Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell

Paulo Henrique Joca de Sá Barreto

Juazeiro do Norte

2019

Paulo Henrique Joca de Sá Barreto

Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Érica Boizan Batista.

Juazeiro do Norte

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S11s Sá Barreto, Paulo Henrique Joca de.
Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell / Paulo Henrique Joca de Sá Barreto. – 2019.
61 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.
(Inclui bibliografia p. 60-61).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2019.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Profª. Dra. Érica Boizan Batista

1. Sequências. 2. Fibonacci. 3. Lucas. 4. Pell. I. Título.

. CDD 510.7

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell

Paulo Henrique Joca de Sá Barreto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 17 de maio de 2019.

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Érica Boizan Batista
Orientadora

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
UFCA

Prof. Dr. André Amarante Luiz
IFSP

Dedico este trabalho aos meus pais, José Erlânio de Sá Barreto e Maria Antonina de Freitas.

Agradecimentos

Aos meus pais, José Erlânio de Sá Barreto e Maria Antonina de Freitas, por todo carinho e apoio que sempre me deram.

À minha orientadora, Erica Boizan Batista, por toda a atenção e ajuda que me deu nessa empreitada.

A todos os colegas que tive enquanto cursei o PROFMAT. Aprendi muito com todos.

A todos professores que tive a honra de ser aluno nessa jornada dentro do PROFMAT na UFCA.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, abordamos três sequências lineares de segunda ordem: Fibonacci, Lucas e Pell. Mostramos que elas podem ser definidas por recorrência, fórmula posicional (Teorema de Binet) ou forma matricial. Exploramos e demostramos algumas propriedades dessas sequências com destaque para as que apresentavam similaridades entre pelo menos duas delas. Tendo como público alvo professores de matemática, estudantes de graduação ou pós-graduação em matemática e áreas afins, expomos a aplicabilidade das sequências em sala de aula através de problemas contextualizados que conectam essas sequências a outros conteúdos matemáticos. Todos os problemas sugeridos foram elaborados objetivando estimular o raciocínio matemático construtivo e são passiveis de adaptações para uma melhor prática pedagógica do professor.

Palavras-chave: Sequências, Fibonacci, Lucas, Pell.

Abstract

In this work, we approached three linear sequences of second order: Fibonacci, Lucas and Pell. We show that they can be defined by recurrence, positional formula (Binet's Theorem) or matrix form. We studied and proved some properties of these sequences, especially those with similarities between at least two of them. Focusing on mathematics teachers, undergraduate or graduate students in mathematics and related fields, we expose the applicability of such sequences in classroom through contextualized problems that connect these sequences to other mathematical contents. All of the suggested problems were elaborated in order to encourage a constructive mathematical reasoning and are adaptable to a better pedagogical practice of the teacher.

Keywords: Sequences, Fibonacci, Lucas, Pell.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Padrões na matemática são observados desde a antiguidade. Tomemos como exemplo a civilização do antigo Egito, que era muito desenvolvida agricolamente, a qual conseguiu estabelecer padrões para prever as cheias do rio Nilo e decidir as melhores épocas para o plantio dos seus alimentos. Ainda observando padrões, os egípcios desenvolveram um calendário composto de 12 meses e três estações, uma de plantar, uma de crescimento, e uma de colheita.

As sequências de quadrados e cubos de números inteiros eram conhecidas pelos Babilônicos há aproximadamente 4000 anos atrás. O famoso papiro Rhind, que foi escrito por Ahmes em 1650 a.C., trás 85 problemas matemáticos dos quais alguns deles versam sobre progressões aritméticas e geométricas. Por exemplo: *"Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores"*.

Já a escola de Pitágoras, no século VI a.C., estudava as sequências figuradas como os números triangulares, quadrados, pentagonais e assim por diante. Foram também os pitagóricos que observaram os padrões e teorizaram sobre a conexão da música com a matemática construindo uma escala musical fundamentada em razões simples entre os números inteiros chamada sequência harmônica.

A identificação de padrões também teve um papel fundamental na segunda guerra mundial, quando Alan Turing quebrou o código de comunicação dos nazistas e desenvolveu o protótipo de computador chamado Enigma.

Nesse trabalho vamos explorar três sequências lineares de segunda ordem, a saber Fibonacci, Lucas e Pell. Nossa intenção é provar fórmulas e propriedades interessantes relacionadas a essas sequências, bem como evidenciar a correlação entre as mesmas e outro tópicos matemáticos. Usamos como base para esse trabalho as referências [2], [6], [7],[8], [15], [18], [19]. O trabalho foi realizado em 6 capítulos e as considerações finais.

No segundo capítulo apresentamos o Princípio de Indução Finita, seguido de exemplos da sua utilização nas demostrações matemáticas. Ainda neste capítulo inserimos algumas definições acerca de sequências, sempre acompanhadas de exemplos, e terminamos com a demostração do Teorema 1 que versa sobre a resolução de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes.

O terceiro capítulo será sobre a sequência de Fibonacci. Iniciamos fazendo um breve histórico de Leonardo de Pisa e o Problema dos coelhos, o que pavimenta a definição por recorrência da sequência que carrega o nome do famoso matemático. Destacamos o Teorema de Binet que apresenta uma fórmula posicional para a sequência de Fibonacci. Apresentamos também a razão áurea e o modelo matricial da sequência de Fibonacci, além de diversas propriedades interessantes. Ao longo desse estudo pincelamos alguns exemplos dessa sequência em várias áreas.

Nos capítulos 4 e 5 apresentamos as sequências de Lucas e de Pell, destacando suas similaridades com a sequência de Fibonacci: o Teorema de Binet, propriedades e a forma matricial. Pontuamos também resultados que possibilitam obter números de Lucas em função dos números de Fibonacci. Cabendo ainda ao capítulo 5 definir o número de prata.

No capítulo 6 nos propomos a mostrar a aplicabilidade das sequências no ensino básico através de problemas contextualizados que dialogam com outros temas da matemática e didaticamente apresentados proporcionando ao professor algumas opções para uso em sua prática pedagógica.

2 PRELIMINARES

O axioma de indução proposto pelo matemático italiano, Giuseppe Peano, no início do século XX é uma poderosa ferramenta usada nas demonstrações de várias propriedades envolvendo números naturais. A seguir vamos enunciá-lo e mostrar alguns exemplos da utilização desse importante axioma.

Axioma 1. *Princípio da Indução Finita: Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:*

1. *$P(1)$ é válida;*
2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.*
   Então $P(n)$ é válida para todo número natural n.

Exemplo 1. *Vamos provar, para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez da igualdade:*

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

.

Usando Indução Finita:

i) Para $n = 1$, temos $P(1) : 1 = 1^2$.

ii) Supondo $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, somando $(2n + 1)$ a ambos os membros da igualdade acima, temos

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

Logo $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Portanto $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2. *Seja $P(n) : 2^n > n$, onde $n \in \mathbb{N}$. provemos essa desigualdade também por Indução Finta:*

i) Para $n = 1$, temos $2^1 = 2 > 1$, segue que $P(1)$ é verdadeira.

ii) Suponhamos $P(n)$ verdadeira para algum n natural. Devemos mostrar a desigualdade $2^{n+1} > n + 1$. Da hipótese de indução temos $2^n > n$. Multiplicando os dois *membros da desigualdade por 2, obtemos* $2 \cdot 2^n = 2^{n+1} > 2n$. *Mostremos agora que* $2n \geq n+1$. *Note que* $n \geq 1$, *então* $n+n \geq n+1$. *Daí por transitividade* $2^{n+1} > n+1$. *Logo, pelo Princípio da Indução Finita,* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1. *Uma sequência de números reais, é uma função real* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa cada número natural* n *a sua imagem* $x(n) = x_n$ *que é chamado n-ésimo termo da sequência. Notações usuais são:* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ *ou* $(x_n)_{n\geq 1}$, *ou simplesmente* (x_n). *Em alguns casos podemos usar o conjunto* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *no lugar de* $\mathbb{N}$ *como domínio de uma sequência.*

Dizemos que a sequência (x_n) está definida por uma fórmula posicional (termo geral) se os valores $x_n \in \mathbb{R}$ forem dados por uma fórmula em n a qual nos permite calcular o valor de qualquer termo, sabendo apenas a posição n ocupada por ele.

