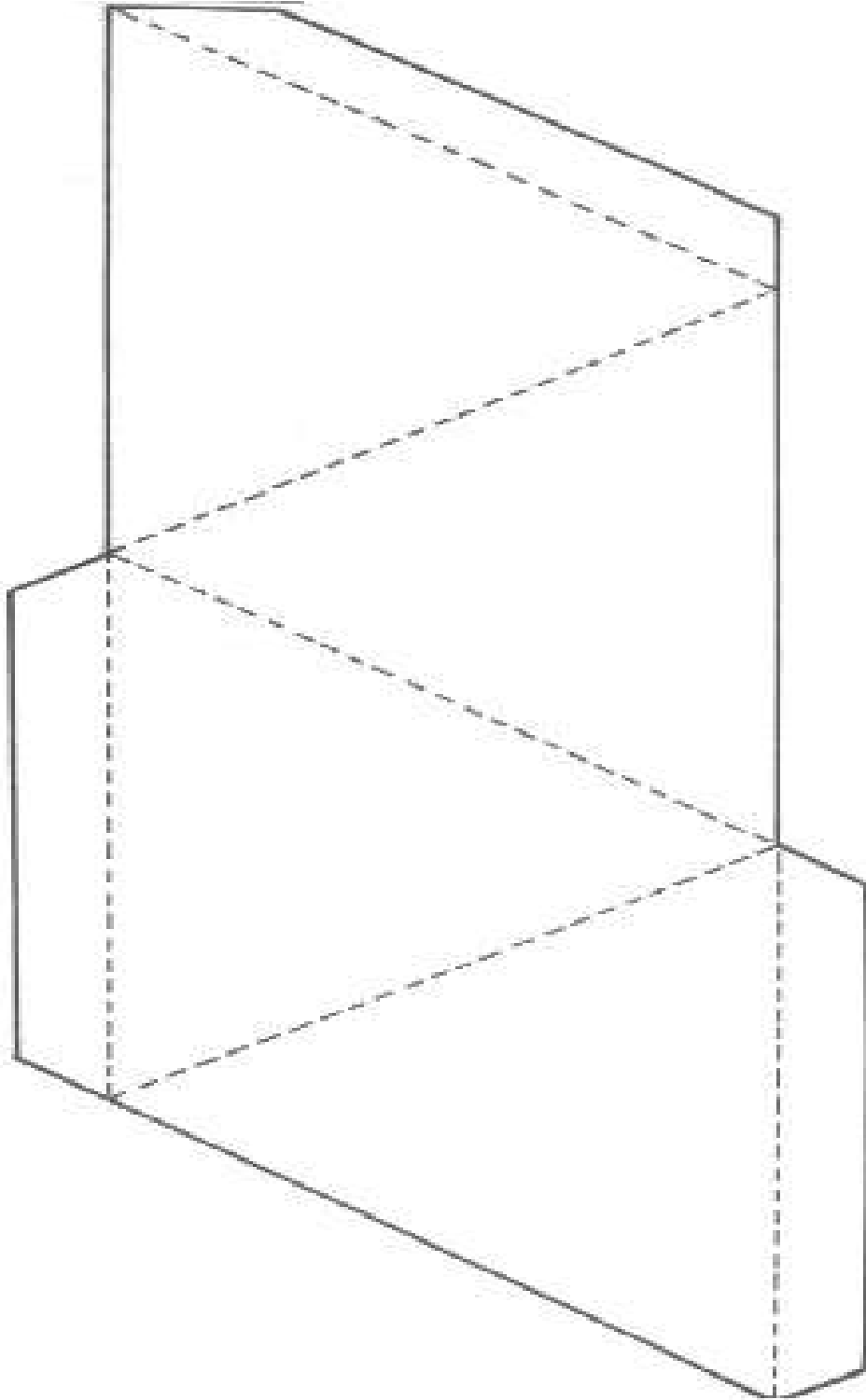
Moldes das planificações dos Sólidos de Platão.

- Planificação do Cubo.
- Planificação do Tetraedro.
- Planificação do Dodecaedro.
- Planificação do Octaedro.
- Planificação do Icosaedro.