Exemplo 3. *Alguns tipos de sequências:*
a) *A sequência* (x_n) *dos números naturais pares é* $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$, *ou seja,* $x_n = 2n$ *para* $n \geq 1$ *é classificada como sequência infinita, pois possui uma infinidade de termos.*

b) *A sequência* (x_n) *de números naturais múltiplos de 5 e menores que 35, que são* $(5, 10, 15, 20, 25, 30)$, *ou seja,* $x_n = 5n$ *para* $1 \leq n < 7$ *é classificada como sequência finita, pois possui uma quantidade finita de termos.*

c) *A sequência* (x_n) *tal que*

$$x_n = \begin{cases} n, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ n-1, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Que também pode ser dada por $(1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, \cdots)$, *esse tipo de sequência é dita monótona não-decrescente, pois se tem* $x_n \leq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

d) *A sequência* (x_n) *tal que* $x_n = \dfrac{1}{n}$, *ou seja,* $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots)$ *é um exemplo de sequência monótona não-crescente, pois se tem* $x_n \geq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

e) A sequência (x_n) dada por $x_n = 7$, ou seja, $(7, 7, 7, 7, 7, \cdots)$, é dita constante, pois os termos não se alteram.

Definição 2. *Uma recorrência é uma fórmula que define um elemento de uma sequência a partir de termos anteriores.*

Exemplo 4. *As progressões aritméticas (x_n) de razão r e primeiro termo a podem ser definidas pela seguinte recorrência $x_{n+1} = x_n + r$ com $x_1 = a$.*

Definição 3. *Dizemos que uma relação de recorrência é* ***linear*** *quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear, caso contrário dizemos que a relação de recorrência é* ***não-linear****.*

Definição 4. *Dizemos que uma relação de recorrência é de* ***primeira ordem*** *quando cada termo da sequência é encontrado necessariamente a partir do termo imediatamente anterior a ele, isto é, a_n está em função de a_{n-1}, Dizemos que uma relação de recorrência é de* ***segunda ordem*** *quando cada termo da sequência está em função de seus dois termos imediatamente anteriores a ele.*

Definição 5. *Dizemos que uma relação recorrência é* ***homogênea*** *quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Quando cada elemento da sequência além dos termos anteriores, também está em função de um termo independente da sequência, dizemos que a relação recorrência é* ***não-homogênea****.*

Exemplo 5. *Algumas Recorrências:*
a) *$x_n = 4x_{n-1}$ é uma recorrência linear de primeira ordem homogênea.*
b) *$x_n = x_{n-1}!$ é uma recorrência não-linear de primeira ordem homogênea.*
c) *$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ é uma recorrência linear de segunda ordem homogênea.*
d) *$x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-2} - 3n$ é uma recorrência não-linear de segunda ordem não-homogênea.*
e) *$x_n = nx_{n-1} + n^3$ é uma recorrência linear de primeira ordem não-homogênea.*

Resolver uma relação de recorrência é encontrar uma fórmula posicional que forneça cada termo x_n da sequência (x_n) em função apenas de n e não dos termos anteriores, tal fórmula é chamada *solução da recorrência.* Em [12] encontramos técnicas de resolução de recorrências lineares de primeira e de segunda ordens homogêneas e não-homogêneas. Muniz em [14] mostra como resolver de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, recorrências da forma:

$$x_{n+2} = rx_{n+fxtfs1} + sx_n$$

onde, $r, s \in \mathbb{R}$, com $s \neq 0$.

Teorema 1. *Seja x_n uma sequência de números reais tal que, para todo $n \geq 1$ inteiro, tenhamos*

$$x_{n+2} + rx_{n-1} + sx_n = 0,$$

onde r e s são constantes reais dadas, não ambas nulas. Se a equação $y^2 + ry + s = 0$ tiver raízes reais α e β, então existem constantes A e B, determinadas pelos valores de x_1 e x_2, tais que:

$$\textit{Se } \alpha \neq \beta, \textit{ então } x_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} \textit{ para todo } n \geq 1.$$

Demonstração. Sabemos que $\alpha + \beta = -r$ e $\alpha\beta = s$. Logo podemos reescrever a lei de recorrência da seguinte forma

$$x_{n+2} + (\alpha + \beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 0,$$

$$\begin{cases} x_{n+2} - \alpha x_{n+1} = \beta(x_{n+1} - \alpha x_n) \\ x_{n+2} - \beta x_{n+1} = \alpha(x_{n+1} - \beta x_n) \end{cases}$$

Definindo $b_n = x_{n+1} - \alpha x_n$ e $c_n = x_{n+1} - \beta x_n$, segue das relações acima que (b_n) e (c_n) São PG's de razões respectivamente iguais a β e α, e termos iniciais respectivamente iguais a $b_1 = x_2 - \alpha x_1$ e $c_1 = x_2 - \beta x_1$. Portanto, a fórmula para o termo geral de uma PG nos dá

$$b_n = (x_2 - \alpha x_1)\beta^{n-1} \text{ e } c_n = (x_2 - \beta x_1)\alpha^{n-1}, \text{ Isto é,}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} - \alpha x_n = (x_2 - \alpha x_1)\beta^{n-1} \\ x_{n+1} - \beta x_n = (x_2 - \beta x_1)\alpha^{n-1} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as relações acima, segue que

$$x_n = \frac{x_2 - \beta x_1}{\alpha - \beta}\alpha^{n-1} - \frac{x_2 - \alpha x_1}{\alpha - \beta}\beta^{n-1};$$

tomando

$$A = \frac{x_2 - \beta x_1}{\alpha - \beta} \text{ e } B = \frac{x_2 - \alpha x_1}{\alpha - \beta}.$$

temos $x_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$.

$\square$

3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Figura 1: Fibonacci

Fonte: [11]

Leonardo Pisano Bogollo, Leonardo de Pisa, Nasceu em Pisa, uma das primeiras cidades comerciais da Europa, e foi sem dúvida o nome mais importante da matemática ocidental na idade média. Ficou conhecido na literatura como Fibonacci, que significa filho de Bonacci.

Guilielmo Bonacci, Pai de Leonardo, era um comerciante que viajava muito, o que possibilitou a Fibonacci o contato com diversas culturas, assim logo foi introduzido ao mundo dos negócios e do cálculo onde fez despertar em si o interesse pela matemática.

Em 1202, Fibonacci publicou o livro *Liber Abaci*, livro de Ábaco ou livro de Cálculo, que contém problemas envolvendo diversas áreas da matemática. Ele também foi um dos principais nomes que ajudaram a difundir o sistema indo-arábico, que hoje conhecemos como sistema decimal, na Europa.

No Retromencionado livro encontra-se discretamente entre muitos outros o *"problema dos coelhos"* cuja a solução é uma sequência de números, a qual conhecemos pelo nome de **sequência de Fibonacci**. A transcrição original do problema pode ser encontrado em [13]: *Quot paria coniculorum in uno anno ex pario germinentur.* Vamos sintetizar a seguir esse problema:

Qual o número casais de coelhos que podem ser gerados a partir de um casal inicial, incluindo esse, ao final de 12 meses, tais que:

(1) Cada casal de coelhos recém-nascidos, demora um mês para se tornar adulto;

(2) Dois meses após seu nascimento, e mensalmente, um casal de coelhos adultos gera, no início de cada mês, um novo casal de coelhos.

(3) Não há mortes de coelhos.

Ainda em [13] podemos encontrar a solução de Leonardo de Pisa na forma de uma tabela que mostrar o crescimento da população de casais de coelhos.

Tabela 1: Problema dos coelhos

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

A solução apresentada nos indica que quando queremos saber o número de casais de coelhos de um determinado mês a partir do segundo basta somar o número de casais do mês anterior com o número de casais do mês anterior ao anterior. Assim fica estabelecida a recorrência conhecida como sequência de Fibonacci.

Definição 6. *A sequência de Fibonacci* (F_n) *é definida por:*

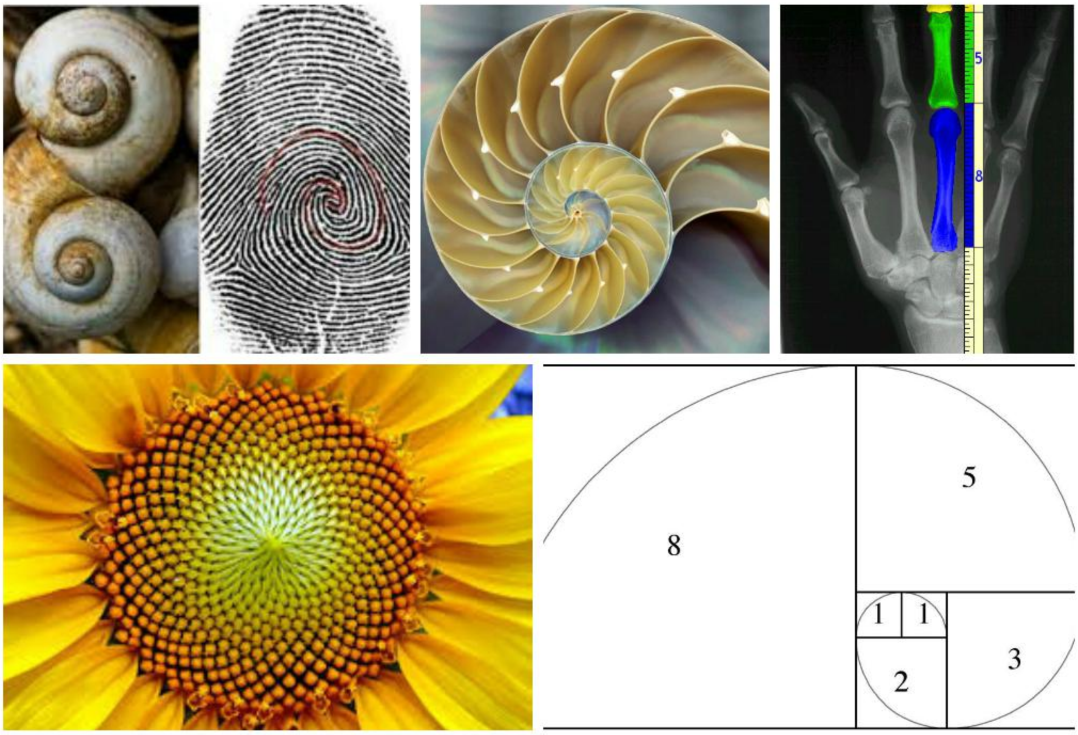
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1,$$

com $F_1 = F_2 = 1$.