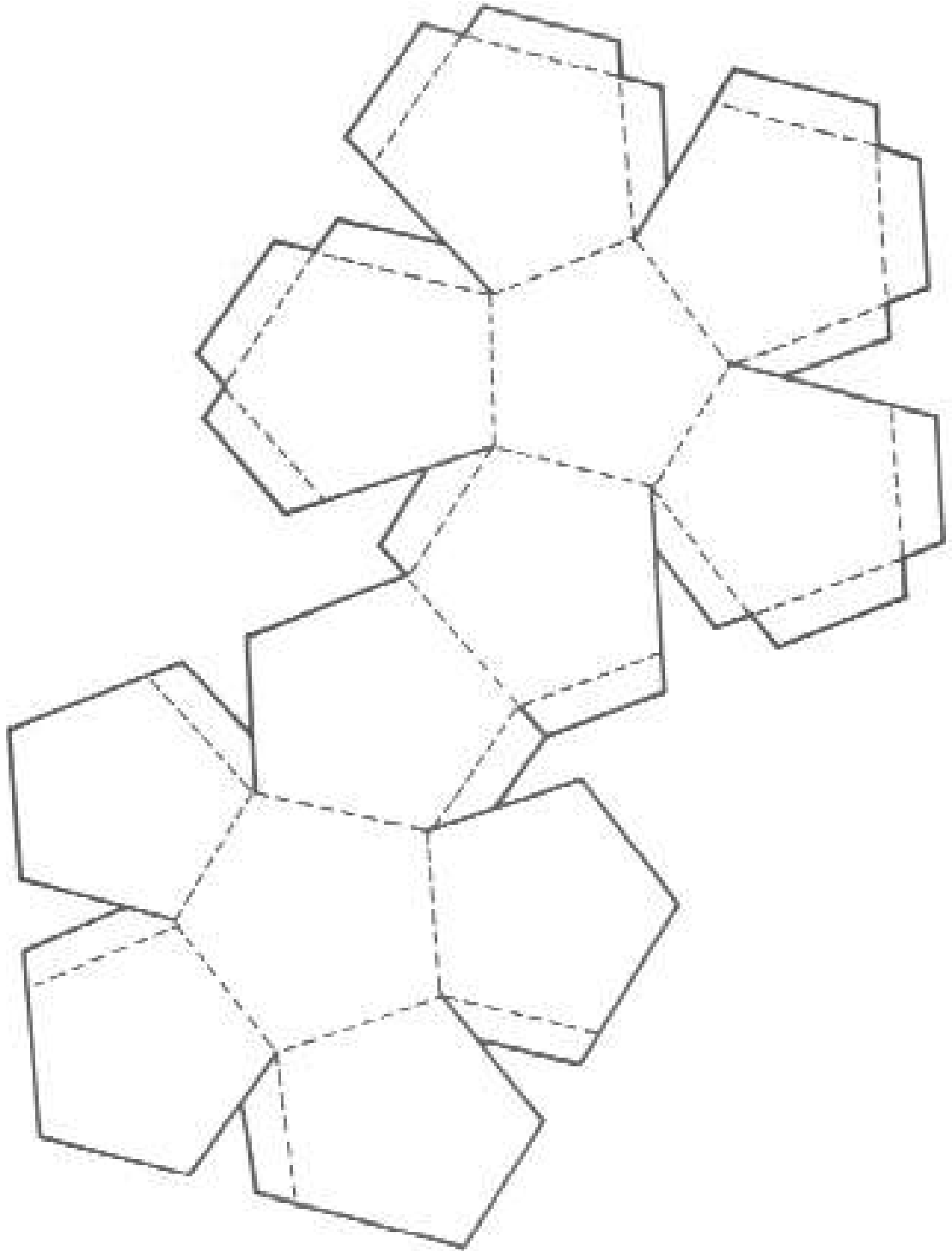
### 6.1 Planificação do Cubo



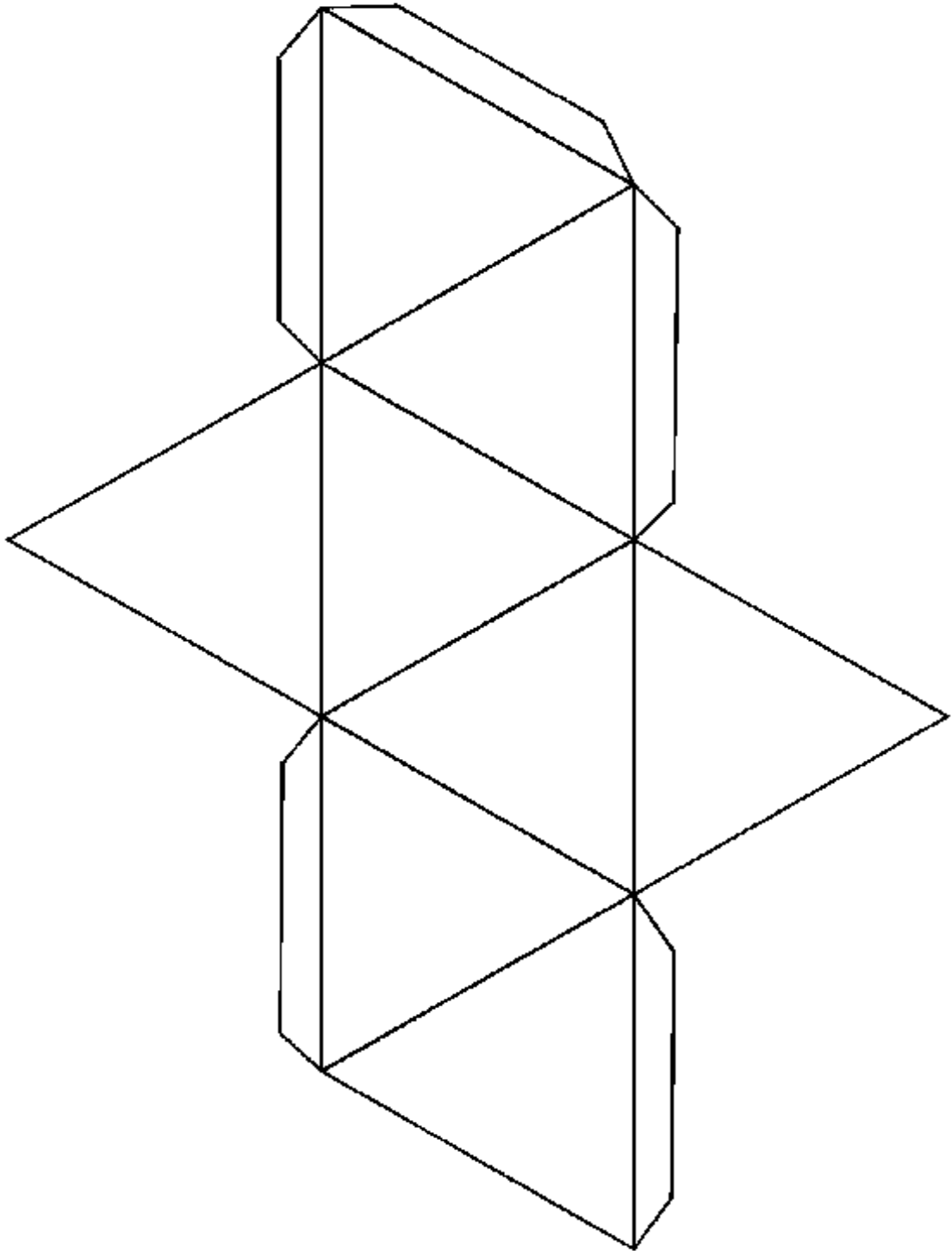
## 6.2 Planificação do Tetraedro



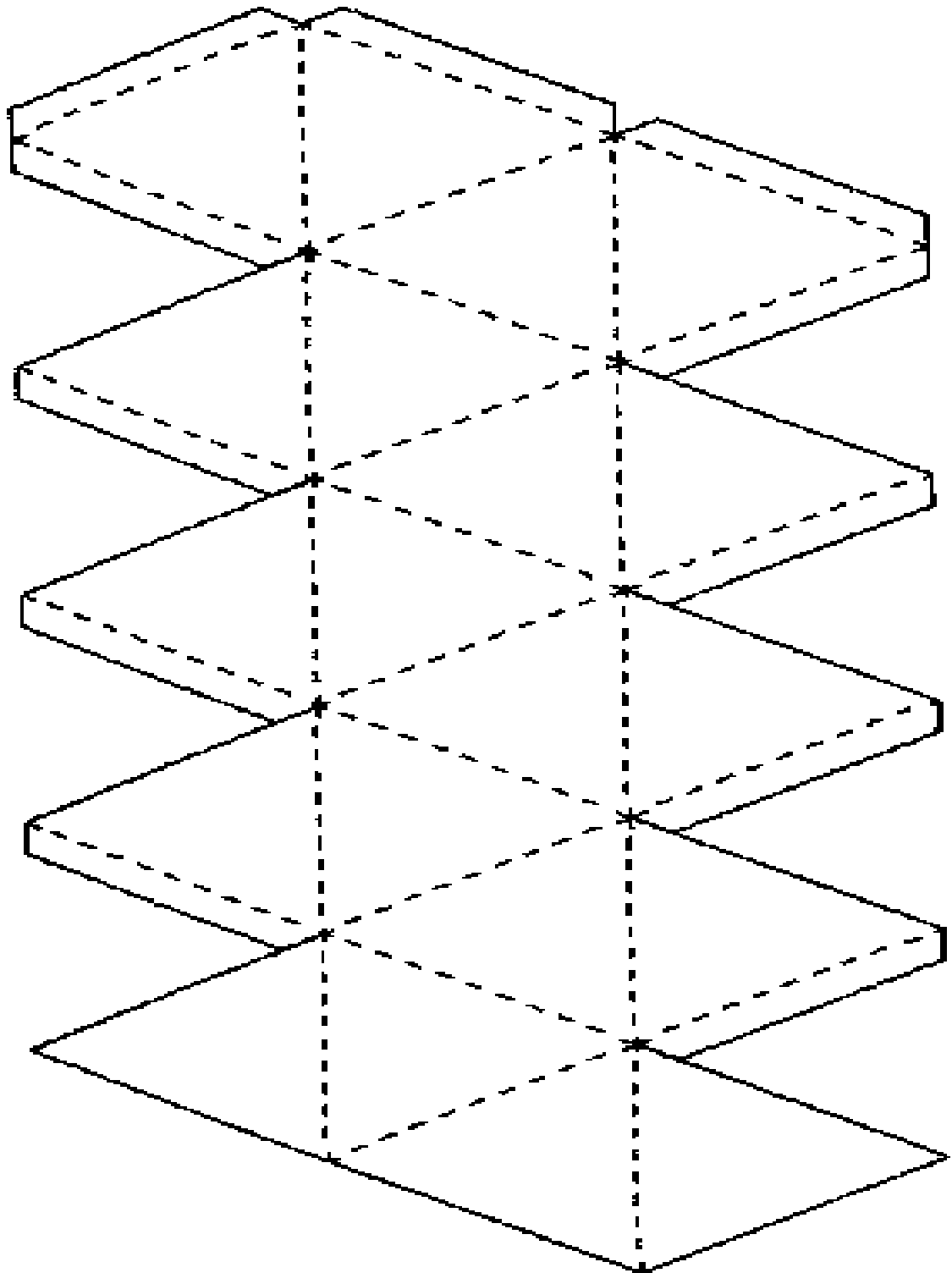
### 6.3 Planificação do Dodecaedro



## 6.4 Planificação do Octaedro



### 6.5 Planificação do Icosaedro





## 7 Anexos

### 7.1 Programa Curricular de Matemática do Curso Fundamental da Reforma Francisco Campos

#### PRIMEIRA SÉRIE (3 horas)

**I - Iniciação geométrica** Principais noções sobre formas geométricas. Área do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio; circunferência e área do círculo. Volumes do paralelepípedo retângulo, do cubo, do prisma triangular, do cilindro e do cone circular (retos). Fórmulas.

**II - Aritmética** Prática das operações fundamentais. Cálculo abreviado. Exercício de cálculo mental. Noção de múltiplo e de divisor. Caracteres de divisibilidade. Decomposição em fatores primos; aplicação ao m. d. c. e ao m. m. c. Frações ordinárias e decimais. Operações com as frações. Explicação objetiva pelo fracionamento de objetos ou de grandezas geométricas. Sistema métrico decimal. Prática das medidas de comprimento, superfície, volume e peso. Sistema inglês de pesos e medidas. Quadrado e raiz quadrada de números inteiros e decimais; aproximação no cálculo da raiz. Traçado de gráficos.

**III - Álgebra** Símbolos algébricos; fórmulas; noção de expoente. Números relativos ou qualificados. Operações. Explicação objetiva das regras dos sinais. Cálculo do valor numérico de monômios e polinômios. Redução de termos semelhantes; adição e subtração. Multiplicação de monômios e polinômios, em casos simples. Explicação objetiva pela consideração de áreas. Potências de monômios. Quadrado de um binômio. Primeira noção de equação com uma incógnita; resolução de problemas numéricos simples.