Observação 1. *Quando for conveniente vamos considerar $F_0 = 0$.*

São inúmeras as aparições da sequência de Fibonacci na natureza, como por exemplo: cada novo pedaço da concha de um caramujo tem a dimensão da soma de dois pedaços antecessores, diversas partes do corpo humano estão na proporção de dois números seguidos da referida sequência, as margaridas têm 13, 21 ou 34 pétalas, as sementes dos girassóis estão distribuídas em espirais, normalmente 34 espirais no sentido horário e 55 no sentido anti-horário.

Figura 2: A sequêcia Fibonacci se manisfesta na natureza



Fonte: [11]

Destacamos também o fato da famosa sequência ser observada no crescimento de galhos, nas copas e nas folhas de algumas árvores. Segundo [1]:

> "Isso porque as plantas conseguem absorver maior radiação solar devido a este arranjo estrutural. A sequência de Fibonacci, no caso das plantas, ajuda a resolver um problema de produtividade. pois a sequência resulta em um ganho na absorção de luz solar."

A publicação também destaca um projeto sobre energia solar de um adolescente, Aidan Dwyer, 13 anos, que mostrou através de um protótipo criado por ele que placas solares dispostas como ramos e folhas de árvores baseadas na sequências de Fibonaccci eram mais eficientes na captação de luz solar do que quando dispostas na forma convencional.

Figura 3: Projeto de Aidan Dwyer

Fonte: [1]

Considere a sequência numérica (x_n) definida tomando sucessivamente dois números consecutivos da sequência de Fibonacci de modo que o termo geral da sequência é dado pela razão entre um termo e seu anterior, ou seja, $x_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Observamos na tabela:

Tabela 2: Razão da sucessão de Fibonacci

n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	x_n
1	$\frac{1}{1}$	1
2	$\frac{2}{1}$	2
3	$\frac{3}{2}$	1,5
4	$\frac{5}{3}$	1,666666...
5	$\frac{8}{5}$	1,6
6	$\frac{13}{8}$	1,625
7	$\frac{21}{13}$	1,6153846...
8	$\frac{34}{21}$	1,6190476...
9	$\frac{55}{34}$	1,617647...
10	$\frac{89}{55}$	1,6181818...
11	$\frac{144}{89}$	1,617977...

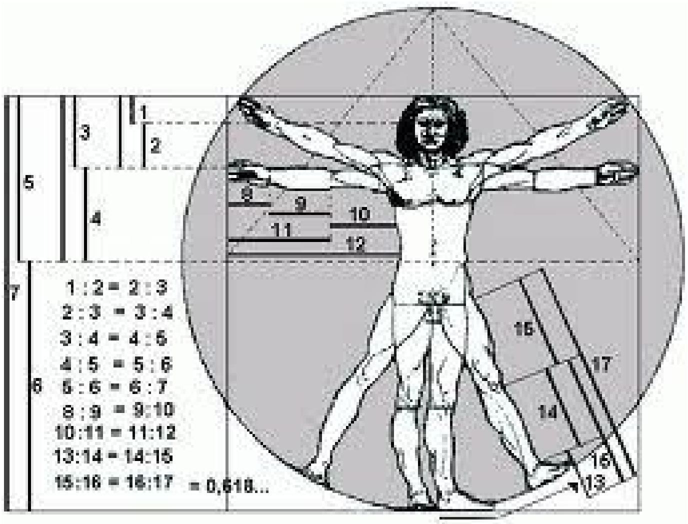
Podemos inferir que a sequência (x_n) tal que $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ converge para $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803$, esse resultado é demostrado formalmente em [9].

Definição 7. *O número áureo ou número de ouro, ou ainda razão áurea, é uma constante irracional simbolizada por ϕ tal que*

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Na arte razão áurea aparece em diversas obras consagradas, um exemplo é o trabalho de Michelangelo na Capela Sistina. Outro exemplo é Leonardo da Vinci, que usa com destaque a razão áurea nas celebres obras *Monalisa* e *O Homem Vitruviano.*

Figura 4: Homem Vitroviano



Fonte: [5]

Na arquitetura podemos observar as piramides Gizé, onde cada bloco é 1,618 vezes maior que o bloco do nível imediatamente acima. Notamos também que os gregos já conheciam a proporção, embora não a fórmula para defini-la, pois no século V a.C. usaram no Partenon a proporção de 1 para 1,618 para largura e o comprimento da fachada e da base deste templo sublinhando sua presença na arquitetura.

Em 1843, o matemático francês, Alfred Binet (1857-1911) publicou uma fórmula posicional para a sequência de Fibonacci. Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782) já conheciam tal fórmula um século antes. Porém, Binet realizou a descoberta de modo independente e tendo em vista que os outros dois já eram reconhecidos por outras descobertas, o resultado foi denominado *Teorema de Binet.*

Teorema 2. *(Teorema de Binet) Seja F_n a sequência de Fibonacci, então*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Demonstração. A equação característica da sequência de Fibonacci é $y^2 - y - 1$, onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ são suas raízes. Assim segue do Teorema 1 que

$$F_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Então

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Fazendo sucessivamente $n=1$ e $n=2$ na igualdade acima, temos

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]. \end{aligned}$$

□

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades relacionadas com a soma de termos da sequência de Fibonacci.

Proposição 1. *Seja a sequência de Fibonacci dada por:* $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, \forall n \geq 1$, *com* $F_1=F_2=1$. *As seguintes propriedades são verificadas:*

(1) $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2}-1$.

(2) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$.

(3) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1}-1$.

(4) $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$.

Demonstração.

(1) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) Para $n=1$, temos $F_1=1=F_3-1$.

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} F_k &= \sum_{k=1}^{n} F_k + (F_{n+1}) \\
&= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \\
&= F_{n+3} - 1.
\end{aligned}$$

(2) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) Para $n = 1$, temos $F_1 = 1 = F_2$.

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} + (F_{2n+1}) \\
&= F_{2n} + F_{2n+1} \\
&= F_{2n+2} \\
&= F_{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

(3) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) Para $n = 1$, temos $F_1 = 1 = F_3 - 1$.

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k} &= \sum_{k=1}^{n} F_{2k} + (F_{2(n+1)} \\
&= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} \\
&= F_{2n+3} - 1 \\
&= F_{2(n+1)+1} - 1.
\end{aligned}$$

(4) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

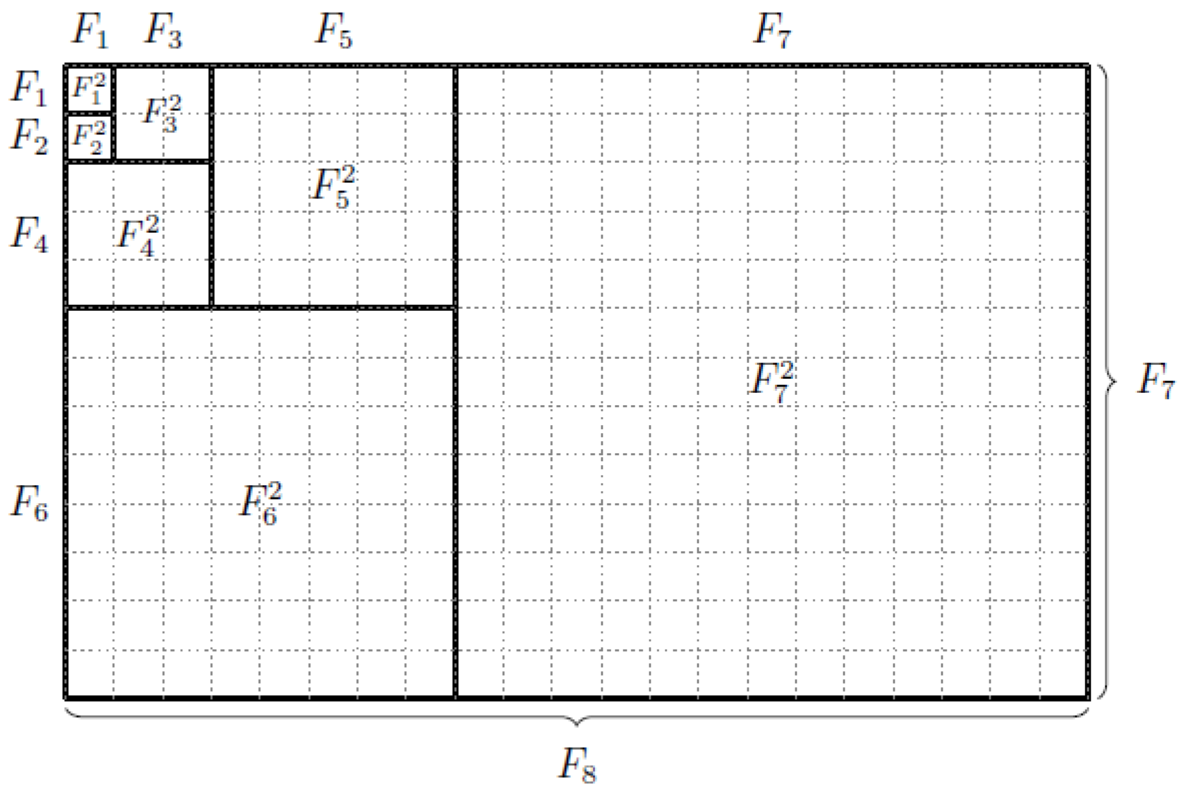
i) Para $n = 1$, temos $F_1^2 = 1 = F_1 F_2$.

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 \\ &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} F_{n+2}.\end{aligned}$$

□

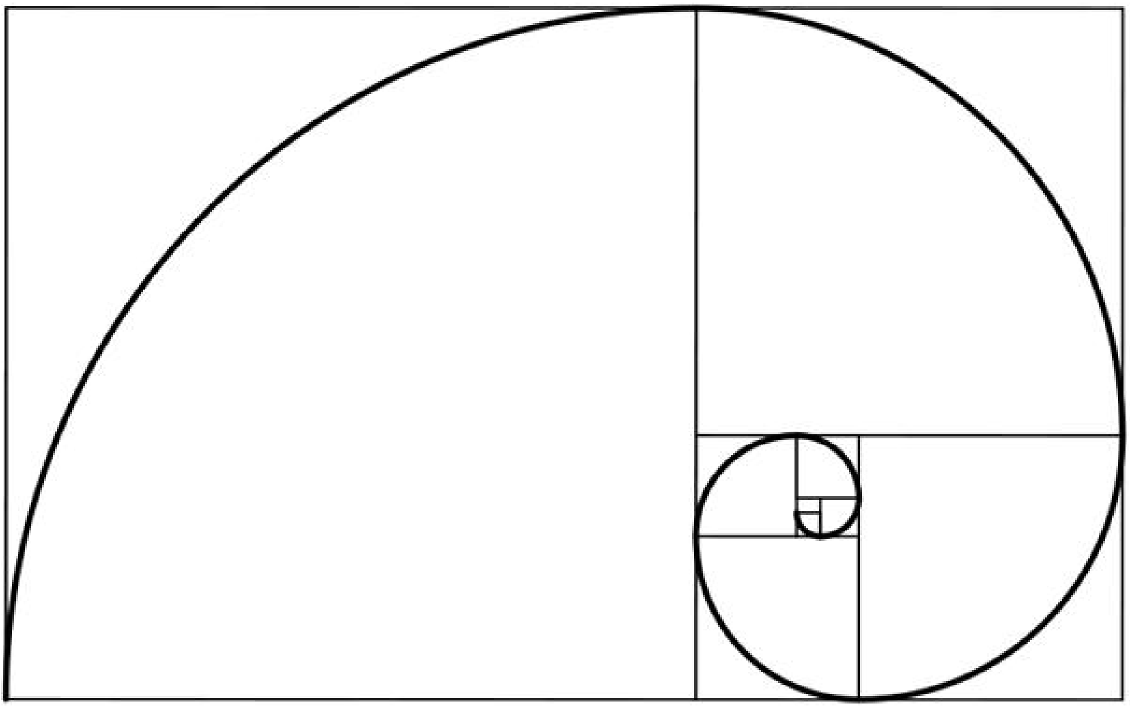
Figura 5: Representação geométrica da propriedade 4 da Proposição 1



Fonte: [3]

Sahd [17] afirma: *"Ao transformar os números da sequência de Fibonacci em quadrados e dispô-los de maneira geométrica, é possível traçar uma espiral perfeita, que também aparece em diversos organismos vivos"*.

Figura 6: Espiral de Fibonacci



Fonte: [17]

Proposição 2. *Sejam m e n inteiros positivos, então*

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}.$$

Demonstração. usando Indução Finita sobre n, temos

i) Para $n = 1$, temos

$$F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_m F_2 = F_{m-1} + F_m.$$

para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} F_{m+2} &= F_{m-1}F_2 + F_m F_3 \\ &= F_{m-1} + F_m(F_2 + F_1) \\ &= F_{m-1} + F_m + F_m \\ &= F_{m+1} + F_m. \end{aligned}$$

ii) Supondo que para todo $m > 1$ existe um número natural $n \geq 2$ tal que

$$F_{m+(n-2)} = F_{m-1}F_{n-2} + F_mF_{n-1}$$

e

$$F_{m+(n-1)} = F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n.$$

Somando membro a membro temos

$$\begin{aligned} F_{m+(n-2)} + F_{m+(n-1)} &= F_{m-1}F_{n-2} + f_mF_{n-1} + F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n \\ F_{m+n} &= F_{m-1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_m(F_{n-1} + F_n) = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$

Abordaremos em seguida a relação entre matrizes de ordem 2 e os números de Fibonacci. Tomando a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Q^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

O que nos leva a conjecturar que

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Provaremos esse resultado na proposição a seguir.

Proposição 3. *(Matriz de Fibonacci) Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Demostraremos utilizando Indução Finita sobre n.

i) Para $n = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}.$$

ii) Supondo o resultado válido para algum $n \in \mathbb{N}$, mostremos que continua válido para $n + 1$.

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= Q^n \cdot Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Daí, decorre uma interessante relação acerca dos números de Fibonacci. Sabendo que $det(Q^n) = (detQ)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^n$$

ou seja,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

O resultado acima foi descoberto pelo astrônomo francês Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) em 1680, quando ele era o diretor do observatório de Paris e ficou conhecido como *Identidade de Cassini.* Vejamos a demostração da identidade supracitada de uma outra forma.

Proposição 4. *(Identidade de Cassini)* $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$, *para todo* $n \geq 2$.

Demonstração. Faremos a demostração usado Indução Finta sobre n.

i) para $n = 1$, temos $F_2^2 = 1^2 = 1 \cdot 2 - 1 = F_1F_3 + (-1)^1$.

ii) Supondo que $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$ é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, provemos a validade para $n+1$ Somando F_nF_{n+1} em ambos os membros da igualdade, temos

$$\begin{aligned} F_n^2 + F_nF_{n+1} &= F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1} \\ F_n(F_n + F_{n+1}) &= F_n(F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n-1} \\ F_n + F_{n+2} &= F_{n+1}^2 + (-1)^{n-1} \\ -F_{n+1}^2 &= -F_n + F_{n+2} + (-1)^{n-1} \\ F_{n+1}^2 &= F_n + F_{n+2} + (-1)^n \end{aligned}$$

□

Proposição 5. *A soma dos quadrados de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, é um número de Fibonacci tal que*

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Demonstração. Pela proposição anterior (Identidade de Cassini) temos que

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1} + F_nF_{n+2} + (-1)^n.$$

Note que $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+2} = F_{2n+1}.$$

□

Proposição 6. *Seja sequência de Fibonacci* (F_n) *é definida por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1,$ *com* $F_1 = F_2 = 1$*. Então*

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2.$$

Demonstração. Usando a Proposição 2 e o fato de $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ segue que

$$\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{n+n} \\
&= F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} \\
&= F_n(f_{n+1} + F_{n-1}) \\
&= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.
\end{aligned}$$

□

4 SEQUÊNCIA DE LUCAS

Figura 7: Lucas

Fonte: [4]

François Edouard Anatole Lucas nasceu em 1842 na cidade de Amiens, França, foi o autor do Teorema de Lucas e criador do famoso jogo matemático *Torre de Hanoi*. Apaixonado por sequências, chegando até a batizar a sequência de Fibonacci, Lucas criou sua própria sequência por recorrência, a saber $(1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...)$, a qual se assemelha bastante com a sequência de Fibonacci (as duas possuem a mesma lei de recorrência) diferindo desta apenas pelos valores inciais como podemos ver na definição a seguir.