#### SEGUNDA SÉRIE (3 horas)

**I - Iniciação geométrica** Noção de ângulo e de rotação; ângulos adjacentes, complementares, suplementares, opostos pelo vértice. Medida dos ângulos. Uso do transferidor. Paralelas e perpendiculares; problemas gráficos sobre seu traçado. Triângulos: alturas, medianas, e bissetrizes; soma dos ângulos internos e externos. Estudo sucinto dos quadriláteros. Noções sobre figuras semelhantes; escala. Medida indireta das distâncias. Razões entre lados de um triângulo retângulo. Seno, co-seno e tangente de ângulo agudo. Uso de tabelas de senos, co-senos e tangentes naturais.

**II - Aritmética e Álgebra** Noção de função de uma variável independente. Representação gráfica. Estudo das funções  $y = ax$  e  $y = a/x$ ; exemplos. Proporções e suas principais propriedades. Resolução de problemas sobre grandezas proporcionais. Porcentagens, juros,

desconto (comercial), divisão proporcional, câmbio. Equações do 1º grau com uma incógnita. Problemas. Interpretação das soluções negativas. Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Problemas. Representação gráfica da função linear de uma variável. Resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas. Divisão algébrica. Expoente zero. Expoente negativo. Decomposição em fatores. Frações algébricas. Simplificações.

### **TERCEIRA SÉRIE (3 horas)**

**I - Aritmética e Álgebra** Equações e problemas de 1º grau com uma ou mais incógnitas. Desigualdade do 1º grau. Potências e raízes. Estudo das funções  $y = xm$ ,  $y = l / xm$  e  $y = Vx$ ; representação gráfica. Cálculo dos radicais. Expoentes fracionários. Trinômio do 2º grau. Equação do 2º grau. Resolução gráfica; resolução analítica. Discussão: propriedades das raízes. Desigualdades do 2º grau.

**II - Geometria** Conjunto de proposições fundamentais que servem de base à Geometria dedutiva. Noções sobre deslocamentos elementares no plano; translação e rotação de figuras. Simetria. Estudo de triângulos. Estudo dos polígonos; soma dos ângulos internos e externos. Noção e exemplares de lugar geométrico. Círculo; propriedades dos arcos e cordas. Tangente e normal. Medidas dos ângulos. Linhas proporcionais; linhas proporcionais no triângulo. Semelhança; homotetia. Relações métricas no triângulo. Relações métricas no círculo. Média proporcional.

### **QUARTA SÉRIE (3 horas)**

**I - Aritmética e Álgebra** Equações biquadradas e equações irracionais. Problemas do 2º grau; discussão. Progressão aritmética. Propriedades. Interpolação. Progressão geométrica. Propriedades. Interpolação. Estudo da função exponencial. Logaritmos; propriedades. Uso das tábuas. Régua logarítmica. Juros compostos; unidades.

**II - Geometria** Polígonos regulares; relação métrica nos polígonos regulares. Medida da circunferência; cálculo de pi (método dos perímetros). Áreas equivalentes; relação entre áreas de figuras semelhantes. Retas e planos no espaço. Ângulos poliedros. Triedros suplementares. Os de Prisma e pirâmides. Cilindro e cone. Esfera. Seções planas. Pólos; plano tangente; cone e cilindro circunscritos. Noção sobre geração e classificação das superfícies; superfícies regradadas, de revolução, desenvolvíveis. As funções circulares; relações entre essas funções. Gráficos. Expressões da tangente, cotangente, secante e co-secante em função do seno e co-seno e tangente da soma de dois ângulos, do dobro de um ângulo, da metade de um ângulo.

### **QUINTA SÉRIE (3 horas)**

**Aritmética, Álgebra e Geometria** Resolução de triângulos retângulos, prática das tábuas de logaritmos. Casos simples de resolução de triângulos oblíquângulos. Noções de

---

análise combinatória. Binômio de Newton (caso de expoente inteiro e positivo). Derivada de um polinômio inteiro em  $x$ . Noção de limite. Derivada de  $x$ . Derivada de seno de  $x$ , co-seno de  $x$ , tangente de  $x$  e cotangente de  $x$ . Interpretação geométrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples. Processos elementares de desenvolvimento em série; convergência de uma série. Desenvolvimento em série do seno, co-seno e tangente. Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Aplicação ao cálculo de certas áreas. Volumes do prisma e do cilindro; da pirâmide, do cone e dos respectivos troncos. Volume da esfera e suas partes. Estudo sucinto das seções cônicas.