Definição 8. *A sequência de Lucas* (L_n) *é definida por*

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \geq 1,$$

com $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$.

Observação 2. *Quando for conveniente vamos considerar* $L_0 = 2$.

A sequência de Lucas também possui uma fórmula posicional que alguns chamam de *Teorema de Binet para sequêcia de Lucas.*

Teorema 3. *Seja L_n a sequência de Lucas, Mostre que*

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Demonstração. A equação característica da sequência de Lucas é a mesma da sequência de Fibonacci $y^2 - y + 1$, onde $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ são suas raízes. assim segue do Teorema 1 que

$$L_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Então

$$L_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Fazendo sucessivamente $n = 1$ e $n = 2$ na igualdade acima, temos

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ B = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

□

Proposição 7. *Considere a sequência de Lucas dada por: $L_{n+2} = L_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1$, com $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.*

Verificam-se as seguintes propriedades:

(1) $\sum_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1.$

(2) $\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} = L_{2n+2} - 2.$

(3) $\sum_{k=0}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} + 1.$

(4) $\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2.$

Demonstração.

(1) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) Para $n = 1$, temos $L_0 = 2 = L_2 - 1$

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_k &= \sum_{k=0}^{n} L_k + (L_{n+1}) \\
&= L_{n+2} - 1 + L_{n+1} \\
&= F_{n+3} - 1
\end{aligned}$$

(2) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) Para $n = 0$, temos $L_1 = 1 = L_2 - 2$

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} + (L_{2(n+1)+1}) \\
&= L_{2n+2} - 2 + L_{2k+3} \\
&= L_{2n+4} - 2 \\
&= L_{2(n+1)+2} - 2
\end{aligned}$$

(3) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) Para $n = 1$, temos $L_0 = 2 = L_1 + 1$

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_{2k} &= \sum_{k=1}^{n} L_{2k} + (L_{2(n+1)}) \\
&= L_{2n+1} + 1 + L_{2n+2} \\
&= L_{2n+3} + 1 \\
&= L_{2(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

(4) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) Para $n = 1$, temos $L_1^2 = 1 = L_1 L_2 - 2 = 1 \cdot 3 - 2$.

ii) Supondo a proposição válida para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \sum_{k=0}^{n} L_k^2 + L_{n+1}^2 \\
&= L_n L_{n+1} - 2 + L_{n+1}^2 \\
&= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) - 2 \\
&= F_{n+1} F_{n+2} - 2
\end{aligned}$$

$\square$

Note que não é difícil supor que existam relações matemáticas envolvendo as sequências de Fibonacci e Lucas. A tabela abaixo mostrar os primeiros números dessas sequências.

Tabela 3: Primeiros números de Fibonacci e Lucas

n	Nº de Fibonacci	Nº de Lucas
0	0	2
1	1	1
2	1	3
3	2	4
4	3	7
5	5	11
6	8	18
7	13	29
8	21	47
9	34	76
10	55	123

Devido a natureza da origem da sequência de Lucas é de se imaginar que existam maneiras de se obter números de Lucas em função dos números de Fibonacci. Na Proposição 8 vamos demonstrar alguns resultados comprovando que isso pode ser feito. A verificação de casos particulares das proposições abaixo pode ser feita observando a tabela anterior.

Proposição 8. *Dadas as sequências de Fibonacci e Lucas definidas respectivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1$, com $F_1 = F_2 = 1$ e $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \geq 1$, com $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$. Temos as seguintes propriedades:*

(1) $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}.$, *para todo* $n \geq 1$*;*

(2) $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$, *para todo* $n \geq 2$*;*

(3) $F_{2n} = F_n L_n$ *para todo* $n \geq 0$*;*

(4) $5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$*;*

(5) $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$.

Demonstração.

(1) Faremos a demonstração por Indução Finita sobre n.

i) para $n = 1$, temos $L_1 = 1 = F_2 + F_0$.

ii) Supondo que para todo $k \leq n$, temos que

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} + F_n + F_{n-2} \\ &= F_{n+1} + F_n + F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= F_{n+2} + F_n. \end{aligned}$$

(2) Note que

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

e

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1},$$

assim

$$\begin{aligned} F_{n+2} + F_{n-2} &= F_{n+1} + F_n - (F_n - F_{n-1}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} \\ &= L_n. \end{aligned}$$

(3) Usando o item (1) e a proposição 2, temos

$$\begin{aligned} F_n L_n &= F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1} \\ &= F_{n+n} = F_{2n}. \end{aligned}$$

(4) Note que

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &= F_{n+2} + F_n + F_n + F_{n-2} \\ &= F_{n+1} + F_n + 2F_n + F_{n-2} \\ &= F_n + F_{n-1} + 3F_n + F_{n-2} \\ &= 4F_n + F_n \\ &= 5F_n \end{aligned}$$

(5) Usando o item 2 e o Teorema 4 temos que

$$\begin{aligned} L_n^2 &= F_{n+1}^2 + F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 \\ &= (F_n - F_{n-1})^2 + 4F_{n+1}F_{n-1}, \\ &= F_n^2 + 4(F_n^2 + (-1)^n) \\ &= 5F_n^2 + 4(-1)^n \end{aligned}$$

□

Observação 3. *O item 5 da proposição anterior prova que a equação diofantina* $5x^2 \pm 4 = y^2$ *tem infinitas soluções.*

A seguir vamos apresentar o modelo matricial da sequência de Lucas.

Proposição 9. *(Matriz de Lucas) Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos que*

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Demostraremos utilizando Indução Finita sobre n.

i) para $n = 1$ temos $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix}$.

ii) Supondo o resultado válido para algum $n \in \mathbb{N}$, mostremos que continua válida para $n + 1$:

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \cdot A \\
&= = \begin{pmatrix} \text{-1} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \\
&= \begin{pmatrix} \text{-1} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L_n & L_{n-1} + L_n \\ L_{n+1} & L_n + L_{n+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L_n & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_{n+2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Mais uma das semelhanças entre as sequências de Lucas e Fibonacci é a Identidade de Cassini.

Proposição 10. *(Identidade de Cassini para L_n) Mostre que $L_{n-1}l_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Calculando o determinante em ambos os membros da Proposição 9 obtemos o resultado. □

5 SEQUÊNCIA DE PELL

Figura 8: Pell

Fonte: [15]

John Pell (1611 - 1685) ficou conhecido pelo estudo das equações de Pell que são da forma $x^2 + ny^2 = 1$, onde x e y são inteiros positivos e n não é quadrado perfeito. A sequência de Pell, $(1, 2, 5, 12, 29, ...)$, é uma em meio a tantas outras sequências que possuem um bom número de propriedades semelhantes à sequência de Fibonacci. Veja a recorrência que a define:

Definição 9. *A sequência de Pell* (P_n) *é definida por*

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \forall n \geq 1,$$

com $P_1 = 1$ *e* $P_2 = 2$.

Observação 4. *Quando for conveniente vamos considerar* $P_0 = 0$.

Considere uma sequência numérica (x_n) definida tomando sucessivamente dois números consecutivos da sequência de Pell de modo que o termo geral da sequência é dado pela razão entre um termo e seu antecessor, ou seja, $x_n = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$. Observamos na tabela abaixo os primeiros termos dessa sequência:

Tabela 4: Razão da sucessão de Pell

n	$\frac{P_{n+1}}{P_n}$	x_n
1	$\frac{2}{1}$	2
2	$\frac{5}{2}$	2,5
3	$\frac{12}{5}$	2,4
4	$\frac{29}{12}$	2,4166666...
5	$\frac{70}{29}$	2,4137931...
6	$\frac{169}{70}$	2,4142857...
7	$\frac{408}{169}$	2,4142011...
8	$\frac{985}{408}$	2,4142156...
9	$\frac{2378}{985}$	2,4142132...

Assim podemos inferir que a sequência (x_n) tal que $x_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ converge para $1 + \sqrt{2} \cong 2,4142135623730...$, que é conhecido como Número Prateado.

Definição 10. *O Número Prateado ou Número de Prata é uma constante irracional simbolizada por δ tal que*

$$\delta = 1 + \sqrt{2}$$

.

Teorema 4. *(Teorema de Binet para P_n) Seja P_n a sequência de Pell, então temos que*

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n].$$

Demonstração. A equação característica da sequência de Pell é $y^2 - 2y + 1 = 0$, onde $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\beta = 1 - \sqrt{2}$ são suas raízes. Assim segue do Teorema 1 que

$$P_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Então

$$P_n = A(1+\sqrt{2})^{n-1} - B(1-\sqrt{2})^{n-1}.$$

Fazendo sucessivamente $n = 1$ e $n = 2$ em na igualdade acima, temos

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A(1+\sqrt{2}) - B(1-\sqrt{2}) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ B = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Logo

$$P_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n-1} + \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n].$$

□

Assim como nas sequências de Fibonacci e Lucas, podemos representar as sequência de Pell por matrizes. De fato, tomando

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix},$$

perceba que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Seguindo esse raciocínio chegamos ao seguinte resultado:

Proposição 11. *(Matriz de Pell) Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Demostraremos utilizando indução matemática sobre n.

i) para $n = 1$ temos $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix}$.

ii) Supondo o resultado válido para algum $n \in \mathbb{N}$, mostremos que continua válido para $n + 1$.

$$
\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \cdot M \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2P_{n+1} + P_n & P_{n+1} \\ 2P_n + P_{n-1} & P_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Daí segue que

$$
\begin{vmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^n,
$$

portanto

$$
P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = (-1)^n
$$

.

Esse resultado é equivalente a Identidade de Cassini que vimos nas sequências de Fibonacci e Lucas para sequência de Pell.

O resultado a seguir trata de triângulos retângulos cujos catetos são termos consecutivos da sequência de Pell.

Proposição 12. $P_{2n-1} = P_n^2 + P_{n-1}^2$.

Demonstração. Note que

$$\begin{pmatrix} P_{2n+1} & P_{2n} \\ P_{2n} & P_{2n-1} \end{pmatrix} = M^{2n} = M^n \cdot M^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Daí, decorre que

$$P_{2n-1} = P_n^2 + P_{n-1}^2.$$

□

Observa-se também nessa sequência uma identidade para soma dos quadrados dos seus termos.

Proposição 13. $\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = \dfrac{P_n P_{n+1}}{2}$

Demonstração. Faremos a demostração usado indução matemática sobre n.

i) para $n = 1$, temos

$$P_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{P_1 P_2}{2}.$$

ii) Supondo que a proposição é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, provemos a validade para $n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} P_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} P_k^2 + P_{n+1}^2 \\ &= \frac{P_n P_{n+1}}{2} + P_{n+1}^2 \\ &= \frac{P_{n+1}(P_n + 2P_{n+1})}{2} \\ &= \frac{P_{n+1} P_{n+2}}{2} \end{aligned}$$

□

6 RELACIONANDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI, LUCAS E PELL COM OUTROS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO BÁSICO

De acordo com Polya [16]:

> "O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível [...] O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho."

Sendo assim, a resolução de problemas é algo de fundamental importância para a construção e/ou fixação de qualquer conhecimento matemático. Logo, nesse trabalho não poderíamos deixar de sugerir alguns.

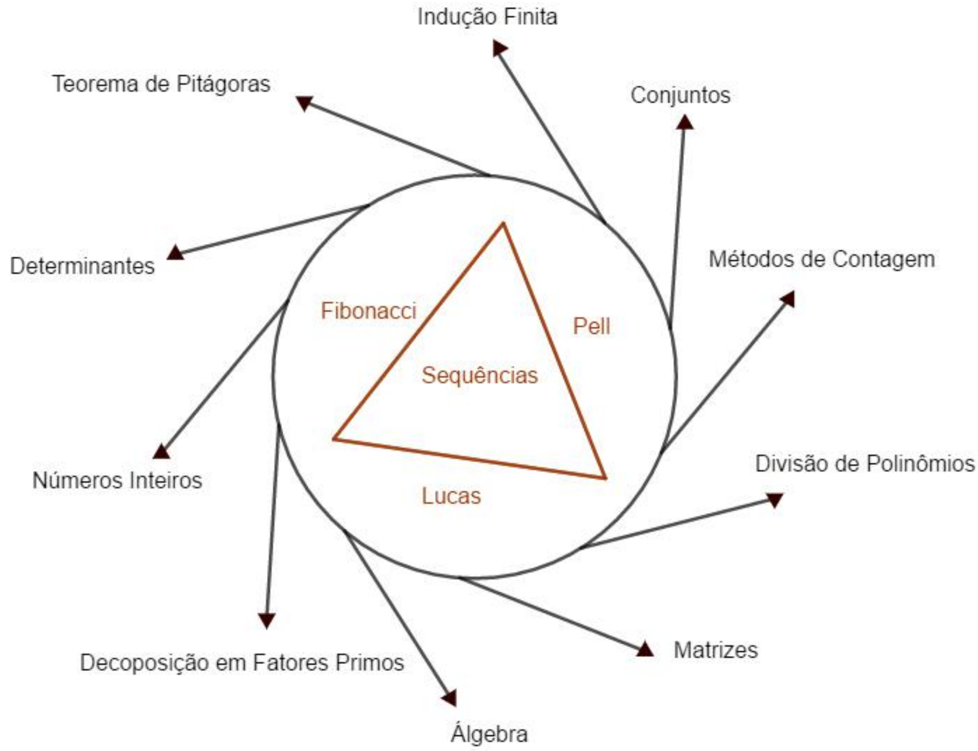
Ainda de acordo com [16], os problemas podem ser divididos em duas categorias: os de *determinação*, cujas principais partes são a incógnita, os dados e a condicionante, e os de *demostração* que suas partes principais são a hipótese e a tese por ele chamada de conclusão do teorema.

Sabendo da importância desses dois tipos de problemas procuramos provocar uma construção de raciocínio que se assemelha a uma investigação colocando o aluno como ser ativo e construtor daquele conhecimento.

Entender o contexto histórico do surgimento e desenvolvimento de qualquer tópico da matemática auxilia o aluno na construção de seus conceitos, além disso quando esse tópico é trabalhado de forma a mostrar suas relações com outros conceitos e contextos matemáticos isso ajuda a fixação daquele e dos que a eles possam estar relacionados.

Levando em consideração a capilaridade das sequências aqui trabalhadas, que permeiam e dialogam com muitos outros temas da matemática, procuramos propor problemas que abordem direta ou indiretamente outros conceitos matemáticos. A Figura 9 mostra que além das sequências de Fibonacci, Lucas e Pell se relacionarem entre si como foi mostrado nos capítulos anteriores elas podem estar conectadas a outros conteúdos matemáticos, inclusive dos ensinos fundamental e médio.

Figura 9: Relações entres as sequências de Fibonacci, Lucas e Pell e conteúdos matemáticos



A seguir vamos sugerir alguns problemas que evidenciam tal fato acompanhados de suas respectivas soluções e alguns comentários de certa forma assemelhando-se a uma sequência didática.

O primeiro problema que apresentamos relacionará as sequências de Fibonacci e de Lucas com conjuntos, métodos de contagem e indução finita.

Problema 1. *Considere o conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ *e responda as seguintes questões:*

a) *Quantos são os subconjuntos de* A*?*

b) *Quantos são os subconjuntos de* A *que não contém dois números naturais consecutivos?*

c) *Quantos são os subconjuntos de* A *que não contém dois números naturais consecutivos, se 1 e* n *também contam como consecutivos?*

Este problema permite ao professor estimular seus alunos a conjecturar uma fórmula através da verificação dos primeiros casos em cada um dos itens e a partir daí consiga perceber padrões. Após uma primeira parte de análises de casos particulares percebe-se a importância de demonstrar o resultado generalizado para qualquer que seja o número $n \in \mathbb{N}$ de elementos do conjunto. Para que isso ocorra é fundamental que om professor assegure-se de que a turma tenha alguns conhecimentos prévios como: a definição de subconjunto, o Axioma de Indução Finita, números de Fibonacci e Lucas.

Solução:

a) Seja a_n o número de subconjuntos de $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, é fácil verificar que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$. Assim cojectura-se que $a_n = 2^n$.

Usaremos Indução Finita para provar a afirmação acima:

i) Para $n = 1$ Temos que A é um conjunto unitário, logo possui apenas dois subconjutos, o vazio e ele próprio. portanto $a_1 = 2$.

ii) Supondo que $a_n = 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ provemos que essa afirmação continua válida para $n+1$. Seja A um conjunto com $n+1$ elementos e a um elemento de A. Daí temos que A tem dois tipos de subconjuntos: os que não contém a que por hipótese de indução totalizam 2^n subconjuntos e os que contém a que também são 2^n. Segue que $a_{n+1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

b) Sejam $P(A)$ e b_n respectivamente o conjunto das partes e o número de subconjuntos de A, de acordo com as condições do problema. Fazendo os primeiros casos temos:
Se $A = \{1\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$
Se $A = \{1, 2\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$
Se $A = \{1, 2, 3\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$
Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}\}$.
Logo $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 5$, $b_4 = 8$ são todos números de Fibonacci.

Para contar o número de subconjuntos de A vamos dividir em duas partes:

1ª parte: $n \notin A$. Assim o número de subconjuntos é igual ao número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, ...n-1\}$ que não possuem números consecutivos, e esse número é b_{n-1}.

2ª parte: n e $n-1 \notin A$. Assim número de subconjuntos igual ao número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, ...n-2\}$ que não possuem números consecutivos e esse número é b_{n-2}.

Portanto $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, com $b_1 = 2$ $b_2 = 3$, com $n \geq 3$. Donde segue que $b_n = F_{n+2}$.

c) Sejam $P(A)$ e c_n o conjunto das partes e o número de subconjuntos de A respectivamente que atendem as condições do problema. Faremos os primeiros casos:

Se $A = \{1\}$, então $P(A) = \{\emptyset\}$ perceba que 1 foi considerado como consecutivo dele mesmo nesse primeiro caso.
Se $A = \{1, 2\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.
Se $A = \{1, 2, 3\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \}$.
Logo $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $b_4 = 7$ são todos números de Lucas.

Para contar o número de subconjuntos de A nas condições do problema vamos dividir em duas partes:

1ª parte: $n \notin A$. Assim número de subconjuntos igual ao número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, ...n - 1\}$ que não possuem números consecutivos e esse número é c_{n-1} e pelo item b) $c_{n-1} = F_{n+1}$.

2º caso: $n \in A$. Assim número de subconjuntos igual ao número de subconjuntos de $\{2, 3, ...n - 2\}$ que não possuem números consecutivos e esse número é b_{n-3} e pelo item b) $c_{n-3} = F_{n-1}$. Portanto $c_n = c_{n-1} + c_{n-3} = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$.

Lucas criou sua sequência usando a mesma "receita" de Fibonacci alterando apenas os dois termos iniciais. Em busca de desenvolver habilidades nos alunos trazemos a seguir um problema que coloca a turma para atuar como se fosse o próprio Lucas. Aproveitamos esse problemas para reforçar o conteúdo de decomposição em fatores primos e a importância da generalização na matemática.

Problema 2. *Escolha dois números naturais e coloque nos dois primeiros campos da tabela abaixo. Preencha os demais campos com a soma dos dois campos imediatamente anteriores formando assim* ***sua sequência****.*

Tabela 5: Sua sequência

n	sua sequência
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

a) Some os 10 termos da sua sequência em seguida decomponha em fatores primos.

b) A soma dos elementos da sequência gerada no item a) pode ser escrita como um produto de um número primo por um dos elemento da sequência. Você saberia identificar esse número primo e a posição do elemento da sequência?

c) Faça o mesmo processo do item a) usando como valores iniciais x e y e perceba que a conclusão do item b) independe dos valores escolhidos no início do processo.

Solução:

Observe que o desenvolvimento do item a) por parte do aluno o coloca como agente ativo na construção do conhecimento além de exigir do mesmo o conhecimento sobre fatoração.

a) Vamos considerar três possibilidades:

Tabela 6: 1ª possível resposta para o Problema 2, item a)

n	sua sequência 1
1	1
2	4
3	5
4	9
5	14
6	23
7	37
8	60
9	97
10	157

Soma dos termos igual a $407 = 11 \cdot 37$

Tabela 7: 2ª possível resposta para o Problema 2, item a)

n	sua sequência 2
1	3
2	7
3	10
4	17
5	27
6	44
7	71
8	115
9	186
10	301

Soma dos termos igual a $781 = 11 \cdot 71$.

Tabela 8: 3ª Possível resposta para o Problema 2, item a)

n	sua sequência 3
1	2
2	2
3	4
4	6
5	10
6	16
7	26
8	42
9	68
10	110

Soma dos termos igual a $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 26$.

b) Por inspeção o aluno pode chegar a conclusão que a soma dos termos se trata do produto entre o primo 11 e o 7º elemento de sua sequência.

Pode ser interessante que nessa etapa caso alguns alunos não consigam chegar a essa conclusão o professor peça que a turma socializem suas respostas do item a) criando um ambiente de troca de ideias acerca do tema.

c) Abaixo apresentamos uma justificativa para o resultado observado no item b) através de uma generalização.

Tabela 9: Generalização do problema 2

n	Generalização
1	x
2	y
3	x+y
4	x+2y
5	2x+3y
6	3x+5y
7	5x+8y
8	8x+13y
9	13x+21y
10	21x+35y

A soma dos termos da sequência é igual $55x + 88y = 11 \cdot (5x + 8y)$.

Problema 3. *Considere a sequência de Fibonacci* (F_n) *definida por:*

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1,$ *com* $F_1 = F_2 = 1$.

a) Determine os 8 primeiros termos da sequência.

b) Com base na sequência de Fibonacci quais valores você atribuiria a F_0, F_{-1}, F_{-2}, F_{-3}, F_{-4}, F_{-5}, F_{-6}, F_{-7}, F_{-8}*?*

c) Conjecture uma fórmula para F_{-n}.

d) Use a fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci para prova sua conjetura do item b).

Solução:

a) $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$.

O item a) nesse sequência didática tem como função relembrar aos alunos os primeiros termos da sequência de Fibonacci e ajudá-los a fixar o fato de que para obter um termo da sequência de Fibonacci é necessário somar os dois termos imediatamente anteriores a ele.

No item b) espera-se que o aluno consiga perceber que também podemos conseguir determinar um número da sequência de Fibonacci através da subtração do termo que esta duas posições a sua frente pelo termo imediatamente a sua frente na sequência, ou seja, $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Portanto é natural concluir que $F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 1$ e $F_{-1} == F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1$ e assim por diante.

b) $F_0 = 1$, $F_{-1} = 1$, $F_{-2} = -1$, $F_{-3} = 2$, $F_{-4} = -3$, $F_{-5} = 5$, $F_{-6} = -8$, $F_{-6} = 13$, $F_{-7} = -21$.

c) Um observação atenta dos resultados dos itens anteriores levará a percepção de que os termos de F_{-n} são iguais aos termos de F_n a menos do sinal quando n é par. Daí conjectura-se que $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$.

d) A justificativa da fórmula cojecturada no item c) se faz por manipulação algébrica.

De fato, pelo Teorema 2 temos

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Fazendo $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ temos

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Substituindo $n = -n$, e sabendo que $\alpha \cdot \beta$ temos

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(-\beta^n) - (-\alpha^n)}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n. \end{aligned}$$

O Problema 4 relaciona a divisão polinomial com as sequência de Fibonacci, Lucas e Pell.

Problema 4. *Realize as divisões de polinômios a seguir:*

a) $\dfrac{x}{1-x-x^2}$

b) $\dfrac{x}{1+x-x^2}$

c) $\dfrac{x}{1-2x-x^2}$

Solução: Um exercício aparentemente despretensioso como o proposto acima pode servir de maneira eficiente para trazer a tona as sequências de Fibonacci e Pell em mais uma epata do conteúdo programático da disciplina de matemática, visto que os coeficientes do cociente das divisões estão dispostos na mesma ordem de tais sequências.

a) $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + ...$

b) $x - x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^5 - 8x^6 + ...$

c)$x + 2x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 29x^5 + 70x^6 + ...$

Vimos nos capítulos anteriores que cada uma das três sequências possuem suas respectivas formas matriciais. Por processos indutivos mostramos a existência de tais modelos E através desse modelo matricial provamos a Identidade de Cassini para as sequências de Lucas e de Pell, e Proposição 12. Outras propriedades interessantes sobre essas sequências podem ser investigadas e mostradas através desse modelo. Portanto com devidas adaptações o professor poderá criar diversas atividades. Abaixo sugerimos um problema envolvendo determinantes de ordem 3 e as sequências de Fibonacci, Lucas e Pell.

Problema 5. *Considere as matrizes abaixo:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 29 \\ 3 & 11 & 47 \\ 4 & 18 & 76 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \\ 55 & 89 & 144 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 12 & 29 & 70 \\ 169 & 507 & 1183 \end{pmatrix}.$$

Calcule os determinantes das matrizes A, B e C.

Solução:

Usando os algoritmos adequados calcular esses determinante não é uma tarefa difícil, ou ainda levando em consideração a propriedade de determinantes de matrizes que afirma que se os elementos de uma fila são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é igual a 0, chega-se ao seguinte resultado: $det(A) = det(B) = det(C) = 0$. Escolhemos essa atividade por razão de sua versatilidade no sentido que ela pode ser usada em momentos variados dentro de uma sequência de trabalho do professor. Como por exemplo:

1. Para introduzir as sequências de Fibonacci, Lucas e Pell familiarizando seu alunado com alguns termos da sequência e até mesmo suas respectivas leis de formação.

2. Introduzir ou exemplificar propriedades acerca de matrizes.

3. Relembrar o conteúdos contidos na resolução do problemas.

No próximo exemplo relacionamos a sequência de Pell com a trigonometria por meio do cálculo da hipotenusa de um triângulo retângulo que tem como medidas dos lados três números de Pell.

Problema 6. *Dado um triângulo retângulo escolha dois números de Pell consecutivos e os considere como sendo as medidas dos catetos desse triângulo.*

a) Calcule a hipotenusa desse triângulo.

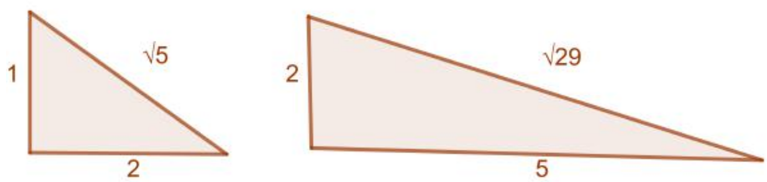
b) No item a) você deve ter notado que a hipotenusa é a raiz quadrada de um número de Pell. Respeitando que os catetos sejam números consecutivos de Pell verifique se tal fato ocorre para outras escolhas.

c) Cojecture uma fórmula em termos de números de Pell.

d) Demonstre a fórmula conjecturada no item c).

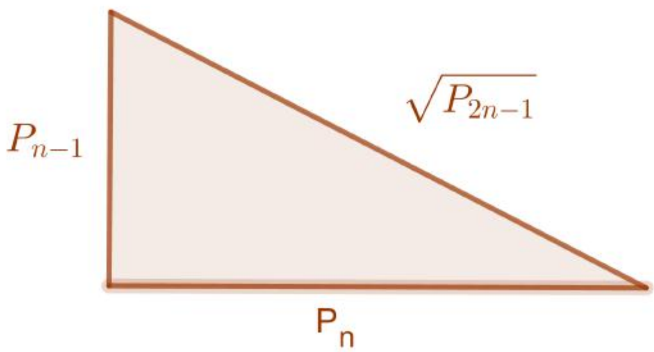
Solução: Abaixo seguem possíveis respostas para os itens a) e b).

Figura 10: Possíveis respostas para o item a) e b) do problema 6



Perceba que nesses dois exemplos de respostas a medida da hipotenusa do triângulo é a raiz quadrada de um número de Pell. Diante das respostas dos itens anteriores é esperado que no item C) se obtenha a seguinte generalização:

Figura 11: Problema 6, item c)



Ou seja, $P_{2n-1} = P_n^2 + P_{n-1}^2$. Essa fórmula está demostrada na Proposição 12, o que responde ao item d) criando um inesperado elo entre a trigonometria, as sequências Pell e matrizes.

O leitor mais atento lembrará que a Proposição 5 nos diz que "A soma dos quadrados de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci é um número de Fibonacci", ou seja, é possível desenvolver um problema análogo ao exposto aqui para a sequência de Fibonacci.

Nesse ponto uma pergunta é bem natural: *A soma dos quadrados de dois números consecutivos da sequência de Lucas é um número de Lucas?* A resposta é não, para verificarmos este fato basta tomarmos L_1 e L_2 como sendo os catetos do triângulo que chegamos a um contra exemplo.

Por fim trazemos um problema de contagem bastante interessante e construtivo.

Problema 7. *Uma escada tem 5 degraus. De quantas formas podemos chegar ao topo, subindo um ou dois degraus de cada vez? E se a escada tiver n degraus?*

Solução: Uma estratégia adotada pelo aluno poderá ser a de inspecionar e listar todas as possibilidades de subir os 5 degraus da escada. Vamos escrever essa lista de possibilidade:

Considere que o algarismo 1 na sequência significa que subimos um degrau e o 2 que subimos dois degraus. Assim a lista fica: $1112 - 212 - 122 - 1211 - 11111 - 2111 - 221 - 1121$. Portanto 8 maneiras distintas de chegar ao topo da escada com 5 degraus.

Em caso de dificuldade para essa primeira etapa do problema o professor pode intervir sugerindo que analisem casos em que a escada tenha um número menor de degraus. Esse raciocínio construtivo de avaliar os primeiros casos facilitará o entendimento para a justificação do caso para uma escada com n degraus.

De modo análogo ao item b) do Problema 1 temos se x_n é a quantidades de formas que podemos chegar ao topo da escada obedecendo as condições do problema então temos que $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ ou ainda que $x_n = F_{n+1}$.

Os problemas apresentados nesse capítulo nos mostram que são inúmeras as possibilidades de se trabalhar com as sequências de Fibonacci, Lucas e Pell no ensino básico. No entanto, observamos que para que o professor tenha maior êxito ao trabalhar com as sequências apresentadas nesse trabalho ele deve sempre levar em conta o contexto e os pré-requisitos para abordagem do tema fazendo as alterações que julgar necessárias.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho está direcionado aos professores e futuros professores na busca de difundir o estudo de sequências nas milhares de salas de aulas espalhadas pelo Brasil. Para tanto, apresentamos um estudo de algumas sequências lineares de segunda ordem famosas dentro da matemática, porém pouco exploradas nos ensinos fundamental e médio.

Nossa abordagem procurou suscitar uma discussão sobre a sequência de Fibonacci para além do problema dos coelhos que aparecem em exemplos ou exercícios descontextualizados da atualidade na literatura usada em nossos sistemas de ensino. Nos empenhamos em buscar resultados matemáticos relacionados à sequência de Fibonacci, tais como a relação de recorrência que a rege, a Fórmula de Binet, sua forma matricial, e diversas propriedades. Procedemos do mesmo modo com as sequências de Lucas e Pell, destacando sempre suas similaridades com a sequência de Fibonacci.

As sequências aqui abordadas podem ser facilmente adaptadas para diversas situações de ensino com alunos do fundamental, médio e turmas olímpicas. Buscamos mostrar a versatilidade de tais sequências ao apresentar uma coleção de exemplos que sublinha o diálogo destas com outros conteúdos matemático. Todos os problemas aqui propostos vêm acompanhados de sua respectivas soluções e de alguns comentários e sugestões, a fim de ajudar o professor na hora de escolher a melhor maneira de usá-los.

Evidenciamos que o trabalho didático usando sequências desperta interesse do aluno e estimula seu raciocínio matemático tornando-o agente ativo da construção dos conceitos. Sendo assim, esperamos que este texto, que apresenta um conteúdo incomum aos encontrados nos livros didáticos, possa ser usado para ampliar o leque de possibilidades do professor de matemática em sua prática pedagógica.

Referências

[1] A SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI NA NATUREZA. Disponível em: https://planetabiologia.com/a-sequencia-de-fibonacci-na-natureza, Acesso em, 10/01/2019.

[2] Alves, F. R. V. **Sequência generalizada de pell - SGP: Aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo.** Revista Tema. v. 13, n. 2, Pág. 27 a 41, 2016.

[3] Astorlino e Silva, B. **Números de Fibonacci e números de Lucas** . 2017. 81f. Dissertação de mestrado - PROFMAT - Universidade de São Paulo. São Carlos, 2017.

[4] Aznar, E. R. **Biografia de grandes matemático**. Disponível em: https://www.ugr.es/ eaznar/lucas.htm acesso em 12/02/1019.

[5] Beltrão, C. **O Homem Vitruviano e o número phi: A matemática da beleza** Disponível em: http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/. acesso em 10/02/1019.

[6] Borges, F. P. **A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações** . 2015. 89f. Dissertassão de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal de Mato Grosso. Cuibá, 2015.

[7] Cordeiro, A. **Tópicos de aritmética: A Sequência de Fibonacci.** 2014. 24f.Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal do Paraná. Coritiba, 2014.

[8] Córes, F. C. **Argumentos combinátorios para identidades envolvendo números binomiais, de fibonacci e de Lucas.** . 2014. 80f. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

[9] Landim, N. P. **Razão áurea: Expressando a beleza desse número para o ensino médio.** 2014, 70f. Dissertação do mestrado - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró: 2014.

[10] **Economistas Decifram Bolsa Utilizando Proporção Divina.** Disponível em: https://jornalggn.com.br/produtos-financeiros/economistas-decifram-bolsa-utilizando-proporcao-divina//, acesso em 09/02/1019.

[11] **Gigantes da matemática**. Disponível em: https://gigantesdamatematica.wordpress.com/2(
fibonacci-1170-1250/, acesso em 06/02/1019.

[12] Lima, E. L. et al . **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2.: 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[13] Hefez, A. **Aritmética** , 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[14] Muniz Neto, A. C. **Tópicos de matemática elementar: Números reais**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] Noronha, W. F.; Alves, F. **Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas**. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, V. 13, p. 01-30, 2018.

[16] Polya, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[17] Sahd, L. **O que é a sequência de Fibonacci**. Disponível em https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-a-sequencia-de-fibonacci/, acesso em 20/02/2019.

[18] Sena, C. A. R **Sequência de Fibonacci: propriedades, aplicações e curiosidades**.2013. 56f. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

[19] Teixeira, M. A. G. **Aspectos algrébricos e combinatório dos números de Pell e Catalan**. 2018. 103f. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal da Grande Dourados, Mato Grosso, 2018.